不均一地盤におけるダルシー流速分布の統計的性質と水みち形状に関する研究

齋藤 雅彦¹・倉本 拓哉²・中川 啓³

¹正会員 神戸大学助教 大学院工学研究科市民工学専攻 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)
E-mail: msaito@kobe-u.ac.jp

²非会員 防衛省南関東防衛局調達部 (〒231-0003 神奈川県横浜市中区北仲通 5-57)
E-mail: t-kuramoto@s-kanto.rdb.mod.go.jp

³正会員 長崎大学教授 大学院水産・環境科学総合研究科 (〒852-8521 長崎市文教町 1-14)
E-mail: kei-naka@nagasaki-u.ac.jp

地質学的に同一とみなされる帯水層内においても、飽和透水係数等の物性値は空間的なばらつきを有する。これにより、流速分布にもばらつきが生じ、局所的に流速の大きな部分（いわゆる水みち）が存在する可能性がある。しかしながら、これらを現場観測等により精度よく把握することは事実上不可能であり、通常の地下水・浸透流に関するシミュレーションではこのような不均一性は無視されている。本研究では、単純な矩形領域を対象に、透水係数の空間分布モデルを用いて数値シミュレーションを行い、透水係数のばらつきの大きさ、空間解像度および解析領域のアスペクト比の違いが流速分布の統計的性質に与える影響について考察した。その結果、これらの関係は比較的簡易な数式で近似可能であり、また解像度を上げることによって局所的な水みちが表現されることを示した。

Key Words: groundwater, hydraulic conductivity, geostatistical model, numerical simulation

1. 序論

近年、地下水・浸透流問題を解析するための解析手法は急速に発展した。多くのソフトウェアが開発され、さらに計算機の高速度・大容量化によって、数理的にきわめて精緻な解析モデルを比較的容易に構築することも可能となった。一方、同一の帯水層内においても、飽和透水係数等の地盤物性値は空間的なばらつきを有することが知られている^{1,2)}。これにより、流速分布にもばらつきが生じ、局所的に流速の大きな部分（いわゆる水みち）が存在する可能性があるが^{3,4)}、このような地盤物性値のばらつきを現場観測等によって精度よく把握することは事実上不可能である。このため、数値シミュレーションの際には、限られた調査地点において得られた調査結果から、地質学的に同一と見なすことができる帯水層については物性値も一定と仮定せざるを得ない。つまり、通常は地盤情報については極度に単純化されているため、通常のシミュレーションによって得られる結果は、あくまで「平均的」なものであり、必ずしも流れ場の詳細を再現し得るものではないことに留意しなければなら

ない。

また、このような地盤物性値のばらつきに関しては、統計的性質に基づく様々な空間分布モデルが提案されている⁵⁾。しかしながら、これらの多くは定常確率場を仮定したものであり、シミュレーションモデルに導入する際には、解析スケールや解析上の解像度に応じた適切な統計パラメータの設定が困難であることが指摘されている⁶⁾。これに対して、齋藤・川谷^{6,7)}は、透水係数分布に関する理論的考察に基づいて、非定常確率場モデルの一種である自己相似型の空間モデル（以下 f^d 型モデルと記す）を提案し、同モデルが実地盤における透水係数の空間分布特性を適切に模擬し得るとともに、解析スケールや解像度の違いを容易にモデルに反映させることが可能であることを確認している。

本研究では、単純な矩形領域を対象に、透水係数の空間分布モデルとして f^d 型モデルを用いて数値シミュレーションを行い、透水係数のばらつきの大きさ、空間解像度および解析領域のアスペクト比の違いが流速分布の統計的性質に与える影響について考察するとともに、水みち形状に関する検討を試みる。

2. 基礎方程式と透水係数の空間分布モデル

(1) 基礎方程式

本研究で取り扱う浸透場は、帯水層厚が一定の平面 2 次元等方性定常被圧浸透場とする。ここで、湧き出し・吸込みはないものとし、運動方程式はダルシー則に従うとすると、基礎方程式は連続式とダルシー則より以下のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

ここに、 x, y は空間座標、 h はピエゾ水頭、 T は透水量係数 ($=Bk$)、 B は帯水層厚、 k は飽和透水係数である。

境界条件は、水頭が規定される境界では、

$$h = h_b \quad (2)$$

であり、流束が規定される境界では、

$$- \left(T \frac{\partial h}{\partial x} n_x + T \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) = q_b \quad (3)$$

