砂州が誘起する擬似蛇行現象

Quasi-meandering induced by fluvial sand bars

Md Jahir UDDIN¹・泉 典洋²・長谷川和義³・Adichai PORNPROMMIN⁴
Md Jahir UDDIN, Norihiro IZUMI, Kazuyoshi HASEGAWA and Adichai PORNPROMMIN

¹ 学生会員 MS 北海道大学大学院工学院 環境フィールド工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)

² 正会員 PhD 北海道大学教授 工学研究院環境フィールド工学部門 (同上)

³ 正会員 工博 北開水工コンサルタント株式会社 先端技術開発センター (〒060-0005 札幌市中央区北 5 条西 6 丁目 2 番地 2 札幌センタービル 11 階)

⁴ 正会員 D.Eng. Dept. Water Resour. Eng. Kasetsart Univ. (50 Phaholyothin Rd., Jatujak, Bangkok, 10900, Thailand)

Linear stability analysis of the formation of fluvial sand bars with bank erosion is performed with the use of St. Venant shallow water equations and continuity equation, and a process-based bank erosion model. The process-based bank erosion model is derived from the integration of sediment continuity equation in the bank region. The time variation of bank location is proportional to the lateral sediment transport rate at the junction between bed and bank regions, which is evaluated by the lateral sediment transport rate in the bank region. and the time variation of the bed elevation at the junction. It is found from the analysis that quasi-meandering with the wavelength slightly shorter than bars takes place with the formation of bars in the range of moderately large aspect ratios.

Key Words: fluvial sand bars, meandering, bank erosion model, linear stability analysis

1. はじめに

真直ぐであった河道が時間の経過とともに曲がりくねった河道となる蛇行現象は、河川の移動床現象の中でも最も興味深い現象として数々の研究が行われてきた。木下^{1,2)}は膨大な数の河川の空中写真の分析から、交互砂州の形成が蛇行の引き金となることを示唆している。図-1 にその概念図を示す。交互砂州の形成によって砂州前縁部の下流に水衝部が発生する (a)。水衝部では側岸侵食が発生し (b)、それが蛇行の発達につながる (c) というプロセスである。

一方、理論的な研究も数多く行われている。河道の平面形状に微小なサイン型の擾乱が与えられると河道の曲率によって外岸側への流れの偏奇が生じ、外岸側の侵食と内岸側の堆積が生じ、蛇行は更に発達する。このような平面不安定現象として蛇行を捉え、線形安定解析によって蛇行の発生機構を初めて力学的に説明したのは Ikeda, Parker, Sawai³⁾であった。その後、土砂の連続式を満足する条件から砂州との相互作用や共鳴現象の影響を取り入れたり⁴⁾、蛇行による二次流の影響を取り入れたりした線形安定解析⁵⁾が行われている。

これらの理論によれば蛇行の発達と砂州の形成とは相互に作用し合うものの、蛇行が河道平面形状の曲率に起因した不安定現象であるのに対して、砂州は流れと河床の間に発生する界面不安定現象であって、基本的には別個の現象であることになる。全ての蛇行がこれらの理論で説明されるものであるとするならば、木

図-1 砂州の形成が蛇行を引き起こすプロセスの概念図。

下が観察した砂州を起源とする蛇行の発達はどうか理解すれば良いのだろうか。

蛇行現象の全てが河道の曲率によって発生する平面不安定現象ではなく、砂州が起因する蛇行現象も存在するのではないか、そのような考え方から本研究では、砂州が誘起する河川の蛇行現象について、新たな側岸移動モデルを用いて線形安定解析を行う。曲率が起因する従来の蛇行現象が短絡に至るほどの大きな蛇行度まで発達することが明らかになっているのに対して、砂州が起因する蛇行がどこまで発達するか未知であることから、ここでは砂州が起因する蛇行現象を「擬似蛇行現象」と呼ぶことにする。

