蛇行河川における河床形状発達に関する 一次元モデル計算

1-D MODELING OF BED DEFORMATION IN A MEANDERING RIVER

松延和彦¹・安藤誠²・石川忠晴³

Kazuhiko MATSUNOBU, Makoto ANDO and Tadaharu ISHIKAWA

¹学生会員 修(工) 東京工業大学 大学院総合理工学研究科環境理工学創造専攻

(〒226-8502 横浜市緑区長津田町4259 G5-3)

²学生会員 学(工) 東京工業大学 大学院総合理工学研究科環境理工学創造専攻 (同上)

³フェロー 工博 東京工業大学 大学院総合理工学研究科環境理工学創造専攻 (同上)

In a meandering river, the interaction of flow and bed deformation intensifies the stream shift. It is an important problem how to describe this process in the modeling of meandering river. This paper presents the method for simulating the time evolution of river bed topography in one dimension on the basis of existing meandering flow model. First, the fitting method for the bed topography of channel experiment data is discussed for the model calculation. The result of stream shift calculation under the condition of the fitted bed topography agrees roughly with the experiment data. After that, this paper mentions how to calculate the bed deformation, adding the continuity equation of bed load in one dimensional flow model. Although the result partially agreed with the experiment data, the phase lag of bed undulations to channel curvature was underestimated. Therefore, the method how to correct the equation and express the phase lag well is also discussed.

Key Words : river meandering, one dimensional modeling, time evolution of river bed topography, continuity equation of bed load

1. はじめに

河川流路の蛇行現象に関しては自然地理学や河川工学の分野で古くから注目され、数々の事例研究^{1,2)}や実験的研究^{3,4)}が行われてきた。また、その知見に基づいた現象の数値モデルも提案されている。近年の計算機と流体数値解析技術の発達により、二次元あるいは三次元での水理計算と流砂量計算を組み合わせた平面二次元河床変動解析が可能となっている。しかしながら、蛇行発展の計算では、水路形状の変化に伴い計算格子を再設定して流れの解析を行う必要があり、境界が固定された河床変動に比較して計算負荷が大きい。このため、現状では比較的短い河道区間の短期的計算に留まっている⁵⁾。

これに対して、蛇行現象の大局的特性を一次元解析により把握する試みがなされている。Ikedaら⁶⁾は「蛇行河川の河床横断勾配が水路軸曲率に比例する」という経験的關係を用い、側岸浸食速度が流速偏差に比例するという仮定のもとに、蛇行流路発達的一次元モデル(bend

equation)を提示している。

さて、この経験的關係は、蛇行形状と河床勾配の関係を概略的に示している⁷⁾ものの、現実的には水路の横断勾配と曲率との間に位相差が存在することが水路実験⁸⁾により確認されている。この問題を解決するためには、流れの計算と河床変動計算をカップリングした新たな一次元モデルの開発が必要であると考えられる。

流れ場の計算に関して、石川・劉⁹⁾は、Ikedaらが考慮している鉛直平均的な横断方向流れに、湾曲により生じる二次流の影響¹⁰⁾を加え、蛇行河川の浸食・堆積の原因となる主流シフトを一次元的に計算することを試みている。そして、種々の単湾曲・蛇行水路において、実験結果と良好に一致する計算結果を得ている。ただし、これらはいずれも平坦固定床の水路における議論に留まっている。

本論文では、石川・劉のモデルを基礎として、流れと流砂の交互計算により、蛇行河川における河床形状の発達を一次元的に表現する手法について議論する。まず、移動床水路実験における平衡河床形状について、一次元

モデルに適合する関数形で地形のフィッティングを行う。次に、その水路形状において流れ場の計算を行い、側岸の浸食・堆積により河床地形変化を生じた水路においても、主流シフトが適切に表現されることを確認する。さらに、それを一次元化した流砂の連続式と組み合わせることで、水路床形状の発展の再現性を検証する。

