降水量の極値特性の気候変動に伴う差異の検出 ～ 変化の現れ方の想定により生じる問題

DIFFERENCE DETECTION IN EXTREMAL POPULATIONS OF PRECIPITATION
DUE TO CLIMATE CHANGE, AND AN ACCOMPANYING PROBLEM ARIESD
IN THE NUISANCE PARAMETERS' ASSUMPTION

北野利一¹・高橋倫也²・田中茂信³

Toshikazu KITANO, Rinya TAKAHASHI, Shigenobu TANAKA

¹ 正会員 博(工) 名古屋工業大学 大学院工学研究科 准教授 (〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町)

² 工博 神戸大学 名誉教授 (〒658-0022 神戸市東灘区深江南町5丁目1-1)

³ 正会員 博(工) 京都大学 防災研究所 教授 (〒611-0011 宇治市五ヶ庄)

Two-sample problem is discussed to detect the difference between the present and future climates. Statistical test is often encapsulated in a black box in which the procedures are hidden so that it is not easy for the policymakers and the common people to comprehend it, also the researchers may not convince themselves of their conducted results by employing the abstract concept derived in mathematical sense. The test should be therefore better to be clear: the occurrence number is a kind of understandable facts, while the amount of precipitation is indirect through the return period. A simple but effective method is proposed by degree of experience in extreme value analysis, and an example is demonstrated to grasp the effectiveness.

Key Words: Degree of experience, Poisson test, Gumbel distribution, Occurrence rate, Climate change

1. はじめに

最近の降水が気候変動の影響を受けている可能性があることが世間でも話題になってきた。しかし、木本氏が指摘するように、30年に1回以下の頻度で生じるような現象は、地球が温暖化してもしなくても、相応する時間が経過すれば、いずれ生じる。それゆえに、そのための対応策は不可欠である。

その低頻度現象が過去の規模よりもさらに巨大化するかどうか、あるいは、視点を変えれば、過去と同程度の規模の現象の生起頻度が、将来に増えるのかどうか、これらの差異を検出できるものならば、その対応策の優先度も検討できるであろう。しかしながら、その検出法が、統計理論でブラックボックス化された手続きで隠蔽されて、最終的な結果だけが提示されても、対応策を論ずべき政策立案者や市民に受け入れられにくい。その意味で、検出法の良し悪しが、対応策への取組みに対する本気度も左右する点で、非常に重要と考える。

統計理論は、高度に数学的に構築される。したがって、数学的な発想が優先されがちである。このことにブラックボックス化の原因がある。しかし、応用する立場での発想を優先させると、理論がさらに難しくなり、場合によっては、数学的に解けなくなる。現実的には、両者の折り合いをつける必要がある。

極値統計理論の応用を避けては、極端事象を扱う問題は解決できない。この時、再現期間を与えて得られる確率外力を、一般に、議論の対象にする。しかし、平均量とは異なる確率外力そのものが、数学的な都合によるものであり、市民にはわかりにくい（逆に、再現期間は平均量である）。この観点から見て、気候変動による差異を、確率外力を対象に検討することが、果たして最善の策であろうか？本研究の目的は、その根本的な疑念について論じるものである。

2. 2 標本問題

(1) 正規標本に対するティ検定

2つの母集団からそれぞれ抽出された標本をもとに、これらの母集団の特性量の比較を扱う問題を2標本問題²⁾とよぶ(図-1参照)。母集団分布を正規分布と仮定して、母平均の差を検出する手法に、いわゆるティ検定が用いられる。すなわち、第1の母集団を平均 μ_A および分散 σ_A^2 の正規分布、第2の母集団を平均 μ_B および分散 σ_B^2 の正規分布として、それぞれの標本サイズを m_A および m_B とし、標本平均を $\bar{Y}_A$ および $\bar{Y}_B$ と記せば、次式が成立つ。

$$E(\bar{Y}_A - \bar{Y}_B) = \mu_A - \mu_B = \Delta\mu \quad (1)$$

$$V(\bar{Y}_A - \bar{Y}_B) = \frac{\sigma_A^2}{m_A} + \frac{\sigma_B^2}{m_B} \quad (2)$$

