一次元空間における都市階層構造の創発: relocation cost を考慮した 多産業 Core-Periphery モデルの分岐解析

高山 雄貴¹・赤松 隆²・福島 晶子³

¹正会員 愛媛大学助教 大学院理工学研究科 (〒 790-8577 愛媛県松山市文京町 3 番)

E-mail: takayama@cee.ehime-u.ac.jp

²正会員 東北大学教授 大学院情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)

E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

³正会員 国土交通省 道路局 道路交通管理課 (〒 100-8918 東京都千代田区霞ヶ関 2-1-3)

E-mail: fukushima-a8310@mlit.go.jp

本研究の目的は、階層的な都市システムが形成されるメカニズムを明らかにすることである。具体的には、立地変更に伴う費用 (relocation cost) が都市システムの産業立地パターンを階層化させることを示す。この目的を達成するために、Pflüger¹⁾による 1 産業 Core-Periphery (CP) モデルを多産業の枠組みに拡張し、産業毎に異なる relocation cost を導入する。そして、Akamatsu et al.²⁾、Ikeda et al.³⁾により提案された解析的・数値的アプローチを応用することで、多産業 CP モデルの分岐特性を明らかにする。その結果、階層的な産業立地パターンが安定的な均衡状態として創発することが示される。

Key Words : urban hierarchy, relocation cost, core-periphery model, bifurcation analysis

1. はじめに

企業や家計の立地変更には、立地慣性と呼ばれる慣性力が働くことが地理学分野などでよく知られている。これは、企業や家計の立地変更には大きな費用が必要となることから、直観的に理解できる。この立地変更のための費用 (以降、relocation cost) は、通常考えられる直接的な費用のみならず、例えば、労働力・市場・情報の不確実性に伴う広い意味での費用も含めて考えることができる。実際、Burda⁴⁾、O'Connell⁵⁾は、不確実性の存在が移住の障壁を高くすることを理論的に明らかにしている。

この relocation cost による慣性力は、企業や家計の立地変更を妨げる方向の力を働かせるものの、必ずしも都市システムの構造を完全に固定するものではない。実際、Fujita⁶⁾でも述べられているように、アメリカや日本などの立地慣性が存在する現実の都市システムにおいて、これまで劇的な構造変化が起こってきた。そして、その結果として、過去の状態に依存した新たな都市システムが形成されている。

この慣性力の強度は、一般には立地主体毎に大きく異なっており、その異質性が新たに形成される都市システムの構造に大きな影響を及ぼしていると考えられる。これは、relocation cost が比較的小さい

と考えられる第 3 次産業の都市集積が他の産業と比べて顕著であるという事実からも推察できる。すなわち、都市システムの劇的な構造変化は、relocation cost が比較的低い企業の急激な都市集積によりもたらされ、その一方で、relocation cost が比較的高い企業は強い慣性力により空間分布が変化しない。その結果、都市システムの階層化が進んでいく。

この産業立地パターンの階層構造は、古くから数多くの実証研究で確認されている (e.g., Christaller⁷⁾, Berry⁸⁾, Marshall⁹⁾, Mori et al.¹⁰⁾)。具体的には、「小都市の産業集合が大都市の産業集合の部分集合となる」という“階層原理”と呼ばれる規則性が、実際の都市システムで成立することが示されている。この規則性は、産業構造が大幅に変化しているにもかかわらず、長年に渡り頑健に成立していることが良く知られている。しかし、その一方で、この規則性が成り立つ明確な経済メカニズムは、これまで殆ど明らかにされていない。

この規則性を生み出すメカニズムの理解は、実際の地域・都市政策を適切に実施するための基礎となるものである。例えば、企業誘致や交通基盤整備 (e.g., 高速道路・空港・港湾整備) の長期的な影響を評価する際には、産業立地パターンの変化を予測するために、階層原理のメカニズムを考慮することが不可欠である。特に、近年、各地で見られる大規模工場の国外移転、大都市

圏での都心回帰や地方都市の産業空洞化などといった複雑な産業構造の変化は、そのメカニズムを理解することの重要性を増大させている。それゆえ、このような規則性が成立・維持される経済メカニズムに関する研究が古くから行われてきたものの、現在まで上述した立地慣性に着目した研究は存在しない。

そこで、本稿では、産業毎に異なる *relocation cost* が都市システムの産業立地パターンに与える影響を、新経済地理学モデルにより明らかにする。そして、立地変更の慣性力が階層的な産業構造を持つ都市システムを形成・維持させることを示す。そのために、*relocation cost* を導入した多産業 Core-Periphery (CP) モデルを構築する。そして、Akamatsu et al.²⁾、赤松ら¹¹⁾、高山・赤松¹²⁾ の手法を応用することで、多産業 CP モデルにおいて輸送費用の減少に伴い発生する分岐の大域的特性を明らかにする。ただし、本稿で示す *relocation cost* を導入した多産業 CP モデルには、非常に多くの安定均衡状態が存在しており、その初期状態に応じて輸送費用の減少に伴い創発する集積パターンが大きく変化し得る。そこで、本稿では、その代表的ケースとして、産業構造が自律的に階層化することを示すために、全産業が各都市に均等に分布している (i.e., 階層構造を持たない) 状態からの集積パターンの推移を解析的に示す¹⁾。

企業や家計の立地変更に費用がかかることを考慮した都市集積モデルに関する研究は、これまでもいくつか行われてきた。その殆どは、Krugman¹³⁾、Baldwin¹⁴⁾、Ottaviano¹⁵⁾、織田澤・赤松¹⁶⁾、Oyama¹⁷⁾ に代表される、予見的 (forward-looking) な労働者を考慮した研究である。しかし、これらの研究は、全て単一種類の産業のみが存在する状況を扱っており、階層的な産業構造を説明しようとするものではない。これらとは異なる方向の研究として、異質な企業の *sorting* 現象を *relocation cost* を導入した Melitz¹⁸⁾ モデルにより説明した Baldwin and Okubo¹⁹⁾ が挙げられる。しかし、この研究は、企業の移住に関する混雑効果を導入するために *relocation cost* を導入しているに過ぎない。より具体的には、*relocation cost* は、単位時間当たりの移住企業数の関数で表現されており、立地変更自体を妨げる慣性力を表現しているわけではない。したがって、従来研究には、*relocation cost* による立地変更の慣性力が産業立地パターンに与える影響を調べたものは存在しない。

階層的な産業構造を持つ都市システムの形成を説明する理論は古くから発展しており、その代表的理論は

古典的な経済地理学分野の Christaller⁷⁾、Lösch²⁰⁾ の中心地理論である。この理論は、規模の経済と輸送費用のトレード・オフにより、産業の階層構造が創発することを示唆している。しかし、その結論を説明するためのミクロ経済学的基礎の欠如が古くから指摘されてきた。この問題に対して、Eaton and Lipsey²¹⁾ は、経済モデルにより階層的な産業構造の形成を説明している。しかし、このモデルには複数の均衡解が存在するにもかかわらず、その安定性が確認されていないという問題が残されている。