図-2 水路の概念図と座標系。

2. 流れと河床変動

本論文では、図-2 に示すような、砂州の形成と同時に側岸侵食が生じるような場合の線形安定性について考える。線形安定解析の範囲では、砂州と側岸侵食の流下方向スケールは同じであると考え、流れは次の浅水方程式を用いて表されたとする。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -F^{-2} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x} \right) - \beta \frac{T_{bx}}{H} \quad (1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -F^{-2} \left(\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right) - \beta \frac{T_{by}}{H} \quad (2)$$

$$\frac{\partial UH}{\partial x} + \frac{\partial VH}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここで x および y はそれぞれ流下方向および横断方向の座標、 U および V はそれぞれ流速の x および y 方向成分、 H および Z はそれぞれ水深および河床高さ、 T_{bx} および T_{by} は底面せん断力のそれぞれ x および y 成分である。上式では、摂動を与える前の川幅 $\tilde{B}$ および等流流速 $\tilde{U}_n$ 、等流水深 $\tilde{H}_n$ を用いて、 $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{B}(x, y)$ 、 $(\tilde{U}, \tilde{V}) = \tilde{U}_n(U, V)$ 、 $(\tilde{H}, \tilde{Z}) = \tilde{H}_n(H, Z)$ 、 $(\tilde{T}_{bx}, \tilde{T}_{by}) = \rho \tilde{U}_n^2 (T_{bx}, T_{by})$ という無次元化を行っており、 F は Froude 数 $(= \tilde{U}_n / \sqrt{g \tilde{H}_n})$ 、 β はアスペクト比 $(= \tilde{B} / \tilde{H}_n)$ である。また $\sim$ は次元量を表し、 $\sim$ のないものは対応する無次元量を表している。さらに、河床形状や側岸位置の時間変化に比較して流れの時間変化は十分に早く、瞬時に平衡状態に達するため、流れの非定常項が無視できるとする準定常の仮定を用いていることに注意する。底面せん断力の x および y 方向成分 T_{bx} および T_{by} は次式で表されたとする。

$$(T_{bx}, T_{by}) = T_b(U, V) (U^2 + V^2)^{-1/2} \quad (4)$$

ここで T_b は全底面せん断力であり、次式で表されたとする。

$$T_b = C_f (U^2 + V^2) \quad (5)$$

ここで C_f は底面摩擦係数であり、相当粗度高さに対する相対水深の弱い関数となることが知られているが、ここでは簡単のために定数と仮定する。

河床高さの時間変化は次式で表される。

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q}_b = 0 \quad (6)$$

ここで $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ であり、 $\mathbf{Q}_b$ は無次元の掃流砂ベクトルである。無次元掃流砂ベクトル $\mathbf{Q}_b$ は流砂の方向と x 軸との為す角 ϕ を用いて次式で表される。

$$\mathbf{Q}_b = (Q_{bx}, Q_{by}) = Q_b (\cos \phi, \sin \phi) \quad (7)$$

ここで Q_b は $(R_s g \tilde{d}_s^3)^{1/2}$ で無次元化した全掃流砂量であり、 R_s は土粒子の水中比重 $(= 1.65)$ 、 g は重力加速度 $(= 9.8 \text{ m/s}^2)$ 、 $\tilde{d}_s$ は土粒子の粒径である。

Parker ら⁸⁾ は、横断方向に勾配を有する場合 Bagnold 仮説が成立しなくなるとして、底面上の粒子に働く力の釣り合いから任意の勾配に適用可能な掃流砂量式を提案している。彼らの提案した式はベクトル形式で書かれており、掃流砂量を Explicit に表すことができないため解析に用いるには不便である。そこでここでは勾配が小さいとして線形化した次式を用いることとする。

$$Q_b = K (\theta - \theta_c) (\theta^{1/2} - 0.7\theta_c^{1/2}) \quad (8a)$$

$$\sin \phi = \frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}} - \frac{r}{\beta \theta^{1/2}} \frac{\partial Z}{\partial y} \quad (8b)$$

ここで K は定数で 7.67、 θ は無次元せん断力であり、有次元のせん断力 $\tilde{T}_b$ を用いて $\tilde{T}_b / (\rho R_s g \tilde{d}_s)$ と定義される。また θ_c は無次元の限界せん断力であり 0.047 の定数と仮定する。ここで r は通常 0.3–0.5 の値を取る定数である。Parker らの提案式では勾配が小さい場合、従来用いられている $\sin \phi$ の式とほぼ同じ形をしている。

