下水道管渠網の非定常圧力流れの基礎式と 圧力波伝播速度（スロット幅）算定式

PRESSURIZED FLOW EQUATIONS IN URBAN STORM SEWER PIPE SYSTEMS AND EVALUATION EQUATION OF PRESSURE WAVE CELERITY (SLOT WIDTH)

友近 榮治¹・渡辺 政広²・東 正史³・魚谷 牧夫⁴

Eiji TOMOCHIKA, Masahiro WATANABE, Masafumi AZUMA and Makio UOTANI

¹正会員 愛媛大学大学院 理工学研究科博士後期課程（〒790-8577 松山市文京町3）

²正会員 工博 愛媛大学大学院 理工学研究科（〒790-8577 松山市文京町3）

³正会員 工修 日本上下水道設計㈱ 東部支社（〒141-0031 東京都品川区西五反田7-20-9）

⁴正会員 工修 愛媛大学大学院 理工学研究科博士後期課程（〒790-8577 松山市文京町3）

To analyze urban stormwater runoff in storm sewer systems, three runoff models, which are InfoWorks model, MOUSE model and XP-SWMM model, have been widely used. In the three models, SLOT model that has a fictitious slot in the pipe crown and analyze a pressurized flow as an open-channel flow, are employed to analyze surcharged flow with flooding from manholes. In the analysis, the slot width and the pressure wave celerity are needed and the large differences in simulated results (stage hydrographs and inundated volume hydrographs) have been introduced by the difference of the values of pressure wave celerity and slot width. Nevertheless, the evaluation equation has not been suggested.

In this paper, basic flow equations of the pressurized flow are derived considering the storage of runoff water in lateral pipes, and through the derivation the evaluation equation of pressure wave celerity and slot width is suggested.

Key Words : slot width, pressure wave celerity, pressurized flow, basic flow equations, urban storm sewer pipe system

1. はじめに

都市下水道流域の雨水流出解析^{1)~4)}において、MOUSE モデル、InfoWorks モデル、XP-SWMM モデルの3つの解析モデル（ここでは、海外モデル⁵⁾と呼ぶこととする）が広く用いられて^{6)~8)}きているが、これら3モデルにおいては、下水道管渠の圧力流れをスロット・モデルを用いて解析しているため、下水道管渠網における圧力波伝播速度あるいはスロット幅が、解析精度に大きく関係する重要なモデルパラメータとして用いられている。しかしながら、圧力波伝播速度あるいはスロット幅の算定式（評価式）はいまだ明らかにされておらず、解析者が適切と思われる経験値を採用しているのが実情である。

圧力波伝播速度（スロット幅）の違いによって、解析

結果（水位ハイドログラフ、流量ハイドログラフ、氾濫水量ハイドログラフ、氾濫水深ハイドログラフ）は大きく異なってくることがあり、近年、精度高い浸水氾濫解析結果が要求されていることを考えると、そうした算定式を早急に明らかにしておくことが肝要である。

本論文では、はじめに、管壁の弾性変形および水の圧縮性ととも、下水道管渠に多数接続している取付管における流出水の貯留をも考慮して、下水道管渠の圧力流れの基礎式を導出する。次に、この基礎式の導出過程を通じて得られる圧力波伝播速度（スロット幅）算定式を提案するとともに本式の妥当性を検証する。

2. スロット幅（圧力波伝播速度）の違いが

浸水はんらん解析結果に及ぼす影響

(1) 海外モデルにおける非定常圧力流れの基礎式

上述した3つの海外モデルは、スロット・モデル（図-1）を利用して圧力流れを解析しており、それらモデルにおける下水道管渠の非定常圧力流れの基礎式は、以下のように表されている。

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{a^2}{gA_f} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\cos \theta \frac{\partial y}{\partial x} - S_0 + \frac{Q|Q|}{K_C^2} \right) = 0 \quad (2)$$

$$; B_s = \frac{gA_f}{a^2}, \quad a = \sqrt{\frac{gA_f}{B_s}} \quad (3)$$

ここに、 A ：流水断面積、 Q ：流量、 y ：水深、 S_0 ：管渠勾配、 θ ：管渠と水平面のなす角度、 K_C ：通水能、 g ：重力加速度、 A_f ：管渠断面積、 B_s ：スロット幅、 a ：圧力波伝播速度、 x ：距離、 t ：時間。

(2) 圧力波伝播速度 a ・スロット幅 B_s の取扱い⁵⁾

圧力波伝播速度 a あるいはスロット幅 B_s の取扱いについては、いずれの海外モデルにおいても、明確な指針（算定式）は示されておらず、経験的に、表-1～表3に示す値を採用するようにとしている。

