確率微分方程式で記述された降雨流出変換系の 応答特性に関する研究

STOCHASTIC RESPONSE OF RAINFALL-RUNOFF SYSTEM EXPRESSED BY STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

田中 岳
Gaku TANAKA

正会員 博士（工学） 北海道大学助教 大学院工学研究院（〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目）

Rainfall-runoff phenomenon is more or less stochastic. From its stochastic viewpoint, runoff models are described by stochastic differential equations. We propose differential equations whose solutions estimate the first and second order central moments of discharge under the condition that the rainfall input, the storage coefficient and the initial condition of a storage function runoff model are treated as random variables respectively. The validity of these proposed differential equations was cross-checked by a simulation. The results in this study can be applicable to problems on the river engineering, such as the estimation of the design flood.

Key Words: stochastic response, stochastic differential equation, random variable, runoff model

1. はじめに

降雨量が流域場を介して流出量に変換される系（降雨流出系）は、集中定数系、分布定数系、あるいは集中定数系の分布モデルなど、様々な形式の微分方程式で記述される。この降雨流出系の強制項、モデルパラメータ、初期条件が確率過程に属するとした立場では、降雨流出現象を記述する微分方程式が確率微分方程式と解釈される。例えば田中¹⁾は、降雨量の時系列データの従う確率過程の特性（確率分布や自己相関性）が、河川計画において極めて重要な最大流出量やその確率分布に影響を与えることを述べている。このような観点から、確率論的に降雨流出現象を理解することは、河川工学の諸問題を扱う上で重要な視点になるものと考えられる。

単一の斜面や小流域を対象とした降雨流出現象を記述する様々なタイプの貯留型流出モデル、Kinematic Waveモデルについて、これらを確率微分方程式として捉えて、その応答特性を議論した研究が、これまでに多く成されてきた。高棹、寶ら²⁾は、流出量の確率特性（二乗平均誤差）を様々なタイプの貯留方程式の評価に用いた。この研究は、モンテカルロ法を用いて流出量の確率特性を推定したものである。一方で理論的な取り扱いが藤田³⁾を中心とした研究グループによって報告されている。藤田ら³⁾は、非線形一価の貯留型流出モデルを対象として、降雨量の時間的な独立性を仮定した上で、流出量の確率

密度関数を推定する手法を提案した。その後、田中⁴⁾は、観測降雨量のデータがAR(1)過程に従うことから、これを考慮した貯留型流出モデルとKinematic Waveモデルの確率応答特性の推定へと藤田ら³⁾の研究を発展させている。更に、解析対象流域の拡大を目指し、二斜面一河道の流出モデルを対象⁴⁾に、また自己相似性を有する模擬流域を対象⁵⁻⁷⁾に、流出量の確率特性が理論的に推定されている。ここで挙げた研究は何れも降雨流出系の強制項が確率過程である場合を問題としているが、工藤⁸⁾、早川⁹⁾らは、降雨量の時系列を決定論的関数として、貯留型流出モデルのモデルパラメータ（地質や地形の特性に依存）の確率特性が流出量に与える影響を議論している。他方、昨今では確率過程がMarkov過程であるとして、積極的にFokker-Planck方程式を取り入れ、これを考察することで水文現象に存在する様々な不確実性が評価されてきている。

本論文では、降雨量を流出量に変換する系（降雨流出系）として最も単純な形の貯留型流出モデルを用いて、これを確率微分方程式と捉え、降雨強度（強制項）、貯留係数（モデルパラメータ）、初期流出高（初期条件）の全てが既知の確率過程に属するとした条件の下で、流出高の確率特性（平均値、分散）を理論的に推定する手法を提案する。これは、降雨強度と貯留係数の確率特性を考慮したKudo et al.¹³⁾の研究を発展させたものと位置付けられる。なお、ここで導出された理論式の妥当性は、

シミュレーション法に基づき比較, 評価される.