3. 境界条件

いま側岸の位置は時間的に変化すると仮定し、右岸および左岸の y 座標をそれぞれ R および L で表す。流れは側岸を通り抜けられないとすると、流速の側岸に対する法線方向成分はゼロとならなければならない。すなわち次式が成立する。

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_{NR} = 0 \quad \text{at } y = R \quad (9)$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_{NL} = 0 \quad \text{at } y = L \quad (10)$$

ここでは浅水方程式の場合と同様に準定常の仮定を用いていることに注意する。上式中の $\mathbf{U}$ は流速ベクトル $(= (U, V))$ である。また $\mathbf{e}_{NL}$ および $\mathbf{e}_{NR}$ はそれぞれ左岸および右岸に対する単位法線ベクトルであり次のように表される。

$$\mathbf{e}_{NL} = \frac{(-\partial L / \partial x, 1)}{\sqrt{1 + (\partial L / \partial x)^2}}, \quad \mathbf{e}_{NR} = \frac{(-\partial R / \partial x, 1)}{\sqrt{1 + (\partial R / \partial x)^2}} \quad (11a, b)$$

側岸が移動しない場合、側岸部を通過する土砂輸送量はゼロとなるが、侵食や堆積によって側岸が移動す

$$q_{L,j} = K(\theta - \theta_n) \left(\theta^{1/2} - 0.7\theta_n^{1/2} \right) \left(\frac{V}{U^2 + V^2} + \frac{r}{\beta\theta^{1/2}} S_L \right) \Bigg|_{n=n_L} \quad (21)$$

ここで河床部での横断方向流砂量式における θ_c の代わりに θ_n が用いられている。掃流砂が主である礫床河川では、勾配を有する側岸部上の土砂が移動すると重力によって斜面下方に引っ張られるため側岸侵食が生じる。したがって側岸侵食が生じない平衡状態では側岸部のせん断力は移動限界以下でなくてはならない。Parker⁹⁾ および Ikeda and Izumi¹⁰⁾ によれば、河床部中央の底面せん断力は限界せん断力の 1.23 倍であり、側岸部と河床部の接合点で丁度限界せん断力が実現している。ここではそのメカニズムを簡易的に取り入れるために、側岸部上では底面せん断力が河床部上の底面せん断力以上になって初めて土砂移動が始まるとし、限界せん断力 θ_c の代わりに河床部での底面せん断力 θ_n を用いる。

5. 摂動展開

全ての変数を基本状態とそれに対する摂動の和として表す。摂動をサイン型の形状と仮定し、その振幅を A 、波長および複素周波数を k および ω として次のような摂動展開を導入する。

$$(U, V, H, Z, R, L) = \left(1, 0, 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) + A(U_1, V_1, H_1, Z_1, R_1, L_1) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (22)$$

上式を式 (1)–(3), (6) に代入して A について線形化すると $O(A)$ において次の方程式が得られる。

$$(ik + 2\beta C_f) U_1 + (ikF^{-2} - \beta C_f) H_1 + ikF^{-2} Z_1 = 0 \quad (23)$$

$$(ik + \beta C_f) V_1 + F^{-2} \frac{dH_1}{dy} + F^{-2} \frac{dZ_1}{dy} = 0 \quad (24)$$

$$ikU_1 + ikH_1 + \frac{dV_1}{dy} = 0 \quad (25)$$

$$-i\omega Z_1 + C_u U_1 + C_v \frac{dV_1}{dy} + C_z \frac{\partial^2 Z_1}{\partial y^2} = 0 \quad (26)$$

ここで $C_{u,v,z}$ は複雑な形をしており、スペースの都合上ここでは表記を省略する。

境界条件 (9) および (10), (12) および (13) から次式が得られる。

$$ikR_1 = V_1(-1/2) \quad (27)$$

$$ikL_1 = V_1(1/2) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} 7.7(\theta_n - \theta_c) \left(\theta_n^{1/2} - 0.7\theta_c^{1/2} \right) \left(V_1(1/2) - \frac{r}{\beta\theta_n^{1/2}} \frac{dZ_1}{dy} \Bigg|_{y=1/2} \right) \\ = - \frac{4.6rS_R\theta_n U_1(1/2)}{\beta M_R} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} 7.7(\theta_n - \theta_c) \left(\theta_n^{1/2} - 0.7\theta_c^{1/2} \right) \left(V_1(-1/2) - \frac{r}{\beta\theta_n^{1/2}} \frac{dZ_1}{dy} \Bigg|_{y=-1/2} \right) \\ = - \frac{4.6rS_R\theta_n U_1(-1/2)}{\beta M_L} \end{aligned} \quad (30)$$