2. 水路床形状のフィッティング

(1) 対象水路

本研究で対象としたのは、長谷川⁸⁾の実験水路である。水路諸元を表-1に示す。水路の平面形状は、蛇行偏角が河道縦断距離に関してsin関数で分布を取るsin-generated curveで定義されている。

表-1の水理条件のもとで、十分な通水時間を経て得られた平衡状態における河床地形を図-1に示す。理想的には半蛇行長ごとに対称形となるが、実際の実験データはやや異なる。後の検証のため、図-1を半蛇行長ごとに平均化し、図-2に示す。水路の曲率と河床の横断勾配の間には明らかな位相差が存在する。水路床は内岸側で堆積、外岸側で浸食が発生しているが、横断勾配は前者が小さく、後者が大きい。すなわち、横断面は上に凸な形状となる。堆積による河床高の上昇は、曲率が最大となる付近の内岸で顕著となり、そこから下流に向かうに従って水路中央に伸びている。一方、横断平均的な河床高さについては、縦断的にほとんど変化がないと見られる。

(2) フィッティング手法

図-1の河床形状について、以下に述べる手順で最小二乗法によるフィッティングを行う。

まず、横断面の関数形を定め、各横断面にフィッティングを適用する。一次元蛇行モデルで最も重要なファクターは、流速や河床地形の左右岸での差であり、これは1次のモードのみでも表現できる。しかしながら、本研究では、それに加えて(1)で述べた堆積側と浸食側の形状の差を最も単純に表現できる2次関数形により近似する。

すなわち、河床の高さ z_0 について、

$$\bar{z}_0(s, n) = a_1(s) \cdot b \eta - a_2(s) \cdot b (\eta^2 - 1/3) \quad (1)$$

とする。ここに、 (s, n) ：それぞれ縦断、横断座標、 $a_i(i=1,2)$ ：形状係数、 b ：水路半幅、 $\eta=n/b$ である。 a_2 の項に係数-1/3を加えることによって、式(1)を横断積分する際、 a_2 項が0となる。したがって、横断平均の河床高さは0となっている。また、 a_1 は横断平均勾配を表す。以下では、これを1次フィッティングと定義する。

図-1に示した2つの横断測線A,Bについて、図-3に横断面形状を黒線で、その1次フィッティング結果を赤線で示す。2測線いずれについても、高次のモード分の差異が若干残るものの、横断面の特徴を概略的に表現できている。

次に、周期境界を適用した一次元計算のため、係数 $a_i(i=1,2)$ について、縦断方向にフィッティングを行い、周期関数化する。以下では、これを2次フィッティングと定義する。まず、幾何的な意味が比較的明確な a_1 の1次フィッティングによる縦断分布を図-4の黒線に示す。縦断分布について、 a_1 は蛇行長と同一の波長の周期関数で近似できるように見受けられる。三角関数での近似を適用した2次フィッティング結果を、図-4の赤線に示す。黒線の縦断分布を良好に近似できている。

a_2 の縦断分布を図-5の黒線に示す。 a_1 が0に近い値となる $s=0.6[\text{m}]$ と $s=1.7[\text{m}]$ 付近を除くほぼすべての s について $a_2 > 0$ となっている。これは、(1)で述べた横断河床形状が上に凸になるという性質を示す。つまり、 a_2 は a_1 との連動性が高い係数である。ただし、 a_2 は a_1 および蛇行長に対して倍振動の周期関数である。一次元での表現を単純化するため、 a_2 と a_1^2 の相関を取ることににより、 a_2 の2次フィッティングを a_1 の関数として表す。

a_1^2 の縦断分布を図-5に青線で示す。両者は比較的類似した分布形を示すが、わずかに位相差を持つことが見て取れる。ここで、両者の相互相関係数を取り、それが最大値を取る s を位相のずれ s_0 とすると、 $s_0=0.06[\text{m}]$ となる。このときの相関係数は0.934である。

