底面摩擦を考慮したダム破壊流れの近似解 に関する二、三の検討

SOME CONSIDERATIONS ON APPROXIMATE SOLUTION OF A DAM BREAK FLOW WITH BOTTOM SHEAR STRESSES

細田 尚¹・白井 秀和²・Hamid BASHIRI ATRABI³・Wai Thwe AUNG⁴
Takashi HOSODA, Hidekazu SHIRAI, Hamid BASHIRI ATRABI and Wai Thwe AUNG

¹フェロー会員 工博 京都大学大学院教授 工学研究科都市社会工学専攻
(〒615-8540 京都市西京区京都大学桂C1-3)

²正会員 博士(工学) 三洋テクノマリン(株) 数値解析室 (東京都中央区日本橋堀留町1-3-17)

³学生会員 MS 京都大学大学院博士後期課程 工学研究科都市社会工学専攻 (同上)

⁴非会員 MS 京都大学大学院博士後期課程 工学研究科都市社会工学専攻 (同上)

This paper proposes the derivation method of an approximate solution of shallow water equations for dam break flows, applying a perturbation method. The basic equations are firstly transformed into the equations in a moving coordinate system with the celerity of the negative wave front. The depth and velocity are denoted as the power series of the spatial coordinate of the moving coordinate system. After denoting the time dependent coefficient of each term of the power series as the perturbation expansion with the bottom friction coefficient, all unknown coefficients are derived using the known variables such as the initial depth and gravitational acceleration. The analytical solutions are compared with the numerical results obtained using a Finite Volume Method. Although the results indicate that further investigations are needed to obtain a better analytical solution, it is considered that in this study a mathematical framework is presented to study the asymptotic behavior of the depth distribution with negative infinite gradient at the front position to the Ritter solution when the friction coefficient tends to 0.

Key Words : dam break flow, open channel flow, analytical solution, perturbation method

1. はじめに

水平または傾斜した路床上に設置された仕切り板の左右どちらかの半無限あるいは有限領域に湛水した後、仕切り板を瞬間的に取り除くことによって発生する流れを、水工学分野ではダム破壊流れ(Dam Break Flows)と総称している(図-1参照)。(本研究では、左側に壁が存在しても、有限時間内に負の波のフロントが壁に到達しなければ壁がない半無限の場合と同一と考えられるため、有限時間内で壁の影響を受けないダム破壊流れも含めて半無限領域のダム破壊流れと考えている。)

本研究では、底面せん断応力項を無視しない浅水方程式を用いてダム破壊流れの近似解を導く方法について検討するとともに、得られた解の基本特性を考察したものである。水深がゼロで水深勾配が負の無限大になると思われる先端近傍での水深分布形について何らかの理論的知見を得ることは、数値解析結果の妥当性を検討する

図-1 半無限領域のダム破壊流れの概念図
(原点は初期の隔壁位置である。)

ためにも有用と考えられる。

本研究では水平路床上のダム破壊流れのみを考える。この場合、底面せん断応力項を無視した浅水方程式を用いて半無限領域のダム破壊流れの解析解がRitterにより導かれている^{1),2)}。さらに、左端に壁が存在する有限領域のダム破壊流れについてもPuay・Hosoda³⁾により理論的に級数解が導かれている。

一方、底面せん断応力を考慮した浅水方程式の場合、

有限領域のダム破壊流れに関しては、仕切り板急開後ある程度時間が経過するとともに慣性項の効果が小さくなり、時間のべき乗で変化する代表長さ（先端位置）で無次元化された水深、流速分布形が時間的に変化しないと仮定して、自己相似解が導かれている^{4), 5)}。

しかし、本研究で対象としている半無限領域のダム破壊流れに関しては、時間が経過しても水深の小さい先端部近傍以外は慣性項が無視できると考えることができず、左に伝播する負の波の位置から先端位置までを表現できる相似解が存在するとは考えられない。Chanson⁶⁾は、フロント近傍を運動方程式中の圧力項と底面せん断応力項のみで近似して得られる波形で表現し、それとRitterの解を接続する方法を提案しているが、負の波のフロント位置から水深ゼロのフロントの間のダム破壊流れを統一して取り扱った理論的研究は著者が知る限り無いようである。