上記の課題を解決した研究は、近年、新経済地理学分野を中心に蓄積されつつある。その代表的な研究は、Fujita et al.²²⁾、Tabuchi and Thisse²³⁾、Hsu²⁴⁾ である。Fujita et al. は、Krugman²⁵⁾ の CP モデルを連続空間・多産業の枠組みに拡張し、数値計算により階層的な都市システムが創発することを確認している。Tabuchi and Thisse は、多産業 CP モデルにおいて、輸送費用の低下に伴う均衡解の分岐現象により産業構造が階層化することを解析的に示している。さらに、Hsu は、企業間の空間競争を考慮した企業立地モデルにより、産業構造が階層化する集積パターンが安定均衡解となることを示している。しかし、これらの研究では、*relocation cost* が集積パターンに与える影響を全く考慮していない。したがって、本研究で得られる結果は、既存研究にはない、都市階層構造が形成・維持される新たなメカニズムを示すものである。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、2 章では、*relocation cost* を導入した多産業 CP モデルの枠組みを示し、調整ダイナミクス、均衡状態とその安定性を定義する。次に、3 章で都市システムの空間構造を設定した上で、分岐解析の準備のために固有値解析を行う。その結果を利用して、都市内の産業構造が階層化する条件を 4 章で明らかにする。5 章では、階層化した産業構造が、その後、どのように進展するのかを示す。6 章では、計算分岐理論に基づいた数値実験により、より詳細な産業の集積パターンを示す。最後に、7 章で結論を述べる。

2. 多産業 Core-Periphery モデル

本稿では、Pflüger¹⁾ の 2 都市 1 産業モデル²⁾ を、*relocation cost* を導入した多都市・多産業モデルに拡張する。そこで、本章では、そのモデルの枠組みを示したのち、均衡状態とその安定性を定義する。

¹⁾ 初期状態の仮定は、産業の階層構造が自律的に創発することを示すためのものである。異なる初期状態を考えても、人口分布の対称性さえ存在していれば、本稿で示す解析手法と全く同様の方法により、輸送費用の減少に伴う集積パターンの進展を解析的に示すことができる。また、初期の人口分布に対称性がない場合でも、6 章で用いる計算分岐理論を利用すれば、数値的に集積パターンの進展を調べることができる。

²⁾ 本稿では、Pflüger¹⁾ を基礎としたモデルを分析しているが、その結果は本モデル特有のものではないことに注意が必要である。Akamatsu and Takayama²⁶⁾、Ikeda et al.³⁾ で示されているように、Krugman²⁵⁾、Forslid and Ottaviano²⁷⁾ などの新経済地理学モデルを用いても、本質的な結果は同じものになる。

(1) モデルの設定

a) 都市・経済環境の設定

離散的な K 個の都市が存在する都市経済システムを考える。労働者(かつ消費者)は、技術・知識水準に応じて *skilled worker* と *unskilled worker* に分類される。*skilled worker* は、 T 種類に分けられる高度な技術のうち、いずれか1つを所有する労働者であり、その技術を活用して起業する *self-employed entrepreneur* である。この労働者は、都市間を自由に移動できるものの、移住の際に所有する技術の種類に応じて *relocation cost* が必要となると仮定する。*unskilled worker* は、高度な技術を持たず、労働集約的作業に従事する労働者である。また、すべての都市に一樣に分布し、労働・居住する都市を選択できない。技術 $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ を所有する *skilled worker* (以降、*skilled worker t*)、*unskilled worker* の総人口は、各々、一定値 $H^{(t)}, L$ であり、全都市に一樣に分布する *unskilled worker* の各都市の人口は $l = L/K$ と表す³。

この経済には、農業部門と工業部門の2部門が存在する⁴。農業部門は、収穫一定の技術により、*unskilled worker* の労働を生産要素として1種類の同質な財(以降、農業財)を生産する完全競争的な部門である。工業部門は、収穫逓増の技術により、差別化された財を生産する独占競争的な部門である。この部門は、必要となる技術の種類に応じて T 種類の産業に分けられ、産業 $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ の企業(以降、企業 t)は、財(以降、工業財 t)を生産するために、生産要素として *skilled worker t* 及び *unskilled worker* の労働を投入する必要がある。ある都市で生産された財は、隣接する都市間を結ぶ交通ネットワークにより他の都市へ輸送することができるため、どの都市でも消費することができる。

b) 消費者行動

都市 i の消費者は、効用 $U(\{C_i^{(t)}\}, C_i^A)$ を最大化する、工業財と農業財の消費量 $\{C_i^{(t)}\}, C_i^A$ を決定する：

$$\max_{\{C_i^{(t)}\}, C_i^A} U(\{C_i^{(t)}\}, C_i^A) = \sum_t \mu^{(t)} \ln C_i^{(t)} + C_i^A \quad (1a)$$

$$\text{s.t. } p_i^A C_i^A + \sum_t \sum_j \int_0^{n_j^{(t)}} p_{ji}^{(t)}(k) q_{ji}^{(t)}(k) dk = Y_i. \quad (1b)$$

ここで、 $\mu^{(t)} > 0$ は工業財 t への選好の強さを表すパラメータ、 p_i^A は都市 i における農業財の価格である。 k は、

³ *skilled worker t* に関する仮定は、Krugman²⁸⁾, Zeng²⁹⁾, Takatsuka and Zeng³⁰⁾と同様、*skilled worker* は従事する産業を変更することができないという意味を持つ。ただし、この仮定は特殊なものではない。例えば、*skilled worker* が特定の産業に従事するには他の産業にはない特別な能力が必要となるため、従事する産業を変更するには多大なコストがかかるという状況を考えることに対応している。

⁴ ここで用いた“農業”・“工業”という表現自体に大きな意味はない。ここで重要なのは、生産部門が完全競争・不完全競争的な部門に分けられる点のみである。

各産業 t の工業財の種類を表すインデックスであり、常に工業財の種類が連続的かつ無限に存在すると仮定するため、連続変数とする。 $p_{ji}^{(t)}(k), q_{ji}^{(t)}(k)$ は、各々、都市 j で生産され、都市 i で消費される工業財 t の種類毎の価格、消費量を表す。 $n_j^{(t)}$ は都市 j で生産された工業財 t のバリエーション数である。 Y_i は、都市 i の労働者の所得であり、*skilled worker t* の所得は賃金 $w_i^{(t)}$ 、*unskilled worker* の所得は賃金 w_i^L と一致する。また、工業財 t の消費量 $C_i^{(t)}$ は、工業財 t の消費量 $q_{ji}^{(t)}(k)$ を代替の弾力性 $\sigma^{(t)} > 1$ を用いて集計した、

$$C_i^{(t)} = \left(\sum_j \int_0^{n_j^{(t)}} q_{ji}^{(t)}(k)^{(\sigma^{(t)}-1)/\sigma^{(t)}} dk \right)^{\sigma^{(t)}/(\sigma^{(t)}-1)} \quad (2)$$