側岸侵食モデル (18) および (19) から次式が得られる。

$$-i\omega R_1 - \frac{4.6rS_R\theta_n U_1(1/2)}{\beta M_{R0}} + \frac{i\omega}{\beta S_R} Z_1(1/2) = 0 \quad (31)$$

$$-i\omega L_1 - \frac{4.6rS_L\theta_n U_1(-1/2)}{\beta M_{L0}} + \frac{i\omega}{\beta S_L} Z_1(-1/2) = 0 \quad (32)$$

ここで M_{R0} および M_{L0} は平坦床基本状態における河道部と側岸部の接合点 (それぞれ $y = 1/2$ および $-1/2$) における底面から河岸までの高さであり、ここでは平坦床基本状態における水深 ($H_0 = 1$) に等しいとする。

6. 解法

式 (23)–(26) は U_1 および V_1, H_1, Z_1 の 4 つの変数に関する常微分方程式であるが、 U_1 について 0 次、 V_1 および H_1 について 1 次、 Z_1 について 2 次の微分を含む。したがってこれらは 4 次の線形斉次常微分方程式である。一方、境界条件および側岸侵食式 (27)–(32) は R_1 および L_1 の更に 2 つの未知数を含む 6 つの線形斉次境界条件である。式 (23)–(32) は ω を固有値とする線形の固有値問題を構成している。

これらは定係数の線形微分方程式系であるが、解析的に固有値 ω を求めるのは難しい。著者らは非常に簡略化した側岸侵食モデルを用いて同様の問題を解いているが、その際モデルに現れる側岸侵食係数を微小パラメータとして用いて漸近展開を行い、固有値を解析的に導いている¹¹⁾。物理プロセスを考慮したより詳細な側岸侵食モデルを取り入れた本解析では、明瞭な微小パラメータが存在しないため同様の漸近展開を用いた解析手法を用いることはできない。そこでここでは、Chebyshev 多項式展開を用いた spectral collocation 法を用いて固有値問題を解くことにする。

境界条件から R_1 および L_1 を消去すると境界条件は 6 つから 4 つへと減少し、問題は U_1 および V_1, H_1, Z_1 4 つの変数に関する 4 階の常微分方程式系に帰着する。これを 4 つの境界条件の下で解く。

各変数を次のように Chebyshev 多項式展開する。

$$U_1(y) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(2y), \quad V_1(y) = \sum_{n=N+1}^{2N+1} a_n T_n(2y), \quad (33a, b)$$

$$H_1(y) = \sum_{n=2N+2}^{3N+2} a_n T_n(2y), \quad V_1(y) = \sum_{n=3N+3}^{4N+3} a_n T_n(2y), \quad (33c, d)$$

上式を支配方程式 (23)–(26) に代入し、次の $N+1$ 個の Gauss-Lobatto 点において評価する。

$$y_i = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi i}{N} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (34)$$

すると $4(N+1)$ 個の未定係数 a_n を含む $4(N+1)$ 個の代数方程式が得られる。その内、 $y = \pm 1/2$ 近傍における 4 つの代数方程式を境界条件から得られる 4 つの代数方程式で置き換えると次のような線形代数方程式系

図-4 擾乱の増幅率 $\text{Im}[\omega]$ の k - β 平面上におけるコンター図。点線は側岸侵食を考慮しない場合、実線は側岸侵食を考慮した場合。 $F = 0.5$, $C_f = 0.01$, $r = 0.3$, $\theta_c = 0.05$, $\theta_n = 0.06$, $M_{R0} = M_{L0} = 1$, $S_R = S_L = 0.5$.