底面摩擦を無視したRitterの解の場合、初期隔壁位置において、時間が経過しても水深は $4h_0/9$ 、フルード数は1の一定値となり、急開後も隔壁位置は水面形の不動点になるため特別な水理学的意味を有する。しかし底面摩擦を考慮した場合には、底面摩擦項が負の波のフロント位置から先端まで連続的に影響を及ぼすため、初期の隔壁位置の水理量は時間的に変化し、初期隔壁位置はRitterの解の場合のような特別な意味を持たない。そこで本研究では、移動する座標系からみれば時間が経過しても水理量が変化しない負の波のフロント位置を新たな原点として、そこから先端までの水面形を一つの分布形として表現することが自然と考え、移動座標系を用いて近似解を導出する解析法の枠組みを提示している。

定式化の手順は以下のとおりである。まず浅水流方程式を左に伝播する負の波で移動する座標系での基礎式に変換する。その後、相似解の存在を仮定せずに、水深と流速を移動座標のべき乗級数として表現するとともに、べき乗の各項の係数を時間の関数と考えて基礎式に代入することで係数の近似解を導出する。

最後に、導かれた近似解と数値解析結果を比較することで、本研究で導かれた近似解の精度と限界について考察し、より精度を向上させるための今後の方針を示す。

2. 基礎式と近似解導出の定式化

(1) 基礎式と移動座標系への変換

基礎式は連続式とサン・ブナンの式で構成される通常の浅水流方程式であり、式(1)および(2)で表わされる。用いている座標系を図-1に示した。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -c_f \frac{u^2}{h} \quad (2)$$

ここに、 x は空間座標、 t は時間、 h は水深、 u は水深

図-2 移動座標系でみたダム破壊流れ

平均流速、 g は重力加速度の大きさ、 c_f は摩擦係数を表す。本研究では、数学的演算を簡単にするために Manning則を使わずに摩擦係数を用いて底面せん断応力を評価している。

式(2)の右辺第1項（底面せん断応力項）を無視した場合、特性曲線法を適用してRitterの解として知られている半無限領域のダム破壊流れの解析解（式(3),(4)）を導くことができる^{1), 2)}。

$$h = \frac{1}{9g} \left(2\sqrt{gh_0} - \frac{x}{t} \right)^2 \quad (3)$$

$$u = \frac{2}{3} \sqrt{gh_0} + \frac{2}{3} \frac{t}{x} \quad (4)$$

本研究では前述したように、図-1に示した水深分布の内、左側に伝播する負の波のフロントから右側に伝播する水深がゼロのフロントまでの再現を考えるため、 (x, t) 系で記述された基礎式(1), (2)を式(5)で示される負の波の先頭で動く移動座標系 (ξ, τ) に座標変換する。

$$\xi = x - ct, \tau = t, c \equiv -\sqrt{gh_0} \quad (5)$$

式(6)に示した関係式を用いて式(3), (4)を書き換えると式(7), (8)となる。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial(-c)}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (6)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial h(u-c)}{\partial \xi} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial \xi} + g \frac{\partial h}{\partial \xi} = -c_f \frac{u^2}{h} \quad (8)$$

c および ξ の定義を式(9)に示した。

$$c \equiv -\sqrt{gh_0}, \xi \equiv x + \sqrt{gh_0}t \quad (9)$$

近似解を導くために、式(7), (8)中の ξ を水深ゼロのフロント位置 l で無次元化した ξ' に変換する。すなわち、式(10)に示した (ξ', τ') 系に座標変換した式(11), (12)を用いる。

$$\xi' = \frac{\xi}{l}, \tau' = \tau \quad (10)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tau'} - \frac{\xi'}{l} \frac{dl}{d\tau} \frac{\partial h}{\partial \xi'} + \frac{1}{l} \frac{\partial h(u-c)}{\partial \xi'} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau'} - \frac{\xi'}{l} \frac{dl}{dt} \frac{\partial u}{\partial \xi'} + (u - c) \frac{1}{l} \frac{\partial u}{\partial \xi'} + g \frac{1}{l} \frac{\partial h}{\partial \xi'} = -c_f \frac{u^2}{h} \quad (12)$$