縦軸に $a_2(s)$ 、横軸に $\{a_1(s-s_0)\}^2$ を取ってプロットし、図-6に赤色の点で示す。図-6の近似直線式から

表-1 蛇行実験水路の諸元

最大蛇行角 θ_0	蛇行長 L	水路幅 B	河床材料中央粒径 d	平均河床勾配 I_{s0}	流量 Q
30°	2.2[m]	0.3[m]	0.43[mm]	0.0141	0.75[l/s]

図-1 蛇行実験水路での平衡河床形状

図-2 半蛇行長ごとに平均化した平衡河床形状

図-3 横断面形状フィッティングの一例

図-4 a_1 の縦断分布とその2次フィッティング

図-6 位相差を考慮した a_2 と a_1^2 の関係

図-5 a_2 と a_1^2 の縦断分布

図-7 a_2 の2次フィッティング

図-8 周期関数化された平衡河床形状

$$a_2(s) = 17.47 \{a_1(s - 0.06)\}^2 \quad (2)$$

という式で表される。簡単な式形にもかかわらず、概ね良い相関が取れているため、式(2)を利用して a_2 の2次フィッティングを行う。

式(2)による、 a_2 の2次フィッティング結果を図-7の赤線に示した。黒線とは位相のずれが残っている。ここで、改めて相関係数が小さくならない範囲で、図-7の位相を良く表現できる値を取ることを試みた。このとき、 $s_0=0.023[\text{m}]$ であり、相関係数は0.911である。

結果を図-6、図-7に青色で示した。確かに位相のずれは小さくなっているが、一方で明らかに式(2)のデータの方が図-6の相関は強い。この点はこのフィッティング手

法の限界であると解釈し、本研究では、式(2)を採用することとした。

図-4と図-7で2次フィッティングを行った $a_i(i=1,2)$ から求められる河床形状の平面分布を図-8に示す。2段階のフィッティングにより、堆積箇所の分布が中央に伸びることなどの情報は失われるものの、一次元モデルでの計算に適合した河床地形が得られた。

3. 平衡河床形状における主流シフトの解析

(1) 河床形状の変更を考慮したモデル化

図-8に示した河床地形の条件下で、石川・劉⁹⁾の一次

元モデルにより流況を求める． (s, n) 座標系での運動方程式と連続式は式(3)～(5)の通りである．

$$\frac{1}{1+\sigma n} u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\sigma}{1+\sigma n} uv \quad (3)$$

$$= -\frac{1}{1+\sigma n} g \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{1+\sigma n} g I_s + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{1+\sigma n} u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial n} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\sigma}{1+\sigma n} u^2 \quad (5)$$

$$= -g \frac{\partial h}{\partial n} + \frac{1}{1+\sigma n} g I_n + \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\frac{1}{1+\sigma n} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\sigma}{1+\sigma n} v = 0$$

ここに， (u, v, w) ：それぞれ s, n, z 方向の流速， σ ：水路中心軸の曲率， h ：水深， g ：重力加速度， (I_s, I_n) ：それぞれ s, n 方向の水路床勾配， ε ：鉛直方向渦動粘性係数である．

石川・劉のモデルでは，流速 (u, v) および水深 h について，

$$u = u_0 \{1 + \beta_1(\xi)\eta\} \{\phi(\xi) + \beta_2(\xi)\psi_1(\xi)\} \quad (6)$$

$$v = u_0 \{\beta_3(\xi)\psi_2(\xi) + \beta_4(\xi)(1 - \eta^2)\phi(\xi)\} \quad (7)$$

$$h = H_0 \{1 + \beta_5(\xi)\eta\} \quad (8)$$

と仮定し，一次元化している．ここに， u_0 ：断面平均流速， H_0 ：横断平均水深， $\xi = s/b$ ， $\eta = z/h$ ， ϕ ：直線流路における流速分布， ψ_1, ψ_2 ：2次流によって生じる流速分布である． $\beta_i (i=1, 2, \dots, 5)$ は未知変数であり，物理的な意味は表-2に示す通りである．