である。 q_b は外部境界における単位長さ当たりの流量、 n_x と n_y は境界にたてた外向法線方向余弦である。

ここで、代表長さ l_0 および飽和透水係数の代表値 k_0 を用いて、式(1)の諸量について以下のように無次元量を定義する。

$$X = \frac{x}{l_0}, \quad Y = \frac{y}{l_0}, \quad H = \frac{h}{l_0}, \quad K = \frac{T}{Bk_0} \quad (4)$$

これにより、式(1)を書き換えると、以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(K \frac{\partial H}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K \frac{\partial H}{\partial Y} \right) = 0 \quad (5)$$

境界条件は、水頭が規定される境界では、

$$H = H_b = h_b/l_0 \quad (6)$$

であり、流束が規定される境界では、以下ようになる。

$$- \left(K \frac{\partial H}{\partial X} n_x + K \frac{\partial H}{\partial Y} n_y \right) = \frac{q_b}{Bk_0} \quad (7)$$

(2) 透水係数の空間分布モデル^{⑧)}

不均一場を生成するために、透水係数の不均一性を表わす空間分布モデルとして f^ζ 型モデルを使用する。これは $\log_{10}K$ のパワースペクトル密度関数が以下のように f^ζ 型となるものである。

$$S(|f|) \propto |f|^{-\zeta} \quad (8)$$

ここに f は空間周波数ベクトル、 $S(|f|)$ はパワースペクトル密度、 ζ は空間的な相似性を表わすパラメータであり、 ζ =空間次元、すなわち 2 次元モデルでは $\zeta=2$ とすると完全な自己相似性を持つ。これは、定常確率場を仮定した空間分布モデルのように特定のスケール（例えば相

図-1 解析領域と境界条件

表-1 パラメータのパターン

N	4, 5, 6, 7, 8, 9
λ_K	0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10
L_x/L_y	1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8

関長)を持たないため、無次元場にも適用可能である。

また、本モデルでは ζ =空間次元とすると、 $\log_{10}K$ は正規分布に従い (K は対数正規分布)、同質地盤における $\log_{10}K$ の分散 σ_K^2 と解像度 (=要素数) M の間には式(9)の関係が成り立つため、解像度に応じた同質地盤を容易に表現可能である^{⑨)}。

$$\sigma_K^2 = \lambda_K \log_{10} M \quad (9)$$

ここに λ_K は不均一性の大きさを表わす無次元パラメータである。

3. 解析条件

(1) 解析領域と境界条件

本研究では、まず正方形領域の不均一場を FFT によって生成する。つぎにアスペクト比 L_x/L_y を決め、図-1 に示すように生成された正方形の不均一場からアスペクト比に応じて矩形の解析領域分の透水係数分布をあてはめる。このとき、式(4)における代表長さは $l_0=L_y$ とする。

また、境界条件は図-1 に示すように平均動水勾配が 1.0 となるように $X=0$ で $H=L_x/L_y$ 、 $X=L_x$ で $H=0$ とし、 $Y=0$ および $Y=1$ では不透水性境界 ($q_b=0$) とする。

(2) 浸透流解析

解析ケースは、表-1 に示すように透水係数のばらつき λ_K を 5 ケース、アスペクト比 L_x/L_y を 7 ケース設定する。また、はじめに生成する正方形場の要素数は $M_0=2^N \times 2^N$ となり、各アスペクト比に対応する要素数が式(9)における解像度 M ($M \leq M_0$) となるが、要素サイズについてはアスペクト比に関わらず N に応じて決定される。これより、各ケースの要素サイズを表すパラメータとしては N を用いる。

(a) $\lambda_K=0.06$, $N=8$ ($M=32,768$), $L_X/L_Y=2$

(b) $\lambda_K=0.04$, $N=6$ ($M=1,024$), $L_X/L_Y=4$

図-2 透水係数分布とダルシー流速分布 (左; 透水係数分布, 右; ダルシー流速分布)

図-3 流速ベクトルの大きさの頻度分布の一例
($N=9$, $\lambda_K=0.04$, $L_X/L_Y=1$)

(a) $L_X/L_Y=1/8$

(b) $L_X/L_Y=4$

図-4 解像度 M と μ_V の関係

また, $\log_{10}K$ の平均値 λ_K は 0.0 ($K_{AV}=1.0$) とする. これらの組み合わせにより 210 通りの無次元不均一場をそれぞれ 100 個生成する. つぎに, それぞれの場に対して有限要素法による浸透流解析を行い, 流速分布を求める.