(ξ', τ') 系でダム破壊流れの解(3), (4)を書き直せば式(13)となる.

$$h = h_0(1 - \xi')^2, \quad u = 2\sqrt{gh_0}\xi' \quad (13)$$

(2) 近似解の導出

本研究では、底面摩擦を無視した場合の解 (式(13)) が有限の項から成る ξ' のべき級数なので、 h と u を式(14a,b)に示した ξ' のべき級数として表現する.

$$h = h_0(1 + a_1(\tau')\xi' + a_2(\tau')\xi'^2 + a_3(\tau')\xi'^3 + \dots) \quad (14a)$$

$$u = u_0(b_1(\tau')\xi' + b_2(\tau')\xi'^2 + b_3(\tau')\xi'^3 + \dots) \quad (14b)$$

ここに、 u_0 は未知の速度スケールであるが、後で係数 b の分母に u_0 が現われて消えることが分かる.

式(14a,b)を式(11), (12)に代入して以下のような演算を行った後、 ξ' の同一のべき乗を有する項をまとめると式(15a,b,c), (16a,b,c)を導くことができる.

$$\frac{\partial h}{\partial \tau'} = h_0 \left(\frac{da_1}{d\tau'} \xi' + \frac{da_2}{d\tau'} \xi'^2 + \frac{da_3}{d\tau'} \xi'^3 + \dots \right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \xi'} = h_0(a_1(\tau') + 2a_2(\tau')\xi' + 3a_3(\tau')\xi'^2 + \dots)$$

[連続式]

$$\xi'^0: -\frac{c}{l} h_0 u_0 b_1 - \frac{c}{l} h_0 a_1 = 0 \quad (15a)$$

$$\xi'^1: \frac{da_1}{d\tau'} - \frac{1}{l} \frac{dl}{d\tau} a_1 + 2\frac{1}{l} u_0(b_2 + a_1 b_1) - 2\frac{c}{l} a_2 = 0 \quad (15b)$$

$$\xi'^2: \frac{da_2}{d\tau'} - 2\frac{1}{l} \frac{dl}{d\tau} a_2 + 3\frac{1}{l} u_0(b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1) - 3\frac{c}{l} a_3 = 0 \quad (15c)$$

[運動方程式]

$$\xi'^0: -\frac{c}{l} u_0 b_1 + \frac{g}{l} h_0 a_1 = 0 \quad (16a)$$

$$\xi'^1: u_0 \frac{db_1}{d\tau'} - \frac{1}{l} \frac{dl}{d\tau} u_0 b_1 + \frac{1}{l} u_0^2 b_1^2 - \frac{c}{l} u_0(a_1 b_1 + 2b_2) + \frac{g}{l} h_0(2a_2 + a_1^2) = 0 \quad (16b)$$

$$\xi'^2: u_0 \left(\frac{db_2}{d\tau'} + a_1 \frac{db_1}{d\tau'} \right) - \frac{1}{l} \frac{dl}{d\tau} u_0(a_1 b_1 + 2b_2) + \frac{1}{l} u_0^2(3b_1 b_2 + a_1 b_1^2) - \frac{c}{l} u_0(3b_3 + 2a_1 b_2 + a_2 b_1) + \frac{g}{l} h_0(3a_3 + 3a_1 a_2) + c_f \frac{u_0}{h_0} b_1^2 = 0 \quad (16c)$$

次に、式(14a,b) の係数を、式(17a,b,c), 式(18a,b,c)および式(19)に示すように、摩擦係数 c_f を微小な無次元パラ

メータと考えると摂動展開する. この際に、 c_f をゼロと置いた式が式(13)に一致するように c_f^0 の係数を決めている.