によって定義される。

効用関数が *homothetic* であることを利用して効用最大化問題(1)を解くことにより、農業財・工業財 t の消費量が価格 $p_i^A, p_{ji}^{(t)}(k)$ 、所得 Y_i の関数として、次のように導出される：

$$C_i^A = \frac{Y_i}{p_i^A} - \sum_t \mu^{(t)}, \quad C_i^{(t)} = \mu^{(t)} \frac{p_i^A}{\rho_i^{(t)}}, \quad (3a)$$

$$q_{ji}^{(t)}(k) = \mu^{(t)} \frac{p_i^A \{ \rho_i^{(t)} \}^{\sigma^{(t)}-1}}{\{ p_{ji}^{(t)}(k) \}^{\sigma^{(t)}}}. \quad (3b)$$

ここで、 $\rho_i^{(t)}$ は、都市 i での工業財 t の価格指数

$$\rho_i^{(t)} = \left(\sum_j \int_0^{n_j^{(t)}} p_{ji}^{(t)}(k)^{1-\sigma^{(t)}} dk \right)^{1/(1-\sigma^{(t)})} \quad (4)$$

である。以上の結果より、都市 i 全体で消費する都市 j で生産した工業財 t の種類 k の消費量 $Q_{ji}^{(t)}(k)$ は、*skilled worker t* の各都市の人口を $h^{(t)} = [h_0^{(t)}, h_1^{(t)}, \dots, h_{K-1}^{(t)}]^T$ とすると、次のように表される：

$$Q_{ji}^{(t)}(k) = q_{ji}^{(t)}(k) (H_i + l). \quad (5)$$

ここで、 $H_i \equiv \sum_t h_i^{(t)}$ である。

c) 企業行動

農業部門では、*unskilled worker* の労働のみを生産要素とし、同質な財を完全競争のもとで収穫一定の技術により生産する。この場合、一般性を失うことなく、1単位の *unskilled worker* の労働により、1単位の財が生産されると基準化できる。したがって、限界費用原理から、農業財の価格 p_i^A は、*unskilled worker* の賃金 w_i^L と等しくなる。また、農業財の輸送には費用がかからないニューメレール財と仮定するため、どの都市においても農業財の価格、*unskilled worker* の賃金は等しい (i.e., $p_i^A = w_i^L = 1 \forall i$)⁵。

⁵ 各都市の *unskilled worker* の賃金 w_i^L が農業財価格 p_i^A と一致するには、農業財が全ての都市で生産される必要がある。本稿では、この条件は常に満たされると仮定する。すなわち、 $\beta x_i < 1$ が任意の都市 i で成立する状況を考える。

工業部門では、企業 t は、同産業の企業間で Dixit-Stiglitz³¹⁾ 型の独占的競争を行う。すなわち、自由に参入・撤退できると仮定した企業が、収穫逓増の技術により差別化された工業財 t を生産する。規模の経済、消費者の多様性の選好、ならびに供給できる財の種類に制限がないことから、どの企業も必ず他企業とは異なる種類の財を生産する。そのため、工業財 t を生産する企業 t の数は、供給される財の種類 $n_i^{(t)}$ に等しい。また、企業 t が工業財 t を生産するためには、skilled worker t の労働を 1 単位と、生産量 $x_i^{(t)}(k)$ に応じて unskilled worker の労働を $\beta^{(t)}x_i^{(t)}(k)$ 単位、生産要素として投入する必要があると仮定する。この仮定から、生産を行う企業 t の数 $n_i^{(t)}$ は、都市 i に居住する skilled worker t の人口 $h_i^{(t)}$ と等しくなる (i.e., $n_i^{(t)} = h_i^{(t)}$)。また、工業財 t の生産費用関数は、skilled worker t の賃金を $w_i^{(t)}$ とすると、以下のように与えられる：

$$c(x_i^{(t)}(k), w_i^{(t)}) = w_i^{(t)} + \beta^{(t)}x_i^{(t)}(k). \quad (6)$$

工業財 t の輸送には費用がかかると考える。この輸送費用は、氷塊費用の形をとると仮定する。すなわち、都市 i から j に 1 単位の工業財 t を輸送すると、1 単位のうち $1/\tau_{ij}^{(t)}$ 単位だけが実際に到着し、残りは溶けてしまうと考える。そのため、工業財 t の需要量 $Q_{ij}^{(t)}(k)$ と供給量 $x_i^{(t)}(k)$ との間に次の関係が成立する：

$$x_i^{(t)}(k) = \sum_j \tau_{ij}^{(t)} Q_{ij}^{(t)}(k). \quad (7)$$

工業部門では、Dixit-Stiglitz 型の独占的競争を仮定しているため、企業 t は価格指数 $\rho_i^{(t)}$ 、消費者の需要量 (5) を所与として自ら生産する工業財 t の価格 $p_{ij}^{(t)}(k)$ を設定する。そのため、企業 t の利潤最大化行動は、次のように定式化できる：

$$\max_{\{p_{ij}^{(t)}(k)\}} \Pi_i^{(t)}(k) = \sum_j p_{ij}^{(t)}(k) Q_{ij}^{(t)}(k) - c(x_i^{(t)}(k), w_i^{(t)}). \quad (8)$$

この企業の最適条件と工業財 t の需要量 (5) より、工業財の価格 $p_{ij}^{(t)}(k)$ が次のように導出される：

$$p_{ij}^{(t)}(k) = \frac{\sigma^{(t)}\beta^{(t)}}{\sigma^{(t)}-1} \tau_{ij}^{(t)}. \quad (9)$$

この結果から明らかなように、工業財 t の価格は財の種類 k には依存しない。したがって、 $Q_{ij}^{(t)}(k), x_i^{(t)}(k)$ も財の種類 k には依存しない。そこで、以降では k を省略し、各々、 $p_{ij}^{(t)}, Q_{ij}^{(t)}, x_i^{(t)}$ と表記する。

(2) 短期均衡条件と均衡解の導出

都市経済システムにおいて、財の生産・消費量と賃金、財価格は、skilled worker t が移住できない程、短期間で均衡すると仮定する。この状態を“短期均衡状態”と呼ぼう。短期均衡状態では、企業の参入・撤退が自由であることから、企業 t の利潤が常にゼロとなる。

したがって、skilled worker t の賃金は次のように表される：

$$w_i^{(t)} = \left(\sum_j p_{ij}^{(t)} Q_{ij}^{(t)} - \beta^{(t)} x_i^{(t)} \right). \quad (10)$$