この時、母分散が等しい ($\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$) として、これらの母平均に差がない ($\Delta\mu = 0$) とすれば、

$$t = \frac{\bar{Y}_A - \bar{Y}_B}{\sqrt{(m_A^{-1} + m_B^{-1}) s^2}} \quad (3)$$

がティ分布に従う。ここで、共通する母分散 σ^2 の推定として、次式で与えられる s^2 を用いている。

$$s^2 = \frac{(m_A - 1)s_A^2 + (m_B - 1)s_B^2}{m_A + m_B - 2} \quad (4)$$

ここで、 s_A^2 および s_B^2 は各々の標本分散である。

以上のことから、 t の値がティ分布の裾のわずかな確率をとる範囲に入った時に、それを統計的に有意であると判断し、その差を検出するのである。

ここで問題となるのは、分散が等しいという仮定である。2つの標本の分散の比に対して、

$$F = \frac{s_A^2 / \sigma_A^2}{s_B^2 / \sigma_B^2} \quad (5)$$

がエフ分布に従うことから、統計的検定が可能である。したがって、差を検出するためのティ検定に先立って、等分散の確認のためにエフ検定を行うのが一般的である。分散が等しいとみなせない場合に問題が生じる。そもそもここで扱う2つの母分布の差異は、対象としている量の平均の差 $\Delta\mu$ であり、その分だけ、片方の母集団分布が平行移動すれば、もう一方の母集団分布に一致することを想定している (図-1 参照)。その想定において、分散が異なることは、比較の対象外 (すなわち、平均が一致しても、分散が異なるため、母分布が一致しない。それなら、比較は無意味である) と考える立場もある。

しかし、現実の問題として、互いの分散の値は異なるものの、その違いがわずかであれば、分散が異なる値をとる仮定の下で、互いの平均の差を検討したいと考えることは、それほど不自然ではない。なぜなら、平行移動して重なる場合も、議論の対象は

中心部の平均であり、裾部ではないからである。また、小標本であっても精密な理論構築が可能な正規標本に対して、分散が異なる場合に、母分散を排除した巧い統計量が作れないという事情もある。そのため、近似的に扱ったウェルチの方法が知られる。もっとも、対象となる量が正規標本 (母分布が正規分布) ではないならば、この種の問題は全て、なんらかの近似に頼らざるを得ない。

(2) 確率降水量の誤差分散

降水量の極値の生起をポアソン過程で扱う。すなわち、降水量 y を超える事象に対して、その生起率 λ を用いれば、その事象の生起数 n はポアソン分布に従う。この時、生起数ゼロ、すなわち、降水量 y の非超過確率 (累積分布関数) は、次式で表される。

$$F(y) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \Big|_{n=0, \lambda=\lambda(y)} = \exp \{-\lambda(y)\} \quad (6)$$

ここで、生起率と降水量を結びつける関数として、

$$\lambda(y) = \left(1 + \xi \frac{y - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi} \quad (7)$$

を用いると、式 (6) は一般化極値分布となる。式 (7) に含まれる母数 μ, σ および ξ は位置、尺度および形状母数である。以降では、生起率の単位時間を表すために、それを添字に明示する (例えば、1 年あたりの生起率 λ_1 に対して、極値分布の位置および尺度母数は μ_1, σ_1 となり、形状母数 ξ は不変である)。

再現期間 R 年に対する確率降水量 μ_R は、周期 T と周波数 f の関係 ($f = 1/T$) と同様に

$$\lambda_1(\mu_R) = \frac{1}{R} \quad (8)$$

で与える³⁾。この時、各々の母数は、

$$\begin{aligned} \mu_R &= \mu_1 + \sigma_1 \frac{R^\xi - 1}{\xi} \quad (\xi \neq 0) \\ \mu_R &= \mu_1 + \sigma_1 \log R \quad (\xi = 0) \end{aligned} \quad (9)$$