$$a_1(\tau') = -2 + c_f a_1^{(1)}(\tau') + c_f^2 a_1^{(2)}(\tau') + \dots \quad (17a)$$

$$a_2(\tau') = 1 + c_f a_2^{(1)}(\tau') + c_f^2 a_2^{(2)}(\tau') + \dots \quad (17b)$$

$$a_3(\tau') = c_f a_3^{(1)}(\tau') + c_f^2 a_3^{(2)}(\tau') + \dots \quad (17c)$$

$$b_1(\tau') = -\frac{2c}{u_0} + c_f b_1^{(1)}(\tau') + c_f^2 b_1^{(2)}(\tau') + \dots \quad (18a)$$

$$b_2(\tau') = c_f b_2^{(1)}(\tau') + c_f^2 b_2^{(2)}(\tau') + \dots \quad (18b)$$

$$b_3(\tau') = c_f b_3^{(1)}(\tau') + c_f^2 b_3^{(2)}(\tau') + \dots \quad (18c)$$

$$l(\tau') = -3c\tau' + c_f l^{(1)}(\tau') + c_f^2 l^{(2)}(\tau') + \dots \quad (19)$$

上式を式(15a,b,c), 式(16a,b,c)および水深ゼロのフロントの条件式(20), (21)に代入することで式(17)~式(19)中の係数間の関係式を導くことができる.

$$1 + a_1(\tau') + a_2(\tau') + a_3(\tau') = 0 \quad (20)$$

$$\frac{dl}{d\tau'} = \sqrt{gh_0} + u_0(b_1(\tau') + b_2(\tau') + b_3(\tau')) \quad (21)$$

式(20)はフロントで水深がゼロになる条件式、式(21)はフロントが流体粒子の速度 (水深がゼロの先端では流速) で移動する条件式である.

水深がゼロのフロントにおいて流速が有限だとすると運動方程式(2)の右边が無限大になり浅水流方程式が成立しないようにみえる. しかし、式(2)は元々この式に水深を乗じた運動量式から導かれた式であり、運動量方程式の圧力項は

$$g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^2}{2} \right)$$

となる. この式に例えばフロントで水深がゼロ、水深勾配が無限大になる関数 $h \propto \sqrt{l-x}$ を代入すると $\partial h^2 / \partial x$ は有限になり右边の $c_f u^2$ と釣り合うことになるので数学的には矛盾は生じない.

若干の計算の後に導かれた係数間の関係式を以下に示す. 式(23c)式左辺最終項が底面せん断応力項である. 研究の第一段階として、ここでは c_f^1 までの関係式を考え、 a, b についても ξ' の2乗までを解き、 ξ' の3乗の係数はフロントの条件式(20), (21)を用いて定める.

[連続式]

$$\xi'^0, c_f^1: u_0 b_1^{(1)} = c a_1^{(1)} \quad (22a)$$

$$\xi'^1, c_f^1: -3c\tau' \frac{da_1^{(1)}}{d\tau'} - c a_1^{(1)} + 2 \frac{dl^{(1)}}{d\tau'} + 2u_0 b_2^{(1)} - 4u_0 b_1^{(1)} - 2c a_2^{(1)} = 0 \quad (22b)$$

$$\xi'^2, c_f^1: -3c\tau' \frac{da_2^{(1)}}{d\tau'} - 2 \frac{dl^{(1)}}{d\tau'} + 3u_0 b_3^{(1)} - 6u_0 b_2^{(1)} + 3u_0 b_1^{(1)} - 3c a_3^{(1)} = 0 \quad (22c)$$

[運動方程式]

$$\xi^0, c_f^{-1}: u_0 b_1^{(1)} = c a_1^{(1)} \quad (23a)$$

$$\xi^1, c_f^{-1}: -3cu_0 \tau' \frac{db_1^{(1)}}{d\tau'} + cu_0 b_1^{(1)} + 2c \frac{dl^{(1)}}{d\tau'} + 2c^2 a_1^{(1)} - 2cu_0 b_2^{(1)} + 2gh_0 a_2^{(1)} - 4gh_0 a_1^{(1)} = 0 \quad (23b)$$

$$\xi^2, c_f^{-1}: -3cu_0 \tau' \frac{db_2^{(1)}}{d\tau'} + 6cu_0 \tau' \frac{db_1^{(1)}}{d\tau'} - 4c \frac{dl^{(1)}}{d\tau'} + c^2 a_1^{(1)} - 4c^2 a_2^{(1)} + 3c^2 a_3^{(1)} - cu_0 b_1^{(1)} + 4cu_0 b_2^{(1)} - 3cu_0 b_3^{(1)} - 12 \frac{c^3}{h_0} \tau' = 0 \quad (23c)$$