2. 基礎理論—流出高の確率特性の推定

本論文では, 降雨流出系として以下に示す最も単純な形の貯留型流出モデルを用いる.

$$\frac{ds}{dt} + q = r \quad (1)$$

$$s = kq^p \quad (2)$$

なお, s : 貯留高; q : 流出高; r : 降雨強度; k : 貯留係数; p : 貯留指数である. ここでは, 降雨強度 r , 貯留係数 k および流出高 q の初期値 (初期流出高) q_0 の確率的な変動特性が既知の条件の下, 降雨流出系を介して降雨強度 r の変換された結果 (流出高 q) の確率特性を理論的に推定する. なお, 貯留指数 p については, 理論解析の都合から定数として扱う.

さて, 式(1), (2)から貯留高 s を消去すると,

$$\frac{d(kq^p)}{dt} + q = r \quad (3)$$

が得られる. 貯留係数 k , 流出高 q ならびに降雨強度 r のそれぞれを平均値 (bar記号) とそれからの偏差 (tilde記号) とで分離して表わすと,

$$k = \bar{k} + \tilde{k}, \quad \langle \tilde{k} \rangle = 0 \quad (4)$$

$$q = \bar{q} + \tilde{q}, \quad \langle \tilde{q} \rangle = 0 \quad (5)$$

$$r = \bar{r} + \tilde{r}, \quad \langle \tilde{r} \rangle = 0 \quad (6)$$

となる. なお, 記号 $\langle \rangle$ は期待値演算子を意味する. さらに, 指数型の確率変数 q^p は次式により近似する.

$$q^p \approx \alpha \bar{q} + \beta \tilde{q} \quad (7)$$

Bras and Georgakakosら¹⁴⁾は, このパラメータ α と β を,

$$\alpha = \bar{q}^{p-1} \left[1 + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m!} \frac{\mu_{q(m)}}{\bar{q}^m} \prod_{n=0}^{m-1} (p-n) \right\} \right]$$

$$\beta = \frac{\bar{q}^{p+1}}{\mu_{q2}} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m!} \frac{\mu_{q(m+1)}}{\bar{q}^{m+1}} \prod_{n=0}^{m-1} (p-n) \right\}$$

と与えている. なお, $\mu_{q(m)}$ は流出高 q の平均値周りの m 次モーメントを表す. 例えば μ_{q2} は流出高 q の平均値周りの2次モーメント (分散) を指す.

ここで, 式(4)から(7)を式(3)に代入することで,

$$(\bar{k} + \tilde{k}) \frac{d(\alpha \bar{q} + \beta \tilde{q})}{dt} + \bar{q} + \tilde{q} = \bar{r} + \tilde{r} \quad (8)$$

を得る. 上式の両辺に対して期待値を取ると,

$$\frac{d\bar{q}}{dt} + A\bar{q} = c_0(\bar{r} - H_0) \quad (9)$$

$$A = c_0 \left(\bar{k} \frac{d\alpha}{dt} + 1 \right), \quad c_0 = \frac{1}{k\alpha}, \quad H_0 = \frac{d}{dt} (\beta \langle \tilde{k} \tilde{q} \rangle)$$

が得られる. この式(9)を初期値 $\bar{q}_0$ の下で解くと, 流出高 q の平均値が求まる.

$$\bar{q} = e^{-\int A d\tau} \left\{ \int_0^{\tau} c_0(\bar{r} - H_0) e^{\int_0^{\tau} A d\tau} d\tau_1 + \bar{q}_0 \right\}$$

一方, 式(8)の両辺から式(9)の各辺を差し引くことで,

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} + B\tilde{q} = c_1(\tilde{r} - H_1) \quad (10)$$

$$B = c_1 \left(\bar{k} \frac{d\beta}{dt} + 1 \right), \quad c_1 = \frac{1}{k\beta},$$

$$H_1 = e_0 \tilde{k} + \frac{d}{dt} (\beta \langle \tilde{k} \tilde{q} \rangle) - H_0, \quad e_0 = \frac{d}{dt} (\alpha \bar{q})$$

を得る. 上式は, 流出高 q の平均値周りの高次モーメントを求めるための基礎式になる. いま, 式(10)を解くと,

$$\tilde{q} = e^{-\int B d\tau} \left\{ \int_0^{\tau} c_1(\tilde{r} - H_1) e^{\int_0^{\tau} B d\tau} d\tau_1 + \tilde{q}_0 \right\} \quad (11)$$