と関係づけられる。

極値の標本から母数 μ_1, σ_1 および ξ を推定すれば、式 (9) を用いて、確率降水量 μ_R を推定できる。この時、 μ_R の (漸近) 誤差分散は、

$$V(\hat{\mu}_R) = \frac{\sigma_R^2}{K} \quad (10)$$

と得られる。ここで、まず、

$$\sigma_R = \sigma_1 R^\xi \quad (11)$$

であり、式 (7) の母数 μ, σ を式 (9) の μ_R と式 (11) の σ_R に置換えて得られる生起率 λ_R は、 R 年あたりのものとなる。さらに言えば、 μ_R および σ_R は、 R 年最大値分布の位置および尺度母数となっている。次に、式 (10) に含まれる K は、

$$K = 1/V \left(\log \hat{\lambda}_1 \right) \quad (12)$$

図-1 正規分布の母平均の差異の検出
(イメージゆえに、量を表す値は表示しない)

図-2 母数推定に年最大値資料を用いた場合の経験度

で与えられる経験度^{4),5)}であり、再現期間の増加（すなわち、外挿の度合いの増加）とともに、 K の値は減少する。図-2 は、 N 年分の年最大値資料を用いて得られる1年あたりの経験度 K/N を示す。横軸に再現期間をとっているが、対応する確率降水量があることを念頭においてもらおうと、図が示す意味を理解しやすい。比較のために付した年最大値分布の超過確率 Q は、年最大値そのものが、確率降水量を超える割合であるのに対して、経験度は、年最大値が1つ与えられた時に、確率降水量を超える情報の割合を示している。年最大値そのものが確率降水量を超えなくても、確率降水量の推定には用いているので、それなりの情報は与えられる。したがって、経験度は、一般に、超過確率よりも割増された値をとることがわかる。この情報の割増が、極値解析による効用ともいえる（図中の破線の説明は後述）。

一般に、標本数 N で得られる標本平均 $\bar{Y}_N$ の分散が、その母分布の分散 σ^2 を用いて、次式で表される。

$$V(\bar{Y}_N) = \frac{\sigma^2}{N} \quad (13)$$

式(10)で表される確率降水量の誤差分散が、上式の形式で簡潔に表されている。このことは、有限個のデータ数の極値資料を用いて降水量 y を超える生起率 $\lambda_1(y)$ を推定する際に、実質に用いている情報の相当数（情報の量をデータ数で表したもの）が経験度の値になっていることから裏付けている。

(3) 確率降水量の差の検出

議論を複雑にしないために、ガンベルタイプ ($\xi = 0$) に限定して検討する。近年の降水量の生起率関数 $\lambda_{1,A}(y)$ に含まれる母数 $\mu_{1,A}$ および $\sigma_{1,A}$ と、将来気候における降水量の生起率関数 $\lambda_{1,B}(y)$ に含まれる母数 $\mu_{1,B}$ および $\sigma_{1,B}$ に対して、i) 尺度母数が一致しない場合 ($\sigma_{1,A} \neq \sigma_{1,B}$) には、次式が成立つ。

$$V(\hat{\mu}_{R,A} - \hat{\mu}_{R,B}) = \frac{\sigma_{1,A}^2}{K_A} + \frac{\sigma_{1,B}^2}{K_B} \quad (14)$$

ここで、 K_A および K_B は確率降水量 $\mu_{1,A}$ および $\mu_{1,B}$ に対応する経験度であり、また、式(11)より、

$$\sigma_{1,A} = \sigma_{R,A}, \quad \sigma_{1,B} = \sigma_{R,B} \quad (\xi = 0) \quad (15)$$

となることに注意する。ii) 尺度母数が一致する場合 ($\sigma_{1,A} = \sigma_{1,B} = \sigma_1$) には、次式を得る。

$$V(\hat{\mu}_{R,A} - \hat{\mu}_{R,B}) = (m_A^{-1} + m_B^{-1}) \sigma_1^2 \quad (16)$$