さらに、短期均衡状態では、工業財 t の市場清算条件が成立する。工業財には輸送費用がかかるため、この市場清算条件は、式 (7) で与えられる。

以上の短期均衡条件から得られる短期均衡解を示そう。都市 i の価格指数 $\rho_i^{(t)}$ は、式 (4) に式 (9) を代入することで、また、skilled worker t の均衡賃金 $w_i^{(t)}$ は、式 (10) に価格指数 $\rho_i^{(t)}$ 、式 (5), (7), (9) を代入することで、以下のように導出される：

$$\rho_i^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)}) = \frac{\sigma^{(t)}\beta^{(t)}}{\sigma^{(t)}-1} \left(\Delta_i^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)}) \right)^{1/(1-\sigma^{(t)})}, \quad (11)$$

$$w_i^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)}) = \frac{\mu^{(t)}}{\sigma^{(t)}} \sum_j \left(\frac{d_{ij}^{(t)}}{\Delta_j^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)})} \right) (H_j + l). \quad (12)$$

ここで、 $d_{ij}^{(t)}$ は都市 i, j 間の取引に関する条件を表わし、

$$d_{ij}^{(t)} \equiv \left\{ \tau_{ij}^{(t)} \right\}^{1-\sigma^{(t)}} \quad (13)$$

と定義される。また、 $\Delta_i^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)})$ は都市 i の工業財市場の大きさを表わす指標であり、以下のように定義される：

$$\Delta_i^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)}) \equiv \sum_j d_{ji}^{(t)} h_j^{(t)}. \quad (14)$$

式 (5), (9), (11) より、 $d_{ij}^{(t)}$ は、 $d_{ij}^{(t)} = p_{ij}^{(t)} Q_{ij}^{(t)} / p_{jj}^{(t)} Q_{jj}^{(t)}$ と表すことができる。これは、 $d_{ij}^{(t)}$ が、都市 i における、都市 j で生産された工業財 t の支出額と自都市 (i.e. 都市 i) で生産された工業財 t の支出額の比率を表していることを意味する。

以上の結果は、 (i, j) 要素が $d_{ij}^{(t)}$ である都市間の取引条件を表す空間割引行列 $\mathbf{D}^{(t)}$ を定義することで、その数学的構造を明確にすることができる。具体的には、空間割引行列 $\mathbf{D}^{(t)}$ と、

$$\Delta^{(t)} \equiv [\Delta_0^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)}), \Delta_1^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)}), \dots, \Delta_{K-1}^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)})] = \mathbf{D}^{(t)\top} \mathbf{h}^{(t)} \quad (15a)$$

$$\mathbf{M}^{(t)} \equiv \mathbf{D}^{(t)} \{\text{diag}[\Delta^{(t)}]\}^{-1} \quad (15b)$$

を利用すると、式 (1), (3), (11), (12), (15) より、間接効用関数 $v^{(t)}(\mathbf{h})$ が $\mathbf{h}$ の陽関数で与えられる：

補題 2.1 skilled worker t の間接効用関数 $v^{(t)}(\mathbf{h})$ は、skilled worker の各都市の人口分布 $\mathbf{h}$ の陽関数で与えられる⁶⁾：

$$v^{(t)}(\mathbf{h}) = \sum_m S^{(m)}(\mathbf{h}^{(m)}) + \{\sigma^{(t)}\}^{-1} \left[\mathbf{w}^{\text{H},(t)}(\mathbf{h}) + \mathbf{w}^{\text{L},(t)}(\mathbf{h}^{(t)}) \right]. \quad (16)$$

⁶⁾ 消費者の都市選択に無関係である定数項と係数 $\mu^{(t)}$ は省略した。

ここで、右辺のベクトルは、

$$S^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)}) \equiv (\sigma^{(t)} - 1)^{-1} \ln[D^{(t)} \mathbf{h}^{(t)}], \quad (17a)$$

$$\mathbf{w}^{H,(t)}(\mathbf{h}) \equiv M^{(t)} \mathbf{H}, \quad \mathbf{w}^{L,(t)}(\mathbf{h}^{(t)}) \equiv l M^{(t)} \mathbf{1}, \quad (17b)$$

$\mathbf{H} \equiv [H_0, H_1, \dots, H_{K-1}]^T$, $\mathbf{1}$ は全ての要素が 1 の $K \times 1$ ベクトルであり、 $M^{(t)}$ は式 (15) で与えられる。また、ベクトル $\mathbf{a}$ の各要素に対数をとる場合、 $\ln[\mathbf{a}]$ と表記した。

(3) 調整ダイナミクス、長期均衡状態と安定性

長期的には、skilled worker は、自らの得る効用を最大化するように労働・居住する都市を選択することができる。この skilled worker の都市選択及び移住行動が長期的に落ち着く状態を“長期均衡状態”と呼ぼう。CP モデルの長期均衡状態は、後に示されるように、複数存在する。したがって、均衡選択のためには、均衡解周りの摂動に対する安定性、すなわち局所的な安定性を調べる必要がある。そこで、ここでは長期均衡状態とその安定性を定義する。

a) relocation cost

skilled worker t は、居住する都市を i から j に変更する場合、その距離 $c(i, j)$ に応じた relocation cost $\eta_{ij}^{(t)}$ を支払わなければならないと仮定する。本研究では、この relocation cost の違いにより産業の異質性を表現する。以降では、その極端なケースとして、 $\eta_{ij}^{(t)}$ を次のように与える：

$$\eta_{ij}^{(0)} = 0 \quad \forall i, j, \quad (18a)$$

$$\eta_{ij}^{(t)} < \eta_{ij}^{(t+1)} \quad \forall t, i, j. \quad (18b)$$

これは、産業毎に必要な relocation cost が異なり、そのうち 1 つの産業は費用がかからないことを意味している。この設定は、例えば、サービス業を表す産業 0 に必要な relocation cost が非常に小さい一方で、製造業等 (産業 $t > 0$) は大きな費用が必要であることを考えれば、現実にも想定され得る状況である。

b) 調整ダイナミクス

長期均衡状態やその局所安定性を定義するために、skilled worker t の都市選択に関する調整ダイナミクスを示そう。本研究では、調整ダイナミクスを次のように定義する：

定義 2.1 時点 s における都市 i の skilled worker t の人口 $h_i^{(t)}$ は、次の常微分方程式に従って変化する：

$$\begin{aligned} \dot{h}_i^{(t)} &= F_i^{(t)}(\mathbf{h}) \\ &\equiv h_i^{(t)} \sum_j \frac{h_j^{(t)}}{H^{(t)}} \left\{ \left[v_i^{(t)}(\mathbf{h}) - v_j^{(t)}(\mathbf{h}) - \eta_{ij}^{(t)} \right]_+ \right. \\ &\quad \left. - \left[v_j^{(t)}(\mathbf{h}) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}) - \eta_{ij}^{(t)} \right]_+ \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $[a]_+ \equiv \max[a, 0]$ である。