を得る. なお, $\tilde{q}_0$ は初期値である. 式(11)の両辺を二乗した後, 両辺の期待値を取ることで, 流出高 q の分散 μ_{q2} が求まる. このとき, 降雨強度 r の二次のキュムラント関数ならびに $\langle \tilde{k}^i \tilde{q} \rangle (= W_i)$ (i : 正の数) の値が必要となる. ここで前者については, 本論文では降雨強度 r が互いに独立な確率変数として,

$$\langle \tilde{r}(\tau_1) \tilde{r}(\tau_2) \rangle = \mu_{r2} \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (12)$$

を用いた. μ_{r2} : 降雨強度 r の分散; δ : Diracのデルタ関数. また, 後者については, i が4以上の高次の項を無視することとした. その結果, 流出高 q の分散 μ_{q2} は以下のように表される.

$$\mu_{q2} = U_1 + 2I + J + K + \mu_{q02} V_0^2 \quad (13)$$

μ_{q02} : 流出高 q の分散 μ_{q2} の初期値

$$\text{ただし, } I = \frac{\mu_{k2}}{k^2} (U_1 - 2U_2 + U_3)$$

$$J = \mu_{k2} U_4^2 + 2U_4 U_6 - U_5^2$$

$$K = I + \frac{\mu_{k2}}{k^2} U_3 + \frac{1}{k^2} (L_{4,4} + 2L_{4,8} + L_{8,8})$$

$$L_{i,j} = \mu_{k4} U_i U_j - \mu_{k3} (U_i U_{j+1} + U_{i+1} U_j) + \mu_{k2} U_{i+1} U_{j+1} - (U_{i+1} U_{j+3} + U_{i+3} U_{j+1})$$

$$\frac{dU_i}{dt} + 2BU_i = c_1 U_{i-1}, \quad i = 1 \sim 3, \quad U_0 = c_1 \cdot c \mu_{r2}$$

c : 時間の次元を持つ大きさ1の定数

$$\frac{dU_i}{dt} + BU_i = c_1 e_{i-4}, \quad i = 4 \sim 7, \quad e_i = \frac{d}{dt} (\beta W_i)$$

$$\frac{dU_i}{dt} + BU_i = c_1 U_{i-4}, \quad i = 8 \sim 11$$

$$\frac{dV_0}{dt} + BV_0 = 0, \quad V_0(0) = 1$$

なお, $\mu_{k(i)}$ ($i = 2 \sim 4$) は貯留係数 k の平均値周りの m 次モーメントである. また, W_i を求めるための微分方程式は, 式(10)の両辺に $\tilde{k}^i$ を掛けた後, 両辺の期待値を取ることで, 以下のように与えられる.

$$\frac{dW_1}{dt} + BW_1 = -c_1 (e_0 \mu_{k2} - e_2) \quad (14)$$

$$\frac{dW_2}{dt} + BW_2 = -c_1 (e_0 \mu_{k3} - e_3 + e_1 \mu_{k2}) \quad (15)$$

$$\frac{dW_3}{dt} + BW_3 = -c_1(e_0\mu_{k4} - e_4 + e_2\mu_{k3}) \quad (16)$$

3. モンテカルロ・シミュレーションによる検証

流出高 q の平均値 $\bar{q}$ 、分散 μ_{q2} を与える式(9), (13)は、指数型の確率変数 q^p に近似式 (式(7)) を用いて、更には $\langle \tilde{k}^i \tilde{q} \rangle$ の高次の項を無視して導かれた。

シミュレーション法では、連続的に変化する降雨強度 $r(t)$ の時系列の代わりに、離散的な観測降雨強度 $r_d(t)$ の時系列を用いる。これら $r(t)$ 、 $r_d(t)$ は、以下の式で関係付けられている。

$$r_d(t) = \sum_i r_{d,i} (u(t - (i-1)\Delta t) - u(t - i\Delta t)) \quad (17)$$

$$r_{d,i} = \frac{1}{\Delta t} \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} r(\tau) d\tau \quad (18)$$