表-2 各変数の物理的意味

変数	変数の物理的意味
β_1	主流速の横断方向勾配
β_2	鉛直方向の流速一様化
β_3	二次流強度
β_4	横断方向への全層的偏り
β_5	水深の横断方向変化率

図-9 水深および鉛直平均流速の平面分布

図-10 実験水路における鉛直平均流速の分布

本モデル計算において変更すべき式は，式(8)である．横断河床形状を式(1)で表される2次関数に変更しているため，一次元化する際の積分領域となる横断面も変化する．そこで，水深 h に関して， a_2 項の追加に対応する補正項が必要となる．これを含めると，本モデルでの水深 h の式は，

$$h = H_0 \left\{ 1 + \beta_5(\xi)\eta + \frac{b}{H_0} a_2(s) (\eta^2 - 1/3) \right\} \quad (9)$$

となる． a_2 は式(2)で示される a_1 の関数である．式(6),(7),(9)を式(3)～(5)に代入し，各 β_i に対応する重み関数を掛けて断面積分を行い，方程式を導出する．導出の詳細な手順については，石川・劉の文献を参照されたい．

(2) 計算結果

本モデルでの計算結果について，鉛直平均流速および水深の横断分布を求め，可視化したものを図-9に示す．また，長谷川の実験において，河床が平衡状態に達した段階での鉛直平均流速の平面分布を図-10に示す．主流シフトによって流線が外岸側へ向かう傾向を持っている点，およびそれが慣性による位相の遅れを持つ点については，大局的に表現できていることが示されている．

図-11に β_1 の縦断分布を示す．実験データについては，横断方向に直線近似して求めた β_1 ，およびそれを三角関数によりフィッティングしたものを破線で示した．計算結果と実験データの位相差は1/15蛇行長に対応する 24.5° であり，十分とはいえないが概ね良好な結果と言える．従って，このモデルに流砂式を組み込むことで，河床形状の変化を概略的に描けることが期待される．

4. 河床形状の発達に関する計算

(1) 一次元モデルによる地形変化の表現方法

本論文において， z_0 は式(1)および式(2)により，実質的

図-11 β_1 の縦断分布

に a_1 の1変数のみによって一次元化されている．ここでは，流砂の連続式から， a_1 の時間変化 $\dot{a}_1$ を求める計算を組み込み，それと前章で議論した流れの計算とを交互に繰り返すことにより，河床形状の発達過程を一次的に表現することを試みた．

流砂の連続式の本来の式形は，式(10)に示すとおりである．

$$(1+\sigma n) \frac{\partial z_0}{\partial t} = -\frac{1}{1-\lambda} \left\{ \frac{\partial q_s}{\partial s} + \frac{\partial(1+\sigma n)q_n}{\partial n} \right\} \quad (10)$$

ここに， λ :粒子の間隙率， (q_s, q_n) はそれぞれ s, n 方向の流砂量である．右辺は流砂量の二次元発散を示しており，負号は発散が正となる箇所河床の高さが低下し，負となる箇所では上昇することを意味している．

式(10)を一次元化する方法として，石川・劉による流れの計算と同様に，重み関数を掛けて横断方向に積分し， a_1 に対応する方程式を導出することが考えられる．

しかしながら，後に示す通り，流砂式は分数関数を含むため，その積分は単純な関数形で表すことができない．その一方で， a_1 の変化を示す際に必要なファクターは，変数 β_1 に対応する主流シフトに起因する q_s の横断偏差量，および横断方向流れを表す変数 β_3 と β_4 に起因する流砂量 q_n である．

本研究では以下のような手法を利用し，それらの効果を単純化して表すこととした．縦断中心線を境界として水路を横断方向に2分割し，それぞれの領域における流砂量の収支を求めることにより， $\dot{a}_1$ を計算する．このとき， n 方向の流砂の輸送に関しては，両端に壁境界を適用し，水路中心軸を跨ぐ輸送量のみを考慮する．概念図を図-12に示す．図-12の右岸側，左岸側での流砂量の収支は，それぞれ

$$\int_{-1}^0 (1+b\sigma\eta)(-\dot{a}_1 b \cdot \eta) d\eta = -Q_r \quad (11)$$

$$\int_0^1 (1+b\sigma\eta)(-\dot{a}_1 b \cdot \eta) d\eta = -Q_l \quad (12)$$

$$Q_r = \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\partial q_{sr}}{\partial s} + \frac{q_n}{b} \right), Q_l = \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\partial q_{sl}}{\partial s} - \frac{q_n}{b} \right)$$