図-1 スロットモデル

表-1 指針1（スロット幅＝管渠直径Dの2%）

$$B_s = 0.02 \times D$$

D (m)	B_s (m)	a (m/s)
0.25	0.005	10
0.50	0.010	14
1.00	0.020	20
2.00	0.040	28

表-2 指針2（スロット幅＝管渠直径Dの1%）

$$B_s = 0.01 \times D$$

D (m)	B_s (m)	a (m/s)
0.25	0.0025	14
0.50	0.0050	20
1.00	0.0100	28
2.00	0.0200	39

表-3 指針3（スロット幅＝0.001m）

$$B_s = 0.001 \text{ m}$$

D (m)	B_s (m)	a (m/s)
0.25	0.001	22
0.50	0.001	47
1.00	0.001	88
2.00	0.001	176

a) 指針1：スロット幅を管渠直径の2%とする（表-1）。

b) 指針2：スロット幅を管渠直径の1%とする（表-2）。

c) 指針3：スロット幅を 0.001m とする（表-3）。

以上より、海外モデルでは、経験的観点から、管渠直径に応じて、スロット幅は 1mm～4cm（ $D=0.25\text{m} \sim 2.0\text{m}$ ）、圧力波伝播速度は 10m/s～200m/s（ $D=0.25\text{m} \sim 2.0\text{m}$ ）を採用することが望ましいとしている。いずれにしても、経験的立場から推奨されているもので、そうした推奨の理論的根拠は明らかではない。

このことは、海外モデルで用いられている非定常圧力流れの基礎式が、必ずしも妥当なものではないことを示唆するものとも考えられる。

(3) スロット幅（圧力波伝播速度）の違いが浸水氾濫解析結果に及ぼす影響の検討

スロット幅（圧力波伝播速度）の違いが浸水氾濫解析結果に及ぼす影響について、図-2に示す下水道管渠システム（管渠直径1m、管渠長60m、マンホール直径1.5m、管渠・マンホール数17本、管渠システム延長1,020m、管渠勾配0.0038、上流端境界条件＝一定流入流量1.537m³/s、下流端境界条件＝sine型水位変動）を対象に、InfoWorksモデルを用い、浸水氾濫を伴う流出シミュレーションを行った。検討結果の1例を、図-3～図-5に示す。

なお、マンホールからの浸水氾濫水は、各マンホール上の貯留域（700m²）に貯留されるとしている。

これらより、通常よく用いられている圧力波伝播速度（15～200m/s）の違いによって、浸水氾濫ハイドロ（図-4、8,441m³、28%の相違）と流量ハイドロ（図-5）に実用上からも無視し得ない差異が現れてくること

図-2 流出シミュレーションに用いられた下水道管渠システム

図-3 下流端水深ハイドログラフ（下流端境界条件）

図-4 湛水量ハイドログラフ（管渠システム全体）

図-5 流量ハイドログラフ（管渠システム下流端）

が分かる。これは、スロットに貯留される流出水の水量が、その幅の大きさによって異なってくることに起因するもので、スロット幅（圧力波伝播速度）が解析精度に

係わってくる重要な流出パラメータの一つであることを示唆している。

3. 下水道管渠における圧力流れ（満管流れ）の 流れの基礎式

水の圧縮性、管壁の弾性変形、取付管での流出水貯留を考慮して、プリズマチックな下水道管渠における非定常圧力流れ（満管流れ）の運動方程式および連続の式を導出する。

(1) 連続の式

図-6に示すような、取付管が接続する下水道管渠の微小区間 Δx の非定常圧力流れに、質量保存則を適用すると、次式を得る。

図-6 微小区間と連続の式

式 (7), (8) を式 (5) に代入し, 式 (6) の関係を考慮すると, 次の連続の式を得る.

$$\rho AV \Delta t - \left\{ \rho Av + \frac{\partial(\rho Av)}{\partial x} \Delta x \right\} \Delta t = \frac{\partial(\rho A \Delta x)}{\partial t} \Delta t + \rho \frac{A_L}{\sin \theta} \frac{\partial y}{\partial t} \Delta t \cdot N \Delta x \quad (4)$$

ここに, A : 管渠の断面積, V : 断面平均流速, ρ : 水の密度, A_L : 取付管の断面積, θ : 取付管の取付角度, y : 水深, N : 取付管の管渠単位長さあたりの設置本数 (本/m), Δx : 微小区間の長さ, Δt : 微小時間間隔, x : 距離, t : 時間.

上式を, 展開・変形・整理すると, 次式を得る.

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{A \sin \theta} \frac{\partial y}{\partial t} N = 0 \quad (5)$$

$$; \begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x}, \\ \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + V \frac{\partial y}{\partial x} \end{cases} \quad (6)$$

上式左辺の第1項および第2項は, 水が圧縮性であり, 管壁が弾性変形するので, それぞれ, 次のように書き表すことができる.