図-2 に透水係数分布と流速分布の一例を示す. これより, ばらつきが大きく, また解像度が大きい場合には図-2(a)の矢印で示すように, 局所的に流速の大きい部分である水みちが形成されているのがわかる. また, 図-3 は, 得られたダルシー流速ベクトルの大きさ $|V|$ の対数変換値 $\log_{10}|V|$ の頻度分布の一例である. これより, 頻度分布は概ね対数正規分布に従っていることがわかる.

4. 解析結果と考察

(1) ダルシー流速の平均値について

まず, $\log_{10}|V|$ の平均値を μ_V とし, その性質について検討する. 図-4 は, それぞれ $L_X/L_Y=1/8$ および $L_X/L_Y=4$ に対

する解像度 M と μ_V の関係を示したものである. これより, 解像度が大きくなるとダルシー流速の平均値が低下する傾向が見られ, 両者の関係は対数関数で近似可能であることがわかる. これは, 先に示したように, 解像度が大きくなると局所的な水みち部分がより明確になり, その他の大部分の流速が相対的に小さくなるためと考えられる. 加えて, 透水係数のばらつき λ_K が大きくなるほど μ_V が小さくなる傾向も確認できる. 以下では, これらの関係を次式で近似することを試みる.

$$\mu_V = \lambda_m \log \left(\frac{M}{\delta_m} \right) \quad (10)$$

ここに, λ_m と δ_m はフィッティングパラメータである.

図-5 に一例として $L_X/L_Y=1/2$ における λ_K と λ_m の関係を求めたものを示す. これより, λ_K と λ_m の関係は次式のように原点を通る直線で近似可能であることがわかる.

$$\lambda_m = \varepsilon_m \lambda_K \quad (11)$$

図-5 $L_X/L_Y=1/2$ における λ_K と λ_m の関係

図-6 アスペクト比と ε_m の関係

図-7 アスペクト比と δ_m の関係

(a) $L_X/L_Y=1/8$

(b) $L_X/L_Y=4$

図-8 解像度 M と σ_v^2 の関係

図-9 $L_X/L_Y=1/2$ における λ_K と λ_v の関係

図-10 アスペクト比と ε_v の関係

図-11 アスペクト比と δ_v の関係

ここに、 ε_m はフィッティングパラメータである。また、図-6は、アスペクト比と ε_m の関係を求めたものであるが、パラメータ ε_m はアスペクト比にはほとんど依存せず、概ね一定値($\varepsilon_m=-0.28$)で近似可能と考えられる。

一方、 δ_m については、図-4において $\mu_v=0$ となる M の値に相当するが、図-4(a)、(b)より λ_K には依存せず、アスペクト比のみに依存していることがわかる。図-7は、アスペクト比と δ_m の関係を示す。これより、両者の関係は次式で近似可能である。

$$\delta_m = 0.137 \left(\frac{L_X}{L_Y} \right)^{-2.00} \quad (12)$$

(2) ダルシー流速の分散について

$\log_{10}|V|$ の分散を σ_v^2 とし、その性質について考察する。図-8は、それぞれ $L_X/L_Y=1/8$ および $L_X/L_Y=4$ に対する解像度 M と σ_v^2 の関係を示したものである。これより、解像

度が大きくなるほど分散は大きくなることがわかる。これは、ここで用いている透水係数の空間分布モデルでは、式(9)で示したように、透水係数の分散 σ_v^2 が解像度に依存するため、これと同様の性質を持つためである。

また、以下では、 λ_K 、 M 、および L_X/L_Y と σ_v^2 の関係の評価を試みる。図-8より、これらの関係は式(10)と同様に、次式で近似可能と考えられる。

$$\sigma_v^2 = \lambda_v \log \left(\frac{M}{\delta_v} \right) \quad (13)$$

ここに、 λ_v と δ_v はフィッティングパラメータである。

図-9に $L_X/L_Y=1/2$ における λ_K と λ_v の関係を示す。式(11)と同様に、両者の関係も以下のように原点を通る直線で近似可能である。

(a) 透水係数分布 ($K > \mu_K + \sigma_K$)