ここで、 m_A および m_B は各々の標本サイズである。

式(14)と(16)は、いずれも式(2)と同じ形式であるが、特性が大いに異なる。式(14)には、経験度が含まれており、差異の対象とする確率外力の再現期間を長くすれば、経験度は低下し、確率外力の差 $\Delta\mu_R (= \mu_{R,A} - \mu_{R,B})$ の誤差分散が大きくなる。これに対し、式(16)は、再現期間を長くとっても、差 $\Delta\mu_R$ の誤差分散が大きくなる。これは、式(9)の第2項（尺度母数 σ_1 の含まれる項）が相殺されて、その差に含まれていないためである。すなわち、

$$\Delta\mu_R = \Delta\mu_1 = \mu_{1,A} - \mu_{1,B} \quad (17)$$

となる。これにより、データの集中する中心部の差が検出できれば、分布の裾部（極端に長い再現期間に対する確率降雨量）の差も検出できることを意味する。このようになることは、問題設定からの帰結として正しいとはいえ、感覚的には受け入れにくいと考える。だからと言って、再現期間の長短による影響を含めるために、常に、 $\sigma_{1,A} \neq \sigma_{1,B}$ となる場合のみを考えるのも違和感があり、この問題は確率降水量の差を直接に検出する難点であると言える。

さらに、難点がもう1つある。標本から得られる差 $\Delta\mu_R$ の値は、標本の数十分にあれば、式(14)および(16)の（漸近）誤差分散をもつ正規分布に漸近的にはしたがうが、標本数が少ない場合には、誤差の正規性を適用できない。したがって、再現期間の長短による影響を含めた式(14)に含まれる経験度

(a) 年最大降水量の累積分布

(b) 100年確率降水量の誤差分布

(c) 100年最大降水量の分布

図-3 ガンベル分布による確率降水量の差異の検出

の値が小さいと、確率降水量そのものの誤差分布すら正規分布から歪んだ分布となり、その差の分布を使って裾の確率を議論することは難しい。

3. ある降水量を超える頻度の差

(1) ポアソン検定

事象の生起率の差に着目した2標本問題を考える。この場合も、式(2)と同じ形式で、

$$V(\hat{\lambda}_{1,A} - \hat{\lambda}_{1,B}) = \frac{\lambda_{1,A}}{N_A} + \frac{\lambda_{1,B}}{N_B} \quad (18)$$

について検討することも可能である⁶⁾ (N_A および N_B は各々の観測期間の長さ) が、本論では議論を明白にしたいので、ノンパラメトリックな古典的手法⁷⁾を用いる。2標本の生起数を k_A および k_B とし、生起数の合計 $X = k_A + k_B$ が与えられている状況のもとで、その条件確率に基づいて、生起率の比 λ_A/λ_B についての仮説検定を行う。すなわち、合計数 X のうち、標本Aの生起数 X_A が k_A 以上（逆に言えば、標本Bの生起数 X_B が k_B 以下）となる確率は、次式の2項分布の累積確率で与えられる。

$$\begin{aligned} P(X_A \geq k_A | X = k_A + k_B) \\ &= P(X_B \leq k_B | X = k_A + k_B) \\ &= \sum_{X_B=0}^{k_B} \binom{k_A + k_B}{X_B} (1-q)^{X_B} q^{X-X_B} \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、

$$q = \frac{N_A}{N_B} \frac{\lambda_A}{\lambda_B} \left/ \left(1 + \frac{N_A}{N_B} \frac{\lambda_A}{\lambda_B} \right) \right. \quad (20)$$

であり、2標本の生起率に違いが無いことを帰無仮説として検定を行う場合には、

$$\lambda_A/\lambda_B = 1 \quad (21)$$

を式(20)に代入し、得られる q で式(19)により与えられる確率（これを p 値という）が所与の有意水準よりも小さくなれば、帰無仮説を棄却して、生起率に相違があることを統計的に示せたことになる。