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{K} \frac{\rho g}{1 - \frac{\rho g}{K} y} \frac{dy}{dt} \quad (7)$$

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{D}{\delta E} \rho g \frac{dy}{dt} \quad (8)$$

ここに, p : 水圧 $=\rho g y$, K : 水の体積弾性係数, D : 管径, δ : 管壁の厚み, E : 管材のヤング係数, g : 重力加速度.

$$\frac{\partial y}{\partial t} + V \left(1 - \frac{a^2}{g} \frac{N}{A \sin \theta} \right) \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$; a = \sqrt{\frac{K}{\rho} / \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho g}{K} y} + \frac{KD}{\delta E} + \frac{K}{\rho g} \frac{N}{A \sin \theta} \right)} \quad (10)$$

連続の式 (9) における a (式(10)) は, 後述するように, 下水道管渠の圧力流れにおける微小擾乱の伝播速度, すなわち圧力波伝播速度を表している.

ここで, 水の圧縮性に起因する圧力波伝播速度を a_0 , 管壁の弾性変形に起因する圧力波伝播速度を a_r , 取付管での水の貯留に起因する圧力波伝播速度を a_L と表すこととすると,

$$a_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho} / \frac{1}{1 - \frac{\rho g}{K} y}} \quad (11)$$

$$a_r = \sqrt{\frac{K}{\rho} / \frac{KD}{\delta E}} = \sqrt{\frac{\delta E}{\rho D}} \quad (12)$$

$$a_L = \sqrt{\frac{K}{\rho} / \left(\frac{K}{\rho g} \frac{N}{A \sin \theta} \right)} = \sqrt{\frac{g A \sin \theta}{N A_L}} \quad (13)$$

であり, 式 (10) は,

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho} / \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho}{K} g y} + \frac{K}{\rho D} + \frac{K}{\rho} \frac{N}{g A \sin \theta} \right)}$$

$$= \frac{a_0}{\sqrt{1 - \frac{gy}{a_0^2} + \frac{a_0^2}{a_r^2} + \frac{a_0^2}{a_L^2}}} \quad (14)$$

と表され、連続の式は、次式のように表されることとなる。

$$\frac{\partial y}{\partial t} + V \left(1 - \frac{a^2}{a_L^2} \right) \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

(2) 運動方程式（運動量保存則）

図-7 に示すような、取付管が接続する下水道管渠の微小区間 Δx の非定常圧力流れに、運動量の定理を適用すると、先ずは、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho A V^2) \Delta x + \frac{\partial}{\partial t} (\rho A V) \cdot \Delta x \\ &= - \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x + \rho g A S_0 \Delta x - \tau_0 S \Delta x \end{aligned} \quad (16)$$

$$; \tau_0 = \rho g R S_f, \quad S_f = \frac{n |V| V}{R^{4/3}},$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho g \left(y - \frac{D}{2} \right) A \right\} \quad (17)$$

ここに、 P ：全水圧、 S_f ：摩擦勾配、 S_0 ：管渠勾配、 S ：潤辺、 τ_0 ：壁面剪断応力、 n ：マンニングの粗度係数、 R ：径深。

水の圧縮性、管壁の弾性変形が運動量の流れに及ぼす影響は無視し得る程度であるので、式 (16) を変形・展開・整理してゆくと、次の運動方程式が得られる。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} - S_0 + \frac{n^2 |V| V}{R^{4/3}} = 0 \quad (18)$$

(3) 圧力波伝播速度（微小擾乱の伝播速度）

水平に近い下水道管渠において、緩やかな流れである非定常圧力流れが流れているとする。水理量の定常成分に下添字0を、微小な非定常成分に上添字'を付すこととすると、

$$V = V_0 + V', \quad y = y_0 + y', \quad R = R_0 + R' \quad (19)$$

と表される。

これらを式 (15) および式 (18) に代入し、 $V'(\partial V'/\partial x)$ 、 $V'(\partial y'/\partial x)$ などが微小であり、定常流れの関係式などを考慮して、それらの2式を展開・変形・整理してゆくと、次の2式を得る。

図-7 微小区間と運動量方程式

$$\frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V'}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V'}{\partial t} + \frac{\partial y'}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

式 (20) を t で偏微分し、式 (21) を x で偏微分して、両式を加え合わせると、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} \quad (22)$$