$u(t)$: ステップ関数; Δt : 観測間隔。

式(17), (18)で表された $r_d(t)$ を模擬的に複数回発生させ、その各々を直接式(1), (2)に代入して流出高 (ハイドログラフ) を求めた後、それらの標本平均から流出高の確率特性が推定される。ここで、式(18)で定義された確率変数 $r_{d,i}$ の特性については、実際に観測された降雨時系列データの統計解析に基づき、その平均値 $\bar{r}_{d,i}$ からの偏差 $\tilde{r}_{d,i}$ が指数分布に従うものとする。このとき、 $\tilde{r}_{d,i}$ の確率密度関数および分散は以下のように表される。

$$f(\tilde{r}_{d,i}) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(\tilde{r}_{d,i} + \frac{1}{\lambda})} & \tilde{r}_{d,i} \geq -\frac{1}{\lambda}, \lambda: \text{定数} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\mu_{r_{d,2}} = \frac{1}{\lambda^2}$$

更に、シミュレーション結果と理論式 (式(9), (13)) を比較する上で、 $r_{d,i}$ の確率特性 (平均値 $\bar{r}_{d,i}$ と分散 $\mu_{r_{d,2}}$) と降雨強度 r のそれらと対応関係が必要となる。平均値に関しては、式(18)の両辺の期待値を取ることで求まる。また、分散については、式(18)の両辺を二乗した後、両辺の期待値を取ることで得られる。先に述べたように、本論文では降雨強度 r が互いに独立な確率変数としている。この場合、 $r_{d,i}$ と r の確率特性の間には、

$$\bar{r}_{d,i} = \frac{1}{\Delta t} \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \bar{r}(\tau) d\tau \quad (19)$$

$$\mu_{r_{d,2}} = \frac{\Delta t}{c} \mu_{r_{d,2}} \quad (20)$$

の関係が満足される。

貯留係数 k を確率変数として扱う場合、その確率密度関数が問題となる。この貯留係数 k が土壌物性 (地質) や流域の面積 (地形) と関係付けられることを踏まえると、その確率分布はガンマ分布もしくは対数正規分布に従うことが予想される。ここでは、貯留係数 k が以下に示すガンマ分布に従うものと仮定する。

図-1 シミュレーション結果との比較 (矩形降雨波形)
(上段: 平均値; 下段: 分散)

$$g(k) = \begin{cases} \frac{\zeta^\eta}{\Gamma(\eta)} k^{\eta-1} e^{-\zeta k} & k \geq 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}, \zeta, \eta: \text{定数}$$

このとき、貯留係数 k の平均値 $\bar{k}$ と、2から4次モーメントは、

$$\bar{k} = \frac{\eta}{\zeta}, \mu_{k2} = \frac{\eta}{\zeta^2}, \mu_{k3} = \frac{2\eta}{\zeta^3}, \mu_{k4} = \frac{3\eta(\eta+2)}{\zeta^4}$$

のように表わされる。

式(1), (2)が示すように、流出高 q の変動は貯留係数 k に依存する。このため初期流出高 q_0 の確率的な変動特性を考えると、これもまた貯留係数 k に影響される。更には先行する降雨事象の履歴によっても、この初期流出高 q_0 は変化する。以上の考察を踏まえつつ、或いは観測資料に基づき経験的に初期流出高 q_0 の確率分布を与えるべき所ではあるが、その点は未だ十分ではない。そこで、本論文では、初期流出高 q_0 の確率分布として、次の一様分布を仮定する。

$$h(\tilde{q}_0) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_0} & \gamma_0 \leq \tilde{q}_0 \leq \gamma_1, \gamma_0, \gamma_1: \text{定数} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

この場合、初期流出高 q_0 の平均値 $\bar{q}_0$ と分散 $\mu_{q_0,2}$ は、

$$\bar{q}_0 = \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{2}, \mu_{q_0,2} = \frac{(\gamma_1 - \gamma_0)^2}{12}$$

表-1 計算条件 (図-1の矩形降雨波形に対応)