が得られる。

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (35a)$$

ここで

$$\mathbf{L} = [L_{ij}] \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, N+1) \quad (35b)$$

$$\mathbf{U} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{4N+4})^T \quad (35c)$$

ここで L_{ij} についてはスペースの関係上省略する。

式 (35a) が解を持つためには次の可解条件が満足されなければならない。

$$|\mathbf{L}| = 0 \quad (36)$$

$\mathbf{L}$ は ω , k , β 等をパラメータとして含むことから、上式を ω について解くと次のような形の解が得られる。

$$\omega = f(k, \beta; F, \theta_n, S_R, S_L) \quad (37)$$

ここで得られた ω の虚部 ($\text{Im}[\omega]$) が擾乱の増幅率に相当する。次節では主に $\text{Im}[\omega]$ の波数 k およびアスペクト比 β による変化について調べる。

7. 結果と考察

図-4 に解析によって得られた $\text{Im}[\omega]$ の k - β 平面上におけるコンターを示す。両側岸部の横断勾配 S_R および S_L をどちらも 0.5 とした。また他の変数については $F = 0.5$, $C_f = 0.01$, $r = 0.3$, $\theta_c = 0.05$, $\theta_n = 0.06$, $M_{R0} = M_{L0} = 1$ としている。図中の点線は側岸侵食を考慮しない砂州の線形安定解析の結果であり、実線が側岸侵食を考慮した本解析の結果である。コンターの上の数字は擾乱の増幅率を示している。コンターがなめらかな曲線と

図-5 擾乱の増幅率 $\text{Im}[\omega]$ の k - β 平面上におけるコンター図。点線は側岸侵食を考慮しない場合、実線は側岸侵食を考慮した場合。 $F = 0.5$, $C_f = 0.01$, $r = 0.3$, $\theta_c = 0.05$, $\theta_n = 0.06$, $M_{R0} = M_{L0} = 1$, $S_R = S_L = 1$.

なっておりところどころで凹んだ部分を持つのは、複数の横断方向波数（砂州のモード）のコンターが重なり合っているからである。数値解析では ω を横断方向波数毎に分離することができず虚部を最大にする ω のみを抽出している。

0 に相当する実線のコンターが存在しないのは、側岸侵食の影響を取り入れると全領域において値自体は極小さいが $\text{Im}[\omega]$ が正となるからである。側岸侵食を考慮しない場合、アスペクト比の小さい領域や波数の大きい領域では平坦床は安定であった。それに対して側岸侵食を考慮すると、平坦床が安定な領域は消失し、臨界アスペクト比が存在しなくなることが分かる。一方、アスペクト比のやや大きい領域では、擾乱の増幅率 $\text{Im}[\omega]$ が 0.01 および 0.02 の実線のコンターが破線のコンターに比較して波数の小さい方に移動していることが分かる。これは、波数 2 から 4 付近では、側岸侵食の影響によって河床が安定化していることを意味している。前述のより簡便な側岸侵食モデルを用いた著者らの解析では側岸侵食によって河床が不安定となる、全く逆の結果が得られている。

本解析で用いた物理プロセスを考慮した側岸侵食モデルでは側岸侵食が河床の安定性を増加させるという結果になった。この原因は、簡便なモデルには含まれない式 (16) および (17) に含まれる $\partial Z / \partial t_{n=n_R, n_L}$ の項である。これによって側岸近傍で河床低下が生じると側岸侵食を抑制する働きを持つ。逆に側岸侵食が生じても側岸近傍の河床の深ぼれは抑制されることになる。これによって河床の安定性が増大したと考えられる。

図-5 は両側岸部の横断勾配をより急な $S_R = S_L = 1$ とした図である。図-4 と比較すると違いはそれほど大

図-6 $\beta = 20$ の時の増幅率 $\text{Im}[\omega]$ の波数 k による変化. 実線は側岸侵食を考慮した場合, 破線は側岸侵食を考慮しない場合. 計算条件は図-4 と同じ.

図-7 $\beta = 30$ の時の増幅率 $\text{Im}[\omega]$ の波数 k による変化. 実線は側岸侵食を考慮した場合, 破線は側岸侵食を考慮しない場合. 計算条件は図-4 と同じ.

きくないが, アスペクト比の大きい領域で実線のコンターは破線と比べて若干波数の小さい方向に移動している. 側岸部の横断勾配が大きくなると河床部・側岸部接続点での土砂輸送量が増加する. これによって側岸侵食が河床を安定化させる効果がより大きくなったものと考えられる.