例えば、25年間にある降水量を超える回数が、現在気候で3回、将来気候で7回である場合に、頻度は2倍に増大しているが、平均5回のポアソン分布（図-4a）において、いずれも生じやすい回数であり、50年間で合計10回生じたことを条件に、その内の3回が現在気候の25年間に（裏返せば、7回が将来

(a) ポアソン分布

(b) 条件確率

図-4 ある降水量を超える生起数 k_A と k_B の例示

気候の25年間に）生じる確率、すなわち、 p 値は、図示（図-4b）するとおり、0.17 程度である。それほど小さくない確率で生じるため、偶然と考えても不自然ではない。したがって、現象を確率的に考えるならば、この場合は、0.12 (=3/25) から 0.28 (=7/25) に生起率が倍増したと判断しない方がよい。

このような例を概略的に示すために、観測年数が等しい場合 ($N_A/N_B = 1$) に限り、 $k_A + k_B$ を横軸に、 k_A/k_B を縦軸にとり、式(19)で与えられる p 値の等高線を描いたものを図-5に示す。有意水準を 0.10 程度で考える場合でも、生起率2倍を検出するためには、総生起数 21 (=14+7) は必要であり、一般に用いられる 0.05 で有意水準をとるならば、30 (=20+10) の総生起数が必要ということがわかる。

(2) 経験度の活用

N 年間の生起数が k 回となった事象の生起率を、

$$\hat{\lambda} = \frac{k}{N} \quad (22)$$

と推定するのは、ごく自然な考え方にしたがう。その事象の生起をポアソン過程と考えて、ポアソン分布の分散は生起率 λ そのものであるので、生起率の推定誤差は、次式で与えられる。

$$V(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{N} \quad (23)$$

したがって、式(12)の右辺の逆数は、この場合、

$$V(\log \hat{\lambda}) = V(\hat{\lambda}) \left(\frac{d \log \lambda}{d \lambda} \right)^2 = \frac{1}{N \lambda} \quad (24)$$

となる。ここで、 $\hat{\lambda} \sim \lambda$ とみなせば、 $N \lambda \sim k$ ゆえ、

$$K \sim k \quad (25)$$

である。すなわち、この単純な例からわかるように、式(12)で表される経験度 K は、生起率 λ の推定誤差に基づいて、事象の生起数 k に相当する量を与えている。経験度を前節でのポアソン検定に用いる生起数 k_A および k_B に応用すれば、ある（比較的大きな値をとる）降水量 y_* を超える事象の生起数が、たとえわずかであっても、その降水量 y_* を超えない極値の情報も用いれば、図-2に示すように割増し

図-5 ポアソン検定の p 値の等高線図 ($q=1$)

されるため、わずかな生起数の多寡を精度良く議論できると期待できる。その手順は、次のように行う。

i) 極値資料 $\mathbf{y}_A$ および $\mathbf{y}_B$ を用いて、対数尤度

$$\ell_A(\mu_{1,A}, \sigma_{1,A}; \mathbf{y}_A) + \ell_B(\mu_{1,B}, \sigma_{1,B}; \mathbf{y}_B) \quad (26)$$

を最大化するように最尤推定を行う。各々の尤度を別々に扱わずに、2つの標本の尤度の和としているのは、後の議論で、 $\sigma_{1,A} = \sigma_{1,B}$ を扱うためである。

ii) 推定された母数 $\hat{\mu}_{1,A}$, $\hat{\sigma}_{1,A}$, $\hat{\mu}_{1,B}$, $\hat{\sigma}_{1,B}$ および対象とする降水量 y_* を式 (7) に代入し、生起率 $\hat{\lambda}_{1,A}(y_*)$ および $\hat{\lambda}_{1,B}(y_*)$ を求める。これらの値の違いが偶然による（帰無仮説）のか、偶然ではなく有意 ($\lambda_{1,A}(y_*) \neq \lambda_{1,B}(y_*)$) なのかが検討の対象になる。

iii) 最尤推定により得られる情報行列（対数尤度の2階微分によるテンソル） $\mathcal{I}$ を用いれば、生起率の対数の分散が次式のように求まる。

$$V(\log \hat{\lambda}_1) = \nabla' \log \lambda_1 \mathcal{I} \nabla \log \lambda_1 \quad (27)$$