$\bar{r}_d$ (mm/hr)	$\mu_{r_d 2}$ (mm ² /hr ²)	Δt (hr)	t_r (hr)
5.0	1.0	0.5	20
$\bar{k}$ (mm ^{1-p} /hr ^p)		$\mu_{k 2}$ (mm ^{2(1-p)2} /hr ^{2p})	
5.66		0.56	
$\bar{q}_0$ (mm/hr)		$\mu_{q_0 2}$ (mm ² /hr ²)	
0.5		1/12

図-2 シミュレーション結果との比較 (三角形降雨波形)
(上段: 平均値; 下段: 分散)

と表される. なお, 本論文が提案する流出高 q の確率特性を与える理論式 (式(9), (13)) は, その導出過程からも明かなように, 既知なものとして与えた降雨強度 r , 貯留係数 k および初期流出高 q_0 の確率分布の形は任意であることを付記しておく.

図-1は, 貯留指数 p を0.4から1.0の範囲を0.2刻みで変化させた上で, 式(9)と(13)を解くことで推定された流出高 q の平均値 $\bar{q}$, 分散 $\mu_{q 2}$ (破線) と, シミュレーション法により求められた結果 (実線) との比較を示している. なお, 計算に用いた他の条件を表-1にまとめる. 表に示す t_r は降雨継続時間を指す. 平均値 $\bar{q}$ (図-1上段) については, 理論式 (式(9)) による推定結果は貯留指数 p の変化に関わらずシミュレーション結果と極めて良く一致している. 分散 $\mu_{q 2}$ (同下段) については, 観測間隔 Δt の値に対応したシミュレーション結果の振

図-3 平均降雨波形の概念図 (実線: $\bar{r}_d$; 破線: $\bar{r}$)

動する波形を, 理論式 (式(13)) の結果が包含する形となっており, 両者の適合度は良好といえる. なお, 貯留係数の次元が $[L^1 T^p]$ と表される. このため, 貯留指数 p の変化に対応して貯留係数の平均値 $\bar{k}$, 並びに分散 $\mu_{k 2}$ の次元が変化していることを付記しておく.

図-2は, 降雨波形を三角形とした場合のシミュレーション結果 (実線) と理論式による結果 (破線) を比較したものである. 計算に用いた三角形降雨波形について, 連続的な降雨強度 r の平均値 $\bar{r}$ と, 離散的な降雨強度 r_d のそれ $\bar{r}_d$ との関係を図-3に示す. ここでは, $\bar{r}$ の最大値 r_p とその発生時刻 t_p をそれぞれ7.5(mm/hr), 10(hr)とし, $\bar{r}$ の時間平均が5.0(mm/hr)となるように r_a (図中参照) を定めた. これにより, 降雨継続時間 t_r の間の降雨量 (単位面積当たりの体積) の平均値は, 矩形降雨波形の場合 (図-1) と同じになる. なお, 他の計算条件についても, 矩形降雨波形の場合 (図-1) と同じである. 図-2に示すように, 三角形降雨波形においても, ミュレーション結果と理論式 (式(9), (13)) の解との適合度は良好である.

以上から, 貯留型流出モデル (式(1), (2)) において, 降雨強度 r , 貯留係数 k および初期流出高 q_0 の確率変動特性が既知の条件の下, 流出高 q の確率特性を与える理論式 (式(9), (13)) の妥当性が示されたといえる.

4. 確率応答特性とその考察

ここでは, 降雨流出系として単純な形の貯留型流出モデル (式(1), (2)) を用いて,

- 降雨流出系の強制項—降雨強度 r
- 降雨流出系のモデルパラメーター貯留係数 k
- 降雨流出系の初期条件—初期流出高 q_0

の確率特性が流出高 q の特性に与える影響を, 数値実験の結果から考察する. なお, 以後の検討では表-1で示した計算条件を基本として, 幾つかのパラメータに変化を与える.