上式は、1次元波動方程式を表しており、 a が微小擾乱の伝播速度、すなわち圧力波伝播速度を表していることがわかる。

(4) 下水道管渠における非定常圧力流れの基礎式

3. (1) で導出した連続の式 (9) ~ (14) における a 、 a_0 、 a_r 、 a_L について、これらが実流域の下水道管渠網においてどのような値をとるかについて検討した。

松山市・大阪市街地流域において管渠および取付管の諸元を調査した結果⁹⁾を基に、それら a 値を算定した結果を表-4に示す。

これより、まず、実流域の下水道管渠網において、圧力波伝播速度は、15~150 m/sの範囲の値をとるであろうことが分かった。

次に、 $a \approx a_L$ であり、 $V \left\{ 1 - \left(a^2 / a_L^2 \right) \right\} (\partial y / \partial x)$ は微小項として削除することができ、よって、実流域の下水道管渠網における非定常圧力流れの基礎式は、次のように表されることとなることが分かる。

表-4 松山市・大阪市下水道流域における a , a_0 , a_r , a_L 値

Pipes						Evaluated Values of a_0, a_r, a_L, a			
Sewer Pipe			Lateral Pipe						
D (m)	δ (m)	E (N/m ²)	d (m)	N (pipes/m)	θ (degree)	a_0 (m/s)	a_r (m/s)	a_L (m/s)	a (m/s)
0.25	0.028	28,000	0.15	1/14	25	1,446	1,771	13	13
0.5	0.042			1/17			1,534	28	28
1.0	0.082			1/20			1,515	61	61
2.0	0.145			1/24			1,425	133	132

注) その他共通条件:

- ・水の密度: $\rho = 1,000 \text{ kg/m}^3$
- ・水の体積弾性係数 (10℃): $K = 2.09 \times 10^9 \text{ (N/m}^2\text{)}$
- ・水深: $y = 2 \text{ m}$
- ・管渠の弾性係数: $E = 2.8 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ (鉄筋コンクリート管)

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

$$; a = \frac{a_0}{\sqrt{1 - \frac{gy}{a_0^2} + \frac{a_0^2}{a_r^2} + \frac{a_0^2}{a_L^2}}} \approx a_L \quad (24)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} - S_0 + \frac{n^2 |V| V}{R^{4/3}} = 0 \quad (25)$$

なお、上の下水道管渠における非定常圧力流れの基礎式は、渡辺ら⁹⁾が既に提案している、スロット・モデルの流れの基礎式と同一である。

4. 結論

本論文では、はじめに、これまで明らかにされてこなかった、下水道管渠網における非定常圧力流れに対する流れの基礎式（運動方程式および連続の式）を、水の圧縮性、管壁の弾性変形、取付管における流出水貯留を考慮して、導出した。これより、これまで明らかにされてこなかった、下水道管渠網における非定常圧力流れの圧力波伝播速度の算定式（評価式）が、明確に示された。

次に、実流域の下水道管渠網における下水道管渠、取付管の諸量・諸元を調査した結果より、圧力波伝播速度を算定した結果、15～150 m/sの範囲の値をとるであろうことが分かった。

参考文献

- 1) 川池健司・井上和也・戸田圭一：非構造格子の都市氾濫解析への適用，水工学論文集，第44巻，pp.461-466，2000.
- 2) 井上和也：洪水氾濫解析モデル，京都大学防災研究所年報，第48号A，pp.1-13，2005.
- 3) 内田龍彦・川原能久：任意の境界条件を有する二次元浅水流の高精度解析手法の開発，水工学論文集，第50巻，pp.799-804，2006.
- 4) 関根正人・中村 淳・中村康朋：河川からの越水を伴う都市域の内水・外水水氾濫過程に関する数値解析，水工学論文集，第52巻，pp.865-870，2008.
- 5) (財)下水道新技術推進機構：流出解析モデル利活用マニュアル -雨水対策における流出解析モデルの運用手引き-，(財)下水道新技術推進機構，2006.
- 6) 木村 誠・城戸良能・中北英一：都市内水域における局所集中豪雨に対応したリアルタイム浸水予測手法に関する基礎的検討，水工学論文集，第55巻，pp.S 931-S 936，2011.
- 7) 石垣泰輔・戸田圭一・尾崎 平・馬場康之・井上和美：内水氾濫時における大規模地下空間浸水と避難，京都大学防災研究所年報，第54号B，pp.471-476，2011.
- 8) 尾崎 平・石垣泰輔・戸田圭一：低平地住宅密集地域における内水氾濫の危険度評価に関する研究，水工学論文集，第53巻，pp.823-828，2009.
- 9) Pandit Saroji KUMAR・重田尚秀・岡 佳宏・渡辺政広・川崎達：スロット・モデルの適用性の向上に関する検討，水工学論文集，第52巻，pp.877-882，2008.

(2012. 9. 30受付)