式(22)および式(23)の考察から、各係数は以下に示す時間 τ' に関するべき級数で与えられることが分かる。

$$a_1^{(1)} = a_{1,1}^{(1)} \tau' + a_{1,2}^{(1)} \tau'^2 + \dots \quad (24a)$$

$$a_2^{(1)} = a_{2,1}^{(1)} \tau' + a_{2,2}^{(1)} \tau'^2 + \dots \quad (24b)$$

$$a_3^{(1)} = a_{3,1}^{(1)} \tau' + a_{3,2}^{(1)} \tau'^2 + \dots \quad (24c)$$

$$b_1^{(1)} = b_{1,1}^{(1)} \tau' + b_{1,2}^{(1)} \tau'^2 + \dots \quad (25a)$$

$$b_2^{(1)} = b_{2,1}^{(1)} \tau' + b_{2,2}^{(1)} \tau'^2 + \dots \quad (25b)$$

$$b_3^{(1)} = b_{3,1}^{(1)} \tau' + b_{3,2}^{(1)} \tau'^2 + \dots \quad (25c)$$

$$l^{(1)} = l_{1,2}^{(1)} \tau'^2 + l_{1,3}^{(1)} \tau'^3 + \dots \quad (26)$$

これらの表示式を式(22a), (22b), (23a), (23b)およびフロントの条件式(20), (21)に代入することにより、 τ' の係数に関する連立方程式(27a)～式(30)が導かれる。 τ'^2 の係数に関しては、底面せん断応力項に由来する式(23c)左辺最終項に相当する項が現れず、係数がすべてゼロになるため記述しない。

$$-4ca_{1,1}^{(1)} - ca_{2,1}^{(1)} + u_0 b_{2,1}^{(1)} + 2l_{1,2}^{(1)} = 0 \quad (27a)$$

$$-2ca_{1,1}^{(1)} + ca_{2,1}^{(1)} - u_0 b_{2,1}^{(1)} + 2l_{1,2}^{(1)} = 0 \quad (27b)$$

$$3ca_{1,1}^{(1)} - 3ca_{2,1}^{(1)} - 3ca_{3,1}^{(1)} - 6u_0 b_{2,1}^{(1)} + 3u_0 b_{3,1}^{(1)} - 4l_{1,2}^{(1)} = 0 \quad (28a)$$

$$8ch_0 a_{1,1}^{(1)} - 4ch_0 a_{2,1}^{(1)} + 3ch_0 a_{3,1}^{(1)} + h_0 u_0 b_{2,1}^{(1)} - 3h_0 u_0 b_{3,1}^{(1)} - 8h_0 l_{1,2}^{(1)} = 12c^2 \quad (28b)$$

[フロントの条件式]

$$a_{1,1}^{(1)} + a_{2,1}^{(1)} + a_{3,1}^{(1)} = 0 \quad (29)$$

$$2l_{1,2}^{(1)} \tau' = u_0 (b_{1,1}^{(1)} + b_{2,1}^{(1)} + b_{3,1}^{(1)}) \tau' \quad (30)$$

この連立方程式を解くと以下の解が導かれる。

$$a_{1,1}^{(1)} = -\frac{18}{13} \frac{c}{h_0}, \quad a_{2,1}^{(1)} = \frac{6}{13} \frac{c}{h_0}, \quad a_{3,1}^{(1)} = \frac{12}{13} \frac{c}{h_0} \quad (31)$$

$$b_{1,1}^{(1)} = -\frac{18}{13} \frac{c^2}{h_0 u_0}, \quad b_{2,1}^{(1)} = -\frac{12}{13} \frac{c^2}{h_0 u_0}, \quad b_{3,1}^{(1)} = -\frac{24}{13} \frac{c^2}{h_0 u_0} \quad (32)$$

$$l_{1,2}^{(1)} = -\frac{27}{13} \frac{c^2}{h_0} \quad (33)$$

3. 近似解と数値計算結果の比較・検討

導かれた近似解と数値計算結果を比較することにより、近似解の適用性とその限界について考察する。

まず、半無限領域のダム破壊流れの数値解析を行った。基礎式は連続式(1)および運動方程式(2)に水深を乗じて保存則形に変換した運動量式を用いた。

数値解析法として洪水氾濫解析⁷⁾に汎用的に用いられている有限体積法を用い、運動量式の慣性項にはTVD-MUSCL法を基本とした離散化を適用した⁸⁾。時間積分には2次精度のAdams-Bashforth法を用いた。水の存在しないドライベッド上には微小水深として $10^{-4}(m)$ を与えて全領域で同じ計算法を適用した。