ここで、 ∇ は母数による微分であり、 ∇' はその転置である。式 (7) で得られる $\lambda_{1,A}(y_*)$ および $\lambda_{1,B}(y_*)$ を式 (27) の λ_1 に代入すれば、式 (12) で表される経験度が、それぞれの標本に対して、 $K_A(y_*)$ および $K_B(y_*)$ として得られる（以下では、降水量 y_* の依存は省略して、 K_A , K_B で表記）。これを前節の生起数 k_A および k_B の代わりに用いるのである。経験度の数で生起数を置換えると、実際の生起数に情報が割増しされるので、式 (22) の考えから、観測期間が仮想的に延伸することに注意する。それらの量を L_A および L_B と記せば、次式のように与えられる。

$$L_A = K_A / \hat{\lambda}_{1,A}, \quad L_B = K_B / \hat{\lambda}_{1,B} \quad (28)$$

iv) 合計数 $X = K_A + K_B$ のうち、標本 A の生起数 X_A が K_A 以上となる確率は、

$$P\{X_A \geq K_A | X = K_A + K_B\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{Z_A}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (29)$$

で近似できる。ここで、

$$z = \frac{x - (K_A + K_B)\tilde{q}}{\sqrt{(K_A + K_B)(1 - \tilde{q})\tilde{q}}} \quad (30)$$

$$\tilde{q} = q \Big|_{N_A/N_B = L_A/L_B, \lambda_A/\lambda_B = 1} \quad (31)$$

および

$$Z_A = z \Big|_{x=K_A-0.5} \quad (32)$$

である。すなわち、経験度の値は自然数ではなく、連続量である実数値で与えられるため、2項分布を正規分布で近似している。式 (32) に現れる 0.5 は連続補正によるものである。

v) 式 (29) より得られる p 値を用いて、帰無仮説を棄却できるかどうかの判断を行う。

vi) 対象となる降水量 y_* を変えて検討する場合、

iii) に用いられる情報行列 $\mathcal{I}$ は同じであるので、それ以降の手順を順次計算すればよい。

比率 $\tilde{q} \approx 0$ あるいは $\tilde{q} \approx 1$ 付近では、2項分布の正規近似が良くないことに注意する。したがって、観測期間が著しく異なる2標本への適用は難しいと言える。なお、図-5の作図にあたり、同様の近似を行っている（ p 値の等高線が滑らかになっているのはそのためである）。

簡単な適用例を提示する。図-6に示すような日降水量の年最大値資料（現在気候による過去50年間の観測記録、将来気候によるGCMなどによる近未来25年間の数値シミュレーション結果）が得られていると考える。なお、ここでは過去の観測機器に伴う誤差や、GCMのモデル誤差を含まないものとする。170 mm を閾値にとれば、それを超える降水量の頻度が、図中の黒点を数えてわかるとおり、将来気候では $k_A = 6$ 回、現在気候では $k_B = 8$ 回である。標本の記録長の違いを考えると、1年間あたりの生起率が、およそ $1.5 (= 6/8 \times 50/25)$ 倍に増加した可能性がある。なお、各々の生起率としては、

$$\hat{\lambda}_{1,A} = 0.24, \quad \hat{\lambda}_{1,B} = 0.16 \quad (33)$$

になる。 $q = 0.5 (= 25/50)$ および $X = 14 (= 8 + 6)$ を代入して、式 (15) の2項分布の累積確率による p 値は $0.31 (> 0.05)$ となり、データ長の短さゆえ、残念ながら、生起率の有意な変化は検出できない。