定義 2.1 は、都市間の効用差 $|v_i^{(t)}(\mathbf{h}) - v_j^{(t)}(\mathbf{h})|$ が relocation cost $\eta_{ij}^{(t)}$ を下回る限り、skilled worker t は都市間を移動しない (i.e., $F_i^{(t)}(\mathbf{h}) = 0$) を表現している。ただし、skilled worker 0 の調整ダイナミクス $F_i^{(0)}(\mathbf{h})$ は、relocation cost が不要である (i.e., $\eta_{ij}^{(0)} = 0$) と仮定したため、次のように表される：

$$F_i^{(0)}(\mathbf{h}) = h_i^{(0)} \{ v_i^{(0)}(\mathbf{h}) - \bar{v}^{(0)}(\mathbf{h}) \}, \quad (20)$$

$$\bar{v}^{(0)}(\mathbf{h}) \equiv \frac{1}{H^{(0)}} \sum_j h_j^{(0)} v_j^{(0)}(\mathbf{h}). \quad (21)$$

このダイナミクスは、新経済地理学分野でも標準的に用いられる replicator dynamics である⁷。

この定義は、時点 $s + ds$ での都市 i の skilled worker t の人口 $h_i^{(t)}(s + ds)$ が次のように与えられることを意味している：

$$h_i^{(t)}(s + ds) = h_i^{(t)}(s) + \sum_j \{ \gamma_{ji}^{(t)}(s) - \gamma_{ij}^{(t)}(s) \} ds \quad (22)$$

$$\gamma_{ij}^{(t)}(s) = \frac{h_i^{(t)}(s) h_j^{(t)}(s)}{H^{(t)}} \left[v_j^{(t)}(\mathbf{h}(s)) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}(s)) - \eta_{ij}^{(t)} \right]_+ \quad (23)$$

ここで、 $\gamma_{ij}^{(t)}(s)$ は時点 s において ds 間に立地点 i から j へと移る skilled worker t の数、 $h_i^{(t)}(s), v_i^{(t)}(\mathbf{h}(s))$ は都市 i の時点 s での skilled worker t の人口と効用水準である。式 (22), (23) からわかるように、skilled worker t の移動スピード $\gamma_{ij}^{(t)}(s)$ は、居住する都市を変更することによる効用の増分 $[v_j^{(t)}(\mathbf{h}(s)) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}(s)) - \eta_{ij}^{(t)}]_+$ と各都市の skilled worker t の人口に比例する⁸。

c) 長期均衡状態とその安定性

次に、長期均衡状態とその局所安定性を定義しよう。

定義 2.2 長期均衡状態は、次の条件を満たす $\mathbf{h}^*$ である：

$$\begin{cases} \left| v_j^{(t)}(\mathbf{h}^*) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}^*) \right| \leq \eta_{ij}^{(t)} & \text{if } h_i^{(t)*} > 0, \\ v_j^{(t)}(\mathbf{h}^*) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}^*) \geq \eta_{ij}^{(t)} & \text{if } h_i^{(t)*} = 0, \end{cases} \quad \forall t, i, j. \quad (24)$$

この定義より、明らかに $\mathbf{F}(\mathbf{h}^*) = \mathbf{0}$ が成立することがわかる。また、本稿で用いる長期均衡条件 (24) は、relocation cost を考慮しない場合 (i.e., 通常の CP モデルで定式化される均衡条件)

$$\begin{cases} v_j^{(t)}(\mathbf{h}) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}) = 0 & \text{if } h_i^{(t)} > 0, \\ v_j^{(t)}(\mathbf{h}) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}) \geq 0 & \text{if } h_i^{(t)} = 0, \end{cases} \quad \forall t, i, j, \quad (25)$$

と比較すると、より緩い条件となっていることに注意が必要である。

⁷ この事実から明らかなように、本稿で定義した調整ダイナミクス (19) は replicator dynamics の一般化であると言える。

⁸ 式 (23) で示した $\gamma_{ij}^{(t)}(s)$ に関する仮定は、skilled worker t の行動が、立地変更を行う時点のみに支払う relocation cost と効用フローとの差で (i.e., ストックとフローの比較により) 決定されるという、一見、非現実的なものであるように見える。しかし、この仮定 (23) は、skilled worker t が将来得られる効用フローを考慮して立地変更を行う状況とも対応が取れる。その詳細については、付録 I 参照。

長期均衡状態 $\mathbf{h}^*$ の安定性は、均衡点周りの (リアプノフの) 安定性により定義する。この正確な定義は次の通りである。

定義 2.3 動的システム $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{F}(\mathbf{h})$ の時点 s での状態を $\mathbf{h}(s)$ とする。長期均衡状態 $\mathbf{h}^*$ は、次の条件が満たされれば (リアプノフ) 安定である: 任意の実数 $\epsilon > 0$ に対して $\|\mathbf{h}(0) - \mathbf{h}^*\| \leq \delta$ ならば、任意の時点 $s \geq 0$ で $\|\mathbf{h}(s) - \mathbf{h}^*\| \leq \epsilon$ を満たす実数 $\delta > 0$ が存在する。

この定義から、長期均衡状態 $\mathbf{h}^*$ からの微小な摂動は、調整ダイナミクスの定義 2.1 より、次の条件で判定できる (証明は付録 II 参照):

補題 2.2 長期均衡状態 $\mathbf{h}^*$ は次の 2 条件を満たす場合、(リアプノフ) 安定であり、そうでなければ不安定である。

- (a) 集合 $S \equiv \{(i, j, t) | v_i^{(t)}(\mathbf{h}^*) = v_j^{(t)}(\mathbf{h}^*) - \eta_{ij}^{(t)}\}$ に含まれる $(i, t), (j, t)$ に対応した $F_i^{(t)}, F_j^{(t)}$ を要素とするベクトル $\hat{\mathbf{F}}$ の Jacobi 行列の固有値の実部がすべて負。
- (b) S の補集合 $\bar{S}$ の任意の要素 $(i, j, t) \in \bar{S}$ において、次の条件が満たされる:

$$\begin{cases} |v_j^{(t)}(\mathbf{h}^*) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}^*)| < \eta_{ij}^{(t)} & \text{if } h_i^{(t)*} \geq 0, \\ v_j^{(t)}(\mathbf{h}^*) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}^*) > \eta_{ij}^{(t)} & \text{if } h_i^{(t)*} = 0. \end{cases} \quad (26)$$

通常の CP モデルと同様、本モデルにおいても均衡状態の安定性が切り替わる際に、均衡状態の分岐現象が発生する。その分岐方向は、動的システム理論 (e.g., Hirsch and Smale³²⁾) で良く知られているように、調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有ベクトルにより与えられる。

3. 都市システム空間の設定と解析の準備

前章で構築したモデルで創発する集積パターンを把握するには、均衡状態の安定性が分岐パラメータ (e.g., 輸送費用パラメータ τ) に対してどのような特性を持つかを明らかにしなければならない。その具体的な解析は、一般には非常に複雑であり、数値計算に頼らない限りほぼ不可能とされてきた。本章では、この解析が、Akamatsu et al.²⁾、高山・赤松¹²⁾で示された手法を応用することで、著しく容易になることを示す。ただし、ここでは、階層的な産業立地パターンが創発するメカニズムを解析的かつ明快に示すために、都市数が 4、産業数が 2 のケースを分析する⁹。