図-6 および 7 はそれぞれ $\beta = 20$ および 30 の場合について擾乱の増幅率 $\text{Im}[\omega]$ の k による変化を示したものである. 図中破線が側岸侵食を考慮しない場合, 実線が考慮した場合である. 側岸侵食の影響を考慮するといずれも波数の大きい領域で増幅率が若干減少し, それに伴って増幅率を最大にする卓越波数も小さくなっていることが分かる. 特に $\beta = 20$ の場合, 卓越波数は 1.6 程度から 1.1 程度に減少している. これは波長にすると 45 % も大きくなることを意味している.

一方, $\beta = 30$ では卓越波数は 1.8 から 1.5 程度に減少している. これは 20 % の波長の増加に対応している. アスペクト比が増加するにつれて側岸侵食の影響は小さくなっていく. これは側岸侵食式 (18) および (19) の右辺が分母にアスペクト比を持つからであろう.

解析の結果, 砂州の発生と同時に側岸侵食が生じるような不安定が広い範囲で生じることが明らかとなった. この砂州が引き金となる側岸侵食は, アスペクト

比がある程度小さく交互砂州が発生する領域で砂州の波長に合わせて左右交互に発生し, あたかも蛇行のような様相を呈する. これはまさに木下が観察によって見出した砂州による蛇行 (擬似蛇行) 発生のプロセスに他ならない.

8. 結論

物理プロセスをベースにした側岸侵食モデル式を用いて, 側岸侵食の影響を取り入れた砂州の線形安定解析を行った. 解析の結果によれば, 平坦床直線流路は波数-アスペクト比平面上の全領域で不安定となり, 砂州の形成を伴う側岸侵食が発生することが明らかとなった. また, 発生する不安定擾乱の波長はアスペクト比があまり大きくない領域では砂州のみの不安定の場合と比較して, 波長が 50 % 近く大きくなることが明らかとなった. このような砂州の形成に伴う蛇行様河道形状の発達, 木下が観測から見出した, 砂州が引き金となる蛇行 (擬似蛇行) である可能性がある.

参考文献

- 1) 木下良作: 河床における砂礫堆の形成について—蛇行実態の観察—, 土木学会論文集, 42 号, 1-21, 1957.
- 2) 木下良作: 石狩川河道変遷調査, 科学技術庁資源局資料第 36 号, 1961.
- 3) Ikeda, S., G. Parker, and K. Sawai: Bend theory of river meanders, part 1, Linear development, *J. Fluid Mech.*, 112, 363-377, 1981.
- 4) Tubino, M., and G. Seminara: Free-forced interactions in developing meanders and suppression of free bars, *J. Fluid Mech.*, 214, 131-159, 1990.
- 5) Johanneson, H. and G. Parker: Linear theory of river meanders, In: *River Meandering* (Eds. S. Ikeda and G. Parker), pp. 181-213, AGU, 1989.
- 6) Parker, G., Y. Shimizu, G. V. Wilerson, E. C. Eke, J. D. Abad, J. W. Lauer, C. Paola, W. E. Dietrich and V. R. Voller: A new framework for modeling the migration of meandering rivers, *Earth Surf. Process. Landforms*, 36, 70-86, 2011.
- 7) Hasegawa, K.: Universal Bank Erosion Coefficient for Meandering Rivers, *J. Hydraul. Eng.*, 115(6), 744-765, 1989.
- 8) Parker, G., G. Seminara and L. Solari: Bed load at low Shields stress on arbitrarily sloping beds: Alternative entrainment formulation, *Water Resour. Res.*, 39(7), 1183, doi:10.1029/2001WR001253, 2003.
- 9) Parker, G.: Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. 2: The gravel rivers, *Jour. Fluid Mech.*, 89, 127-146, 1978.
- 10) Ikeda, S. and N. Izumi: Width and depth of self-formed straight gravel rivers with bank vegetation, *Water Resour. Res.*, 26(10), 2353-2364, 1990.
- 11) Uddin, M. J., N. Izumi, K. Hasegawa and Y. Watanabe: Bar instability with bank erosion, 土木学会論文集 B1, 71(4), tentatively accepted.

(2014.9.30 受付)