次に、年最大値資料を全て（170mmを超えない記録も）用いて、ガンベル分布で最尤推定すれば、

$$(\hat{\mu}_{1,A}, \hat{\sigma}_{1,A}, \hat{\mu}_{1,B}, \hat{\sigma}_{1,B}) = (102.0, 33.0, 118.6, 43.6) \quad (34)$$

と観測情報行列 $\hat{\mathcal{I}}_A$ および $\hat{\mathcal{I}}_B$ を得る（値は省略）。この時、式 (7) を用いて、それぞれの生起率は、

$$\hat{\lambda}_{1,A} = 0.308, \quad \hat{\lambda}_{1,B} = 0.128 \quad (35)$$

と推定される。式 (33) に比べて、変化がより強調されている。式 (27) に情報行列 $\hat{\mathcal{I}}_A$ および $\hat{\mathcal{I}}_B$ を代入して、経験度 $K_A = 9.28$ および $K_B = 9.91$ を得る。また、式 (28) により、 $L_A = 30.2$ および $L_B = 77.6$ を得る。これは、閾値を超えないデータの情報をを用いることで、閾値を超える記録の情報が増えるために、観測期間が見かけ上長くなることを示している。式 (29) に $\tilde{q} = 0.389$ を代入して、 p 値は $0.041 (< 0.05)$ と得られ、生起率の増大は有意と判断できる。

図-6 年最大値資料の2標本の例

(3) 2 標本の尺度母数が等しい場合の経験度

ここでは、議論を一般化するために、実際のデータ解析から得られる情報行列ではなく、データを代入する代わりに期待値をとって得られる情報行列を用いる。1 標本のガンベル分布の母数 (μ_1, σ_1) に対し、1 年あたりの情報行列は、次のようになる。

$$\mathcal{I}_e = \frac{1}{\sigma_1^2} \begin{pmatrix} 1 & -\psi(2) \\ -\psi(2) & \psi'(1) + \psi^2(2) \end{pmatrix} \quad (36)$$

2 標本のガンベル分布の母数 $(\mu_{1,A}, \mu_{1,B}, \sigma_1)$ に対する情報行列は、次式で与えられる。

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\sigma_1^2} \begin{pmatrix} N_A & 0 & -N_A\psi(2) \\ 0 & N_B & -N_B\psi(2) \\ -N_A\psi(2) & -N_B\psi(2) & e_{33} \end{pmatrix} \quad (37)$$

ここで、 $e_{33} = (N_A + N_B) \{ \psi'(1) + \psi^2(2) \}$ であり、 ψ および ψ' はディガンマ、トリガンマ関数である。これらを式 (27) に代入して整理すれば、生起率 $\lambda_{1,A}$ に対する経験度 K_A が次式のように得られる。

$$\frac{m_A}{K_A} = 1 + \frac{\rho_{A,B}}{\psi'(1)} \log^2 \frac{\lambda_{1,A}}{e^{\psi(2)}} \quad (38)$$

ここで、2 標本の母分布の尺度母数が異なるならば、 $\rho_{A,B} = 1$ であるが、尺度母数が同じならば、

$$\rho_{A,B} = \frac{N_A}{N_A + N_B} < 1 \quad (39)$$

となる。生起率 $\lambda_{1,B}$ に対する経験度 K_B も全く同じ形式で、式 (38) および (39) において、 A と B の記号を入れ替えたものとなる。 $\rho_{A,B}$ が 1 より小さくなることで、生起率に依存する第 2 項の増大が抑制される。図-2 の点線は、 $\rho_{A,B} = 0.25, 0.5, 0.75$ による経験度の変化を示す。したがって、尺度母数が一致すると判断できる場合には、経験度の増加が見込めるため、検定には有利と予想される。

前述の例に対し、式 (26) で $\sigma_{1,A} = \sigma_{1,B} = \sigma_1$ として最尤推定を行った。尺度母数が一致することの確認に、AIC を用いればよい。この場合、次式のように、 $\sigma_{1,A} \neq \sigma_{1,B}$ とした場合と比較して、その差はわずかなであるが、尺度母数が一致するとみてよい。

$$\text{AIC}_{\sigma_{1,A}=\sigma_{1,B}} - \text{AIC}_{\sigma_{1,A} \neq \sigma_{1,B}} (= -0.061) < 0 \quad (40)$$