$h_0 = 0.1(m)$, $c_f = 0.01$ と設定して、格子間隔を $\Delta x = 0.05(m)$ と $0.025(m)$ の二通りで計算した結果を図-3に示した。両者の計算結果は一致しているため、以後の計算には $\Delta x = 0.05(m)$, $\Delta t = 10^{-4}(sec)$ を用いた。

次に、底面せん断応力項を無視した場合($c_f = 0$ でRitter解に対応)の計算結果と理論解(Ritter解)の比較を図-4に示した。両者はよく一致しており、本研究で用いた数値解析法の妥当性をある程度示していると考えられる。

図-3 二通りの格子の大きさによる計算結果の比較（原点は計算領域の左端を示す。）

図-4 底面せん断応力を無視した場合の計算結果と理論解の比較（原点は計算領域の左端を示す。）

図-5にフロント位置と時間の関係を示した。本研究で導出した近似解は式(34)で与えられる。

$$l(\tau') = 3\sqrt{gh_0}\tau' + c_f l^{(1)}(\tau') = 3\sqrt{gh_0}\tau' - c_f \frac{27}{13} g \tau'^2 \quad (34)$$

式(34)は底面せん断応力を無視した理論解よりもフロントの移動速度がかなり遅くなり、数値解析結果に近い値を示している。しかし、 c_f に関して一乗までしか考慮していないため、時間の増加とともにフロント位置が減少する等の非現実的な挙動を示しており、 c_f に関して高次の項（空間分布に関しても ξ の三乗より高次の項）まで考慮した近似解を導出して検討する必要性も示している。高次の項を考慮した場合には、先端位置と時間の関係式として式(35)に示すべき乗展開式が導かれ、 $\tau'^2, \tau'^3, \tau'^4 \dots$ の係数の正負が交互に交代することで収束する極限值が得られると予想している。今後、この点について数学的な検討を行いたい。

$$l(\tau') = 3\sqrt{gh_0}\tau' + c_f l_{,2}^{(1)} \tau'^2 + c_f^2 l_{,3}^{(2)} \tau'^3 + c_f^3 l_{,4}^{(3)} \tau'^4 + \dots \quad (35)$$

ここに、 $l_{,3}^{(2)}, l_{,4}^{(3)}$ はべき乗展開の係数で定数である。

さらに、図-6にはそれぞれの解析法を用いたときの水深分布形を示した。水深の近似解は式(36)で与えられる。

$$\begin{aligned} h &= h_0 \left\{ 1 + \left(-2 + c_f a_1^{(1)}(\tau') \right) \xi' + \left(1 + c_f a_2^{(1)}(\tau') \right) \xi'^2 + c_f a_3^{(1)}(\tau') \xi'^3 \right\} \\ &= h_0 \left\{ 1 + \left(-2 - c_f \frac{18}{13} \frac{c}{h_0} \tau' \right) \xi' + \left(1 + c_f \frac{6}{13} \frac{c}{h_0} \tau' \right) \xi'^2 \right. \\ &\quad \left. + c_f \frac{12}{13} \frac{c}{h_0} \tau' \xi'^3 \right\} \end{aligned} \quad (36)$$

底面せん断応力を無視した理論解と比較して近似解のフロント位置や分布形は数値計算結果にかなり近づいているが、数値解析結果に見られるフロント近傍の大きな負の水深勾配は十分に再現されていない。このことをより詳細に考察するために、近似解(36)の ξ' に関する1次項のみ、1次項と2次項、および3次項までを考慮した分布形を図-7に示した。1次項と2次項を考慮した水深分布はフロントの近くまで数値計算結果とある程度適合しているようにみえる。3次項はフロントでの水深ゼロの条件を満たすように決められた項であり、 ξ' の3乗でフロント近傍の水深分布形状が表現されることになる。