(1) 都市システム空間の設定

半径 1 の円周上に番号 $i = 0, 1, 2, 3$ の順に 4 個の都市を配置する。2 つの都市 i, j 間の距離は $c(i, j)$ と表される。隣接する都市間の距離は均等であると仮定し、隣

⁹ ただし、都市数・産業数を任意の数に増加させても、以降の解析手順や結論は全く変わらない。

図-1 円周 4 都市システム

接していない都市間の距離は最短経路距離で定義する (図-1)¹⁰。すなわち、

$$c(i, j) = \frac{2\pi}{4} \min\{|i - j|, 4 - |i - j|\}. \quad (27)$$

都市間の工業財の輸送に必要な氷塊費用 $\tau_{ij}^{(t)}$ は、この空間条件 $c(i, j)$ に対して定義される。より具体的には、氷塊費用 $\tau_{ij}^{(t)}$ は、式 (27) で表わされる $c(i, j)$ に対して、

$$\tau_{ij}^{(t)} \equiv \exp[\tau^{(t)} c(i, j)] \quad (28)$$

と定義される。この $\tau_{ij}^{(t)}$ の定義から、空間割引行列 $\mathbf{D}^{(t)}$ (前章 (2) 参照) の i, j 要素 $d_{ij}^{(t)}$ は、

$$d_{ij}^{(t)} \equiv \exp[(1 - \sigma^{(t)})\tau^{(t)} c(i, j)] \quad (29)$$

で与えられる。

円周都市システムでは、空間割引行列 $\mathbf{D}^{(t)}$ の要素の配列には、“巡回行列”と呼ばれる規則性がある。すなわち、

$$r^{(t)} \equiv \exp[(1 - \sigma^{(t)})\tau^{(t)}(2\pi/4)] \in (0, 1] \quad (30)$$

と定義すると、行列 $\mathbf{D}^{(t)}$ は、 (i, j) 要素が $d_{ij}^{(t)} = (r^{(t)})^{m(i, j)}$ で与えられ、第 1 行ベクトル $\mathbf{d}_0^{(t)} = [1, r^{(t)}, \{r^{(t)}\}^2, r^{(t)}]$ により特徴付けられる巡回行列である。

(2) 空間割引行列の固有値

空間割引行列 $\mathbf{D}^{(t)}$ が巡回行列であるため、その固有値は離散 Fourier 変換により得られる。すなわち、 $\mathbf{D}^{(t)}$ は離散 Fourier 変換行列

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3] \quad (31a)$$

$$\mathbf{z}_k = [\omega^0, \omega^k, \omega^{2k}, \omega^{3k}]^T \quad (31b)$$

$$\omega \equiv \exp[i(2\pi/4)] \quad (\text{i.e. } \omega^4 = 1) \quad (31c)$$

¹⁰ Ikeda et al.³⁾、Akamatsu et al.²⁾などで指摘されているように、Core-Periphery モデルをはじめとした、経済活動の空間的集積現象を説明するモデルでは、創発する集積パターンは「モデル自体の特性」と「モデルで仮定する空間特性」に依存して決定される。そこで、本稿では、relocation cost が産業立地パターンに与える影響を純粋に明らかにするために、均質な都市システム空間を採用した。なお、均質な空間条件の下で得られたモデルの特性は、より現実な状況設定の下でも頑健に成立することが、近年、示されている。具体的には、2 次元空間下でのモデルの特性は Ikeda et al.³³⁾、高山・赤松³⁴⁾が、線分状の空間 (i.e., 不均質な空間条件) を考慮した場合のモデル特性は池田ら³⁵⁾が明らかにしている。したがって、本研究で得られた結果は、より複雑な空間条件の下でも同様に成立する。

によって対角化される:

$$\mathbf{Z}^* \mathbf{D}^{(t)} \mathbf{Z} = \text{diag}[\phi^{(t)}]. \quad (32)$$

ここで, $\mathbf{Z}^*$ は $\mathbf{Z}$ の共役転置行列 (i.e. $\mathbf{Z}$ の逆行列) である. また, $\phi^{(t)}$ は行列 $\mathbf{D}^{(t)}$ の 4 個の固有値であり, ベクトル $\mathbf{d}_0^{(t)}$ の離散 Fourier 変換:

$$\phi^{(t)} = \mathbf{Z} \{\mathbf{d}_0^{(t)}\}^\top \quad (33)$$

により与えられる. 上式の右辺は解析的に評価でき, 結局, $\mathbf{D}^{(t)}$ の固有値は, $r^{(t)}$ の簡単な関数として表現される:

補題 3.1 円周多都市システムにおける空間割引行列 $\mathbf{D}^{(t)}$ の第 k 固有値 ($k = 0, 1, 2, 3$) は, 次のように与えられる:

$$\phi_k^{(t)} = \begin{cases} (1 + r^{(t)})^2 & \text{if } k = 0 \\ (1 + r^{(t)})(1 - r^{(t)}) & \text{if } k = 1, 3 \\ (1 - r^{(t)})^2 & \text{if } k = 2 \end{cases} \quad (34)$$

さて, 以降で CP モデルの分岐特性を考察する際には, 行列 $\mathbf{D}^{(t)}$ をその行和:

$$\mathbf{d}^{(t)} \equiv \mathbf{d}_0^{(t)} \cdot \mathbf{1} = \lambda_0^{(t)} \quad (35)$$

で正規化した行列 $\mathbf{D}^{(t)}/d^{(t)}$ の固有値 $\mathbf{f}^{(t)}$ が重要な役割を果たす. そこで, 補題 3.1 を用いて $\mathbf{f}^{(t)}$ の特性を調べておこう:

補題 3.2 円周都市システムにおける空間割引行列 $\mathbf{D}^{(t)}/d^{(t)}$ の固有値・固有ベクトルは, 以下の特性を持つ.

- 1) 第 k 固有ベクトル ($k = 0, 1, \dots, K-1$) は, 離散 Fourier 変換行列の第 k 列ベクトル:

$$\mathbf{z}_k \equiv [1, \omega^k, \omega^{2k}, \omega^{3k}]^\top \quad (36)$$

によって与えられる. ここで, $\omega \equiv \exp[i(2\pi/4)]$ である.

- 2) 第 k 固有値 ($k = 0, 1, 2, 3$) は, 以下のように与えられる:

$$f_k^{(t)} = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0, \\ c(r^{(t)}) & \text{if } k = 1, 3, \\ c(r^{(t)})^2 & \text{if } k = 2. \end{cases} \quad (37)$$

ここで, $c(r^{(t)}) \equiv (1 - r^{(t)})/(1 + r^{(t)})$.

- 3) いずれの固有値も $r^{(t)} \in [0, 1]$ に関する単調減少関数で, その値域は $(0, 1]$ である (ただし, 第 0 固有値は $r^{(t)}$ の値によらず常に 1).
- 4) 任意の $r^{(t)} \in [0, 1]$ に対して, 最大固有値は第 0 固有値 $f_1^{(t)}$, 最小固有値は第 2 固有値 $f_2^{(t)}$ である.