このとき経験度は、 $K_A = 13.84$ および $K_B = 16.30$ となり、期待どおり増加している。しかし、この場合に、式 (29) より得られる p 値は $0.23 (> 0.05)$ となり、帰無仮説（生起率の変化無し）を棄却できない。これは、尺度母数を共通にすることで、生起率の変化が控えめになったからである。すなわち、

$$(\hat{\mu}_{1,A}, \hat{\mu}_{1,B}, \hat{\sigma}_1) = (103.3, 115.7, 36.5) \quad (41)$$

と母数が推定され、この時、生起率は、

$$\hat{\lambda}_{1,A} = 0.23, \quad \hat{\lambda}_{1,B} = 0.16 \quad (42)$$

となる。この例のように、経験度が増加しても必ずしも生起率の変化の有意性を示せない場合もあるこ

とを注意する。このような場合、年最大値資料ではなく、POT (Peaks Over Threshold) 資料でさらに情報を増やして検討するとともに、検出力（あるいは、第 2 種の過誤）についての議論も必要である。

ところで、式 (40) のように、位置母数についても、AIC で判断しても良いように思うかもしれないが、この場合も、式 (17) に示したように裾部の差異を議論することにはならないことを付記しておく。

6. おわりに

正規標本に対しては、標本平均というのは直接的な量であり、標本平均の差をもとに母集団における平均の差を検討することは自然な発想である。しかし、確率降水量の推定は平均そのものではなく、母数推定の後に間接的に得られる派生物である。したがって、直接的ではない量を対象とするために、統計解析を行う研究者のみならず、解析結果を提示される一般的な読者にとっては、解析手順がブラックボックス化してしまう。たとえば、気候変動に伴う変化傾向が有意に検出されても、その実感がわきにくい。その有意性が微妙な場合はなおさらである。

本研究では、生起回数そのものの多寡に着目し、ある一定の降水量に対する生起率の差の検出法を極値理論に基づいて発展させ、データから得られる情報を有効に用いる手法を提示した。対象地域の治水整備の現段階での脆弱性を勘案して、そのクリティカルな値となる（ピーク流量を与える）降水量をとり、将来気候で頻度が増加すると判断できるならば、対策の緊急性を提示するのに役立つと考える。

謝辞：本研究は科学研究費（課題番号 25289153 および 26420494）ならびに文部科学省委託事業気候変動リスク情報創生プログラムのもとで実施された。

参考文献

- 1) 木本昌秀・三村信男・元村有希子・竹村公太郎・岸田弘之：（座談会）異常気象に向き合うために今できること、すべきこと、土木学会誌，第 99 巻，No.4，pp.34-37, 2014.
- 2) 例えば、東京大学教養部統計学教室 編，統計学入門，東京大学出版会，307p., 1991.
- 3) 北野利一：伊勢湾台風級の高潮と確率潮位，第 49 回 水工学に関する夏期研修会，pp.B-3-1~B-3-20, 2013.
- 4) 北野利一・森瀬喬士・喜岡 渉・高橋倫也：確率波高に対する推定の可否を決定づける新たな指標の提案，海岸工学論文集，第 55 巻，pp.141-145, 2008.
- 5) 北野利一・高橋倫也・田中茂信：確率降雨量の統計解析におけるモデル適合性の限界，土木学会論文集 B1（水工学），Vol. 67, No. 4, pp.I-277-I-282, 2011.
- 6) Krishnamoorthy, K. and J. Thomson, A more powerful test for comparing two Poisson means, Jour. Stat. Planning and Inference, Vol.119, pp.23-35, 2004.
- 7) Hald, A., Statistical Theory with Engineering Applications, Wiley, 783p., 1952. (2014.9.30 受付)