図-4は, 貯留指数 p が0.6と1.0の場合に, 降雨強度 r (強制項) の確率特性 (分散 $\mu_{r 2}$) の変化が, 時間変化

図-4 強制項の確率特性の変化と影響
(上段: $p=0.6$; 下段: $p=1.0$)

表-2 定常状態での流出高の分散 ($p=0.6$)
(分散 $\times 10^{-1}$)

a	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
μ_{q2}	0.000	0.356	1.43	3.21	5.70
Xa^2	0.000	0.356	1.43	3.21	5.70

する流出高 q の確率特性に与える影響を推定した結果である。なお、表-1に示した計算条件の中で、確率変数としての降雨強度 r に関する変動係数 $CV_{r_d} = \sqrt{\mu_{r_d2}} / \bar{r}_d$ を、 $\bar{r}_d$ を固定させた上で基本状態の値を0から2倍まで変化させている。いま、変動係数 CV_{r_d} が a 倍 (a : 実数) となれば、その定義から分散 μ_{r_d2} は a^2 倍となる。このとき、式(20)を介して降雨強度 r の分散 μ_{r2} もまた a^2 倍となる。図-4からは、これに対応する形で流出高 q の分散 μ_{q2} も大きくなる傾向がみてとれる。ここで、流出高 q の分散 μ_{q2} が定常状態に達した $p=0.6$ の場合について、基本状態の変動係数 CV_{r_d} が a 倍されときの計算結果から定常状態の流出高 q の分散 μ_{q2} を推定 (ここでは、 $t=t_r$ の値) し、これらを表-2にまとめる。なお、基本状態の分散を X とおいている。表に示されているように、定常状態の流出高 q の分散 μ_{q2} が、降雨強度 r の分散 μ_{r2} に比例することがわかる。

次に、基本状態から貯留係数 k (モデルパラメータ) の確率変動特性 (分散 μ_{k2}) が流出高 q の分散 μ_{q2} に与える影響について考察する。図-5は、貯留係数 k に関する変動 $CV_k = \sqrt{\mu_{k2}} / \bar{k}$ を、 $\bar{k}$ を固定させた上で基本状

図-5 モデルパラメータの確率特性の変化と影響
(上段: $p=0.6$; 下段: $p=1.0$)

態の値を0から2倍 (0.5刻み) まで変化させた場合の結果を示している。貯留係数 k の分散 μ_{k2} に依存して、特に流出高 q の上昇期、下降期において、その分散 μ_{q2} は顕著に変化している。このことは、先に述べた降雨強度 r の変化に伴った検討とは異なり、式(13)から明らかなように、流出高 q の分散 μ_{q2} が、貯留係数 k の確率特性の高次モーメント $\mu_{k(m)}$ ($m=1\sim 3$) の影響を受けるためである。また、貯留係数 k が流出現象の遅れと強く対応することによる。

更に、初期流出高 q_0 (初期条件) の変化に伴う影響についても検討する。図-6では、基本状態での初期流出高 q_0 の分散 μ_{q_02} の値を、平均値 $\bar{q}_0$ を固定した上で0から1倍 (0.25刻み) まで変化させている。貯留指数 p に依存するが、ある時刻から初期値の影響が無視できる。この時刻の大小は、貯留指数 p と対応する。いま、式(11)が、

$$\tilde{q} = \int V_0(t-\tau)R(\tau)d\tau + V_0\tilde{q}_0 \quad (11)'$$

$$R(t) = c_1(\tilde{r} - H_1)$$

と書けるように、 V_0 は非線形性を持つ $\tilde{q}$ の (等価な) 応答関数と考えることができる。式(11) (或いは式(11)') を二乗して期待値を取ることで流出高 q の分散 μ_{q2} が求まることから、その時間的な変化は V_0^2 の影響を受けることになる。図-7は、図-6の場合と同じ計算条件での V_0^2 の時間変化を示している。図に示されているように、初期流出高 q_0 の確率特性が流出高 q の分散 μ_{q2} に与える影響は、 V_0^2 の変化と対応して減衰するこ

図-6 初期条件の確率特性の変化と影響
(上段: $p=0.6$; 下段: $p=1.0$)