(3) 調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値

前章で示したように, CP モデル均衡解の安定性や分岐現象の有無は, 調整ダイナミクスの Jacobi 行列 $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{h})$ の固有値 $\mathbf{g}$ と条件 (26) によって判定できる. 以下では,

この $\mathbf{g}$ が, 空間割引行列 $\mathbf{D}^{(t)}/d^{(t)}$ の固有値 $\mathbf{f}^{(t)}$ の簡単な関数として得られることを示そう. ただし, ここでは多産業 CP モデルが持つ本質的特性を調べるために, skilled worker t が円周上の各都市に $h^{(t)} = H^{(t)}/4$ 人ずつ均等に分散した均衡状態 (分散均衡状態) $\bar{\mathbf{h}}^{(t)} = h^{(t)} \mathbf{1} \forall t$ (i.e., 全ての都市が均質となる状況) を扱う.

なお, 以降では, 産業構造が階層化するメカニズムを明快に示すために, 産業の異質性は relocation cost のみ (i.e., relocation cost 以外のパラメータは全て同一) という状況を考える. すなわち, relocation cost のかからない skilled worker 0 と relocation cost のかかる skilled worker 1 のみが存在する状況を扱う. このときの skilled worker 全体の分布を $\bar{\mathbf{h}} \equiv [\{\bar{\mathbf{h}}^{(0)}\}^\top, \{\bar{\mathbf{h}}^{(1)}\}^\top]^\top$ と表す. すると, 分散均衡状態では, $\bar{\mathbf{h}}^{(1)}$ が必ず条件 (26) を満たすため, $\nabla \mathbf{F}(\bar{\mathbf{h}})$ は

$$\nabla \mathbf{F}(\bar{\mathbf{h}}) = \begin{bmatrix} \nabla_0 \mathbf{F}^{(0)}(\bar{\mathbf{h}}) & \nabla_1 \mathbf{F}^{(0)}(\bar{\mathbf{h}}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (38)$$

で与えられる (調整ダイナミクスの Jacobi 行列の各要素の詳細については, 付録 III 参照). ここで, $\nabla_i \mathbf{F}^{(0)}(\bar{\mathbf{h}})$ は, (i, j) 要素が $\partial F_i^{(0)}(\bar{\mathbf{h}})/\partial h_j^{(i)}$ の Jacobi 行列である. さらに, この各ブロックの部分行列は巡回行列となる. これを具体的に確認しておこう. そのために, 間接効用関数の Jacobi 行列 $\nabla_i \mathbf{v}^{(0)}(\bar{\mathbf{h}})$ を調べる. 産業間で同一の値となるパラメータのインデックス (t) を省略すると, skilled worker の分布が $\mathbf{h} = \bar{\mathbf{h}}$ である場合,

$$\mathbf{M} = (hd)^{-1} \mathbf{D} \quad (39)$$

であるから, 間接効用関数と間接効用関数の Jacobi 行列は,

$$\mathbf{v}^{(t)}(\bar{\mathbf{h}}) = \left\{ \frac{T \ln[hd]}{\sigma - 1} + \frac{2h + l}{\sigma h} \right\} \mathbf{1} \quad (40)$$

$$\nabla_t \mathbf{v}^{(0)}(\bar{\mathbf{h}}) = \begin{cases} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\sigma - 1} + \frac{1}{\sigma} \right) \frac{\mathbf{D}}{d} \\ -\frac{l(h+1)}{\sigma h^2} \frac{\mathbf{D} \mathbf{D}^\top}{d^2} & \text{if } t = 0 \\ \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\sigma - 1} + \frac{1}{\sigma} \right) \frac{\mathbf{D}}{d} & \text{if } t = 1 \end{cases} \quad (41)$$

に帰着する. この Jacobi 行列の式 (41) 右辺に現れる行列 $\mathbf{D}$ は巡回行列であるから, $\nabla_t \mathbf{v}^{(0)}(\bar{\mathbf{h}})$ もまた巡回行列である.

この結果に加え, $\nabla_i \mathbf{F}^{(0)}(\bar{\mathbf{h}})$ が (付録 III より) 次のように与えられることを利用すると, 調整ダイナミクスの Jacobi 行列 (38) の各ブロックの部分行列が巡回行列であることがわかる.

$$\nabla_i \mathbf{F}^{(0)}(\bar{\mathbf{h}})$$

$$= \begin{cases} h \left\{ \left(I - \frac{1}{4} E \right) \nabla_0 v^{(0)} - \frac{\bar{v}^{(0)}(\bar{h})}{4} E \right\} & \text{if } t = 0, \\ h \left(I - \frac{1}{4} E \right) \nabla_1 v^{(0)} & \text{if } t = 1. \end{cases} \quad (42)$$

ここで、 $\bar{v}^{(0)}(\bar{h})$ は、式 (21) で与えられる、平均効用水準である。

Jacobi 行列 $\nabla F(\bar{h})$ の部分行列が巡回行列であるため、 4×4 の DFT 行列 $Z_{[4]}$ を対角ブロックに持つ行列 $\hat{Z} \equiv \text{diag}[Z_{[4]}, Z_{[4]}]$ による相似変換を施すことで各ブロックを対角化できる:

$$\hat{Z}^* \nabla F(\bar{h}) \hat{Z} = \begin{bmatrix} \text{diag}[\lambda^{(0,0)}] & & \text{diag}[\lambda^{(0,1)}] \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

ここで、 $\hat{Z}^*$ は $\hat{Z}$ の共役転置行列、 $\lambda^{(0,t)}$ は $\nabla_t F^{(0)}(\bar{h})$ の固有値である。この行列が上三角行列であることを利用すると、 $\nabla F(\bar{h})$ の固有値と固有ベクトルが容易に得られる。その結果は、次の補題にまとめられる。

補題 3.3 分散均衡状態 $\bar{h}$ における調整ダイナミクスの Jacobi 行列 $\nabla F(\bar{h})$ の固有値、固有ベクトルは、以下のように与えられる:

- 1) 第 $4t+i$ 固有値 g_{4t+i} ($t = 0, 1; i = 0, 1, 2, 3$) は次のように表される:

$$g_{4t+i} = \begin{cases} -\frac{\bar{v}^{(0)}(\bar{h})}{4} < 0 & \text{if } t = i = 0, \\ G(f_j) & \text{if } t = 0, i \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (44)$$

$$G(x) \equiv bx - ax^2. \quad (45)$$

ここで、 f_j は D/d の第 j 固有値、 a, b は

$$a \equiv (2 + lh^{-1})\sigma^{-1}, \quad b \equiv (\sigma - 1)^{-1} + \sigma^{-1}. \quad (46)$$