(b) 流速 $|V|$ の分布 ($V > \mu_V + \sigma_V$)

図-12 透水係数分布と流速分布 ($\lambda_K=0.06$, $N=9$, $L_X/L_Y=1$)

(a) $\lambda_K=0.02$

(b) $\lambda_K=0.10$

図-13 λ_K の相違に対する流速分布と水頭分布の比較 ($N=9$, $V > \mu_V + \sigma_V$)

(a) $N=5$

(b) $N=8$

図-14 N の相違に対する流速分布と水頭分布の比較 ($\lambda_K=0.06$, $V > \mu_V + \sigma_V$)

$$\lambda_V = \varepsilon_V \lambda_K \quad (14)$$

ここに、 ε_V はフィッティングパラメータである。また、図-10 にアスペクト比と σ_V の関係を示す。図-6 と同様にパラメータ ε_V はアスペクト比に依存せず、ほぼ一定値 ($\sigma_V=0.39$) で近似可能と考えられる。

式(13)における δ_V についても、図-8 において $\sigma_V^2 \rightarrow 0$ となる M の値に相当し、 λ_K には依存せず、アスペクト比のみに依存していることがわかる。図-11 は、アスペクト比と δ_V の関係を示す。これより、両者の関係は次式で近似可能である。

$$\delta_V = 0.438 \left(\frac{L_X}{L_Y} \right)^{1.353} \quad (15)$$

以上の検討により、矩形領域の1次元の流れ場においては、ダルシー流速の大きさの平均値 μ_V および分散 σ_V^2 と、透水係数のばらつきの大きさ λ_K 、解像度 M 、およびアスペクト比 L_X/L_Y の関係は、両者とも同様の関数形で比較的簡易に表現可能であることがわかる。

(3) 水みちの性質について

まず、透水係数の対数値と流速ベクトルの大きさ $\log_{10}|V|$ の分布を比較する。図-12 は、両者とも平均値+標準偏差より大きい要素のみを黒く着色して示しているが、赤○印で囲まれた部分のように透水係数の小さい部分にも流速の大きい部分が存在し、また青○印で示した部分のように透水係数が大きくても流速は小さい部分が現れ、

流速ベクトル分布は水みち状を示していることが分かる。

つぎに、図-13 は同一の解像度で異なる λ_K に対する流速分布と水頭分布を比較したものである。ここで、流速分布は、図-12 と同様に平均値+標準偏差より大きい部分のみを示している。まず、 $\lambda_K=0.02$ (透水係数のばらつきが小さい場合) では、等水頭線はほぼ等間隔となっているのに対し、 $\lambda_K=0.10$ (透水係数のばらつきが大きい場合) では、上流側の間隔が狭く、下流側が広がっており、顕著な相違が生じている。これに対し、流速分布が大きい部分については、両者は概ね同様に分布しており、水みち形状については、透水係数分布のばらつきの大きさ λ_K にはほとんど依存していないことがわかる。一方、図-14 は、同一の λ_K で解像度が異なる場合の水頭分布と流速分布を比較したものである。水頭分布については、解像度の違いにはほとんど依存せず、等水頭線の形状は概ね同様となっている。これは、浸透場のばらつきの大きさ σ_K を解像度に応じて λ_K によって表現する自己相似型空間分布モデルの特徴の一つである⁷⁾。一方、流速分布については解像度を大きくするに従って、局所的に流速の大きい部分がより多く現れている。これより、比較的粗い解像度では、主要な水みちのみを捉え、解像度を大きくするに従ってより詳細な水みちが得られることがわかる。これは、透水係数分布モデルの自己相似性由来するものと考えられる。なお、ここでは発生させた100通りの透水係数分布のうち、代表的な一例について考察しているが、その他の分布パターンについても概ね共通の性質を有することを確認している。

5. 結論

本研究では、単純な矩形領域を対象に、透水係数の空間分布モデルとして f -型モデルを用いて数値シミュレーションを行い、透水係数のばらつきの大きさ、空間解像度および解析領域のアスペクト比の違いが、流速分布の統計的性質に与える影響について考察するとともに、水みち形状に関する検討を試みた。これにより得られた結果を以下にまとめる。