図-7 V_0^2 の変化

とがわかる。

5. おわりに

本論文では、降雨量を流出量に変換する系（降雨流出系）が確率微分方程式で表されるとして、強制項、モデルパラメータおよび初期条件の全てが既知の確率過程である場合に、流出量の確率特性を検討する基礎的な手法を示した。降雨流出系を最も単純な形の貯留型流出モデルで置換しているため、このモデルの流出解析上の適用限界があるものの、降雨流出系に存在する上記の不確実性の振る舞いを理解するには極めて有用であると考えられる。ここでは、降雨流出系の出力（流出高）の平均値と分散についてのみ、これを与える理論式を導出し、シミュレーション法に基づきその妥当性を示した。然しながら、ここでの手法を進展させることで、流出高 q の高

次モーメントの導出と、これに基づき時間変化する確率密度関数の推定¹⁵⁾が容易になる。その結果、例えば降雨強度、貯留係数や初期貯留高、個々の確率特性（推定精度）が河川計画において極めて重要な最大の流出高やその確率分布に与える影響を定量的に評価できるようになる。今後、実際の降雨流出現象における不確実性のより深い理解が期待される。

参考文献

- 1) 田中岳, 藤田睦博, 工藤睦信, 内島邦秀: Kinematic Waveモデルと貯留型流出モデルの比較 -周波数特性と確率特性-, 土木学会論文集, No. 614/II-46, pp. 21-36, 1999.
- 2) 高埴琢馬, 宝馨, 楠橋康広: 洪水流出モデルの確率過程的評価に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第28号B-2, pp. 221-235, 1985.
- 3) 藤田睦博, 工藤睦信, 中尾隆, 橋本識秀: 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究 -降雨量が時間的に独立な確率過程の場合-, 土木学会論文集, No. 515/II-31, pp. 1-11, 1995.
- 4) 田中岳: 降雨流出システムの確率応答特性, 水工学論文集, 第49巻, pp. 175-180, 2005.
- 5) 田中岳: 流出モデルの確率応答特性評価に基づく集中化に関する基礎的研究, 水工学論文集, 第53巻, pp. 457-462, 2009.
- 6) 田中岳, 八幡江里子, 田中梢: 流出モデルの確率応答特性評価に基づく集中化に関する研究, 水工学論文集, 第54巻, pp. 499-504, 2010.
- 7) 田中岳: 流出モデルの確率応答特性評価に基づく集中化に関する研究-降雨量が互いに従属する確率変数の場合-, 土木学会論文集B1 (水工学), Vol. 70, No. 4, pp. I_373-I_378, 2014.
- 8) 工藤睦信: 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究, 北海道大学学位論文, pp. 1-222, 1999.
- 9) 早川博: 流域の地形構造を考慮した降雨流出系の確率応答と流域スケールに関する研究, 北海道大学学位論文, pp. 1-255, 1997.
- 10) 吉見和紘, 山田正, 山田朋人: 確率微分方程式の導入による降雨流出過程における降雨の不確実性の評価, 土木学会論文集B1 (水工学), Vol. 71, No. 4, pp. I_259-I_264, 2015.
- 11) Wang, Chao-Wen, 吉見和紘, 辛島史嗣, 山田正: 降雨の不確実性に基づく確率過程論を導入した堤防の信頼性評価, 第23回地球環境シンポジウム, 土木学会論文集G (環境), 2015.
- 12) Supraba, I. and Yamada, J. T.: Uncertainty of Peak Runoff Height Associated with Uncertainty of Water Holding, 第23回地球環境シンポジウム, 土木学会論文集G (環境), 2015.
- 13) Kudo, M., Fujita, M. and Tanaka, G.: Stochastic Response to Storage Runoff Function Model -A Case of Coefficients and Rainfall as Random Functions-, HYDROSOFT 96, Sixth International Conference on Hydraulic Engineering Software, pp. 39-48, 1996.
- 14) Bras, R. L. and Georgakakos, K. P.: Real Time Nonlinear Filtering Techniques in Streamflow Forecasting -A Statistical Linearization Approach-, Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, pp. 95-105, 1980.
- 15) Hahn, G. J. and Shapiro, S. S.: Statistical Models in Engineering, Jphn Wiley & Sons, Inc., pp. 1-355, 1994.

(2015. 9. 30受付)