ξ' の3乗項ではフロントの水深の負の大きな勾配を十分には再現できないことが、近似解が数値解析結果と適合しない理由と考えられる。図-8に $1 - \xi'^n$ の分布形を示した。 n の増加とともに $\xi'=1$ において $1 - \xi'^n$ の負の勾配が急激に増加することが分かる。今後、 ξ' の高次の項まで考慮した近似解を導出して、フロント近傍での水深分布の改善について検討する必要があると考えている。近似解の水深分布形の体積が十分保存されていない点についても同様の検討を行う必要がある。

図-5 フロント位置と時間の関係

図-6 水深分布形の比較
(横軸は負の波のフロントからの距離)

図-7 近似解の特性の考察
(横軸は負の波のフロントからの距離)

図-8 $1 - \xi'^n$ の形状特性

流速分布についても理論解、近似解および数値解析結果の比較を図-9に示した。近似解は式(37)で与えられる。

$$u = u_0 \left\{ \left(-\frac{2c}{u_0} + c_f b_1^{(1)}(\tau') \right) \xi' + c_f b_2^{(1)}(\tau') \xi'^2 + c_f b_3^{(1)}(\tau') \xi'^3 \right\} \\ = \left(-2c - c_f \frac{18}{13} \frac{c^2}{h_0} \tau' \right) \xi' - c_f \frac{12}{13} \frac{c^2}{h_0} \tau' \xi'^2 - c_f \frac{24}{13} \frac{c^2}{h_0} \tau' \xi'^3 \quad (37)$$

水深分布の考察と同様に、近似解は理論解と比較して数値解析結果に近い結果を与えるが、フロント近傍では数値計算結果と適合せず、高次の項を考慮した近似解を導出して再検討する必要があると考えられる。

4. おわりに

本研究は、半無限領域のダム破壊流れに関して、底面せん断応力項を含む浅水流方程式に基づいた近似解の導出について考察したものである。

正負のフロント間の流れをChanson⁶⁾が行っているような領域分割をせずに、統一して解析できる方法を提案するとともに近似解を導出し、数値解析結果と比較・検討した。その結果、本研究で導出した近似解は、Ritterの解と比較するとフロント位置やフロント近傍の水深分布に関して数値解析結果とある程度適合しているが、フロント位置での大きな負の水深勾配等が十分には再現されていないことを指摘した。

本研究の範囲では近似解の精度は十分ではないが、 c_f および ξ の高次の項を考慮することで、例えば c_f が0に漸近するときフロントにおいて水深勾配が無限大の分布形がどのように水深勾配有限のRitter解に漸近するのかを検討する数学的枠組みを提示できたと考えている。

今後、できるだけ高次の項を考慮することで底面摩擦を考慮したダム破壊流れの解析解に関するより精度の高い検討を進めていきたい。

図-9 流速分布形の比較

参考文献

- 1) Ritter, A.: Die Fortpflanzung der Wasserwellen, *Vereine Deutscher Ingenieure Zeitschrift*, Vol. 36, No. 2, 33,13 Aug., pp. 947-954, 1892 (in German).
- 2) Stoker, J. J.: *Water Waves*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.
- 3) Puay H.T. and Hosoda T.: Study of inertia-region characteristics of dam break flow of finite extent, *Journal of Applied Mechanics, JSCE*, Vol. 12, pp.729-735, 2009.
- 4) Huppert, H. E.: The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.121, pp.43-58, 1982.
- 5) Puay H. T. and Hosoda, T.: Study of characteristics of inertia and viscous flow regions by means of dam break flow with finite volume, *Journal of Applied Mechanics, JSCE*, Vol.10, pp.757-768, 2007.
- 6) Chanson, H.: Analytical solutions of laminar and turbulent dam break wave, *River Flow 2006 (Proc. of the International Conference on Fluvial Hydraulics)*, Lisbon, Portugal, pp.465-474, 6-8 September 2006.
- 7) 井上和也：開水路非定常流の数値解析法とその水工学への応用に関する研究，京都大学学位論文，1986。
- 8) 藤井孝蔵：流体力学の数値計算法，東京大学出版会，1994。

(2015. 9. 30受付)