- 1) ダルシー流速の平均値は、解像度が大きくなると低下すること、また、透水係数のばらつきが大きくなるほど平均値は小さくなる傾向を確認した。加えて、透水係数のばらつき、空間解像度、およびアスペクト比と、ダルシー流速の平均値の関係を明らかにし、定量的に評価する簡易な方法を示した。
- 2) ダルシー流速の分散は解像度が大きくなると増加すること、透水係数のばらつきが大きくなるほど分散も大きくなる傾向を確認した。加えてダルシー流速の分散についても、平均値と同様に透水係数のばらつき、空間解像度、およびアスペクト比との関係を明らかにし、定量的に評価する簡易な方法を示した。
- 3) 水みちの性質について検討し、透水係数が大きい部分と流速の大きい部分は必ずしも一致せず、流速ベクトル分布は明らかに水みちを形成することを示した。また、水みち形状については、透水係数分布のばらつきの大きさにはほとんど依存しないこと、また、比較的粗い解像度では、主要な水みちのみを捉え、解像度を大きくするに従ってより詳細な水みちが得られることを示した。

これらの結果は、単純な 2 次元矩形領域を対象としたものであり、解析対象を近似的に矩形領域で表現可能な場合に対しては有効と考える。また、より複雑な解析領

域や 3 次元流れ場についても、水みちの性質に関する部分については、定性的には同様と考える。これより、地盤を均一と仮定した解析により得られたダルシー流速分布に対して、高精度ではないが実際にはどの程度のばらつきを考慮すべきかを定量的に把握することが可能であると考えられる。一方、このような結果が得られた詳細なメカニズムについては不明な点が多く、今後の検討課題としたい。

謝辞：本研究は JSPS 科研費（26550069）の助成を受けたものである。ここに記して謝意を表す。

参考文献

- 1) Freeze, R. A. : A stochastic-conceptual analysis of one-dimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media, Water Resour. Res., Vol.11, No.5, pp.725-741, 1975.
- 2) Smith, L. and Freeze, R. A. : Stochastic analysis of steady state groundwater flow in a bounded domain, 2. Two-dimensional simulations, Water Resour. Res., Vol.15, No.6, pp.1543-1559, 1979.
- 3) 水みち研究会：水みちを探る-井戸と湧泉と地下水の保全のために-, けやき出版, 69p., 1992.
- 4) 水みち研究会：井戸と水みち, 北斗出版, 202p., 1998.
- 5) de Marsily, G. : Quantitative Hydrogeology, Academic Press Inc., 303p., 1986.
- 6) 齋藤雅彦, 川谷健：透水係数の空間分布モデルの適用性に関する一考察, 土木学会論文集, No.694, III-57, pp.245-258, 2001.
- 7) 齋藤雅彦, 川谷健：透水係数の空間分布に関する理論的考察, 土木学会論文集, No.645, III-50, pp.103-114, 2000.
- 8) 齋藤雅彦, 西村由紀子, 中川啓：自己相似型不均一地盤モデルを用いた巨視的分散長の定量的評価に関する研究, 地下水学会誌, Vol.53, No.4, pp.343-355, 2011.

(2016. 9. 30 受付)

STUDY ON STATISTICAL PROPERTIES OF DARCY VELOCITY DISTRIBUTION AND FORM OF WATER PATH IN NON-UNIFORM FIELD

Masahiko SAITO, Takuya KURAMOTO and Kei NAKAGAWA

The physical properties of aquifer such as hydraulic conductivity vary spatially even if the aquifer seems to be uniform. This causes spatial varieties of Darcy velocity distribution, and water path flow may exist in the aquifer. However, it is impossible to grasp the spatial distribution of hydraulic properties by field test, and such an inhomogeneity is ignored in the numerical simulation for groundwater flow. In this study, numerical simulations were carried out using the spatial distribution model of hydraulic conductivity for simple rectangular domains. And the influences of the spatial resolution and the aspect ratio of the domains for statistical property of the velocity distribution were investigated. It was shown that local water path can be expressed by numerical simulation using spatial distribution model of hydraulic conductivity.