と表される．式(11),(12)から $\dot{a}_1$ を計算し，各横断面について，時間陽解法により次ステップの a_0 と a_1 を求める．

流砂量の計算は，芦田・道上¹¹⁾の式(13)を用いる．

図-12 流砂計算の概念図

$$q_* = 17\tau_*^{1.5} \left(1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau_*} \right) \left(1 - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}} \right) \quad (13)$$

ここに， q_* :無次元流砂量($=q/\sqrt{R_0 g d^3}$)， τ_* :無次元掃流力($=\tau/R_0 \rho g d$)である． R_0 は土粒子の水中相対比重であり，1.65としている．また， τ_{*c} は無次元限界掃流力で，ここでは0.05で一定とする．

τ_* は式(14)から計算する．

$$\tau_* = \left(\frac{\tau_{*s}}{\tau_{*n}} \right) = k_1 \left(\frac{f u_b \sqrt{u_b^2 + v_b^2}}{f v_b \sqrt{u_b^2 + v_b^2}} \right) + k_2 \left(\frac{R_0 g \cdot I_s}{R_0 g \cdot I_n} \right) \quad (14)$$

ここに， g :重力加速度， u_b, v_b は底面流速の s 方向および n 方向成分， f は摩擦係数である．式(14)の右辺第一項が河床に作用する流体力，第二項が重力の効果を表している．実際の河床形状はフィッティングを施したそれと比較して，局所的な洗掘により勾配が大きくなっている箇所が生じる．このため，実際の重力の影響は，モデル化された河床形状で計算するものよりも大きくなる．この効果を流体力との比率で考慮し，その逆比を有効応力に関する補正係数 k_1 として流体力に乘じることとした．本計算においては， $k_1=0.44$ としている． k_2 は砂粒の体積と水流に触れる面積の比で， $2d/3$ である．なお，式(14)における u_b, v_b の計算において，前述の a_1 の変化を示す際に必要なファクターに含まれない変数 β_2 の影響は無視している．

図-13に平衡河床地形のコンターを示す．図-2および図-8と比較して，最大洗掘深については概ね一致するものの，位相についてはやや大きな差が存在する．

(2) 位相差の修正

(1)では流砂の計算に芦田・道上の式を用い，横断方向に2分割したコントロールボリュームにおける流砂の連続式を解いた．芦田・道上の式は直線的な水路についての式として導出されているものである．それに対し，蛇行水路に関しては，長谷川の実験に見られるように，曲率と流砂による地形変化の間に位相差が存在することが知られている．(1)の計算結果ではこの位相差が過小評価されているため，ここでは次のようにしてそれを補正することを試みた．

計算に利用する位相差の補正式は，

図-13 蛇行発達計算によって求められた平衡河床

図-14 a_1 の時間発展

図-15 蛇行発達計算によって求められた平衡河床(位相差修正)

$$\frac{\partial q_s}{\partial s} = C(q_{s0} - q_s) \quad (15)$$

ここに、 q_{s0} : 芦田・道上の式から計算される流砂量、 q_s : 補正後の流砂量である。Cは位相の遅れを示す係数であり、長さの逆数の次元を持つ。ここでは試行錯誤により、 $C=1/0.04$ とした。この0.04[m]という値は、図-12と図-8における位相差の1/5に対応する。

計算による a_1 の振幅の時間発展を図-14に赤線で示す。黒線は実験平衡河床のフィッティング値である。

$T=4500[s]$ において、河床形状はほぼ平衡状態となっており、振幅の大きさがよく一致している。

図-15に平衡河床地形のコンターを示す。最大洗掘深の一致度はほぼ変わらず、位相が図-2とより類似した結果が得られた。

5. おわりに

本論文では、蛇行河川における河床形状の発達を一次的に表現するモデルの構築を目的とし、移動床水路における平衡河床のフィッティング方法について議論を行った。また、フィッティングした平衡河床の条件下で主流シフトの計算を行い、これに一次元化した流砂の計算を組み込むことにより河道形状の発達過程の再現を試みた。主要な結論を以下に示す。

- 1) 長谷川の移動床蛇行水路における平衡河床の横断形状が、2次関数形で概ね近似出来ることを示した。また、横断平均勾配 a_1 と2次偏差係数 a_2 の関係について、 a_2 と a_1^2 の間に位相差を持った相関があることを示した。
- 2) 石川・劉の一次元モデルに、2次関数形の横断形状に対応する改良を行った。計算結果について、水深の浅い箇所では流速分布に大きな差異が見られたものの、主流シフトに関しては大局的に水路実験結果と一致する計算結果が得られた。
- 3) 一次元化した流れと流砂の交互計算ルーチンを構築した。平衡状態における河床の横断勾配の分布について、最大洗掘深は実験結果と概ね一致する計算結果となった。しかし、曲率と横断勾配の位相差に関しては十分に表現できなかった。
- 4) 主流方向の流砂量 q_s に関して、流砂の非平衡性を導

入して計算を試みた。試行錯誤により、位相の遅れを示す係数Cを位相差の1/5から決定することで、実験結果と比較的良好に一致する結果が得られた。

本計算は一次元モデルによるものであり、蛇行によるマクロな視点での河床形状の発達を描くことができる。

ただし、現状では解析に多くの仮定を含むため、異なる蛇行水路においての計算結果を分析し、それらの仮定の妥当性を検証することが必要である。

参考文献

- 1) L.B. Leopold and M.G. Wolman: River Meanders, *Geol. Soc. Am. Bull.*, Vol.71, pp.769-794, 1960.
- 2) Hickin, E.J. and Nanson, G.G.: The Character of Channel Migration on the Beaton River, Northeast British Columbia, Canada. *Geol. Soc. Am. Bull.*, Vol.86, pp.487-494, 1975.
- 3) Friedkin, J.K.: A laboratory study of the meandering of alluvial rivers, *U.S. Army Corps of Engineers Waterways Experiment stations, Vicksburg, MS, USA*, 1945.
- 4) 芦田和男, 村本嘉雄, 奈良井修二, 塩入淑史: 河道の変動に関する研究(1), 京大防災研究所年報第13号B, pp.243-260, 1970.
- 5) 例えば, Dong Chan and Jennifer G. Duan: Case Study: Two Dimensional Model Simulation of Longitudinal and Lateral Channel Migration Processes in West Jordan River, Utah. *J. Hydraul. Eng.* Vol.134, No.3, pp.315-327, 2008.
- 6) Ikeda, S., Parker, G. and Sawai, K.: Bend theory of river meanders, Part 1. Linear development, *Journal of Fluid.Mech.*, Vol.112, pp.363-377, 1981.
- 7) Engelund, F.: Flow and bed topography in channel bends, *Journal of Hydraulic Division, Proc. ASCE*, Vol.100, pp.1631-1648, 1974.
- 8) 長谷川和義: 蛇曲水路における流れと平衡底面形状に関する研究, 土木学会論文報告集, No.338, pp.105-114, 1983.
- 9) 石川忠晴・劉暢: 河川横断方向の主流シフトの一次元モデル化に関する研究, 土木学会論文集B1, Vol.69, No.1, pp.60-70, 2013.
- 10) 石川忠晴・金舜範: 湾曲部の二次流に関する基礎的研究, 土木学会論文集, No.375/II-6, pp.143-149, 1986.
- 11) 芦田和男, 道上正規: 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 206号, pp.59-69, 1972.

(2013. 9. 30受付)