- 2) 第 $4t+i$ 固有ベクトル $\hat{z}_{4t+i}$ ($t = 0, 1, i = 0, 1, 2, 3$) は次のように表される:

$$\hat{z}_{4t+i} = \begin{bmatrix} z_{ti}^{(0)} \\ z_{ti}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$z_{ti}^{(m)} = \begin{cases} z_i & \text{if } t = m, \\ 0 & \text{if } t = 0, m = 1, \\ c_i z_i & \text{if } t = 1, m = 0. \end{cases} \quad (48)$$

ここで、 z_i は 4×4 の DFT 行列 Z の第 i 列ベクトル、 $c_i \equiv -\lambda_i^{(0,0)}/\lambda_i^{(0,1)}$ 、 $\lambda_i^{(0,t)}$ は式 (43) で与えられる $\lambda^{(0,t)}$ の第 i 要素である。

ここで、補題 3.3, 1) において、 $\nabla F(\bar{h})$ の固有値 g_{4+i} が常に 0 となるのは、分散均衡状態では $v_i^{(1)} - v_j^{(1)} - \eta_{ij} < 0$ が常に成立するためである。すなわち、 $\bar{h}^{(1)}$ が補題 2.2 の条件 b) を満たしており、 $\bar{h}^{(1)}$ に摂動を与えても skilled worker 1 が移住しないことを反映している。したがって、均衡状態 $\bar{h}$ の安定性は、補題 3.3 で得られた $\nabla F(\bar{h})$

a) z_0 : 均等分散 b) z_1, z_3 : 1 極集中 c) z_2 : 2 極集中

図-2 z_k の配列パターンと集積パターン

の固有値の符号のみで確認することができる。そこで、次章以降では、固有値 g_{4t+i} に着目して、均衡状態の安定性について議論する。

補題 3.3, 2) で示された固有ベクトル $\hat{z}_{4t+i}$ は、その要素の配列パターンによって、各都市への skilled worker の集積パターンを表している。そこで、分岐により創発しうる skilled worker の集積パターンを整理しておこう。そのために、最初に、分岐により創発しうる skilled worker m の集積パターンを $z_{ti}^{(m)}$ により調べる。その上で、skilled worker 0, 1 の同時立地パターンを $\hat{z}_{4t+i}$ から確認する。

まず、一方の skilled worker のみに着目する。 $z_{ti}^{(m)}$ は z_i の定数倍で与えられるため、skilled worker m の集積パターンは、 z_i の配列パターン (図-2) で与えられる。より具体的には、 $z_0 = [1, 1, 1, 1]^T$ の配列パターンは分散均衡状態 (図-2 a)、 $z_1 = z_3 = [1, i, -1, -i]^T$ の配列パターンは 1 極集中パターン (図-2 b)、 $z_2 = [1, -1, 1, -1]^T$ の配列パターンは 2 極集中パターン (図-2 c) を表す。

次に、skilled worker 全体 (両産業) の同時立地パターンを $\hat{z}_{4t+i}$ の配列パターンにより調べる。 $t = 0$ の場合、必ず $z_{0i}^{(1)} = 0$ となるため、 $\hat{z}_i$ は skilled worker 0 (産業 0) のみが $z_{0i}^{(0)}$ 方向に集積する立地パターンを表す。これは、明らかに 図-3 a で表されるような階層的な立地パターンである。 $t = 1$ の場合、 $c_i > 0$ であれば、 $\hat{z}_{4+i}$ は skilled worker 0, 1 とも z_i 方向に集積する同時集積パターン (図-3 b) を表す。 $c_i < 0$ となる場合、 $\hat{z}_{4+i}$ は、skilled worker 0 が $-z_i$ 方向、skilled worker 1 が z_i 方向に集積する分離集積パターン (図-3 c) を表す。

4. 階層パターンの創発

分散均衡状態 $\bar{h}$ における輸送費用の低下に伴い発生する分岐の挙動は、前章で得られた $\nabla F(\bar{h})$ の固有値・固有ベクトルにより調べることができる。そこで、本章では、(1) 節で分岐が発生する条件を示したのち、分岐に伴い創発する集積パターンを (2) 節で明らかにする。

図-3 両産業の同時立地パターン

(1) 分岐の発生条件

分散均衡状態 $\bar{h}$ において、輸送費用パラメータ τ の低下に伴って分岐が発生する条件を確認しよう。均衡解が分岐するには、 $\nabla F(\bar{h})$ の固有値 g のいずれかの符号が変化する必要がある。補題 3.3 より、 g_{4t+i} の符号が変化する得るのは、 $t = 0$ かつ $i = 1, 2, 3$ の場合のみである。さらに、 $t = 0$ のとき、 g_{4t+i} は $G(f_i)$ により与えられるため、分岐が発生するには f_i が取りうる値の範囲内で

$$G(f_i) = 0 \quad (49)$$

となる必要がある。 f_i ($i = 1, 2, 3$) の値域は補題 3.2 より $(0, 1]$ であるため、分岐の発生条件は、以下の補題で与えられる:

補題 4.1 多産業 CP モデルにおいて、skilled worker t が円周都市システムの 4 箇所の都市に均等に分散した均衡状態を考える。このとき、輸送費用パラメータ τ の変化によって、均衡解が分岐するためには、式 (46) で与えられるパラメータ a, b が次の条件を満たす必要がある:

$$\frac{b}{a} < 1. \quad (50)$$

この条件は、既存研究でもよく知られている no-black-hole 条件である。この条件が満たされない場合、輸送費用パラメータ τ が高い状況でも、固有値 g_{4t+i} が常に正となり、分散均衡状態が不安定的 (i.e., 集積均衡解が安定的) となる。すなわち、輸送費用パラメータ τ の変化に伴う均等分散パターンからの均衡解の分岐は起こらない。そこで、以降の分岐解析では、この no-black-hole 条件が満たされている状況のみを考える。

(2) 分散均衡状態からの分岐: 階層構造の創発条件

分散均衡状態 $\bar{h}$ からの分岐により創発する集積パターンを調べる。前節でも示したように、 g_{4t+i} の符号が変化する得るのは $t = 0$ かつ $i = 1, 2, 3$ の場合のみである。したがって、分岐直後に創発する集積パターンは、必ず、skilled worker 0 のみが集積する階層パターン (図-3 a) となる。ただし、skilled worker 1 の立地パターンは、分岐に伴う skilled worker 0 の集積が進展する過程で、変化する可能性がある。そこで、本節では、まず分岐に伴い創発する skilled worker 0 の集積パターンを示した上で、その後、skilled worker 1 の立地パターンが変化する可否を確認する。

a) relocation cost のない産業の集積

分散均衡状態において、輸送費用の減少に伴い発生する分岐の挙動を調べる。均衡解の分岐は、 g_{4t+i} の符号が変化する際に発生するため、 f_i に関する 2 次方程式 (49) の実数根:

$$f_+ = \frac{b}{a} > 0, \quad f_- = 0 \quad (51)$$

は、分岐が発生する f_i の臨界値を表している。この臨界値 (51) と f_i の関係から、分散均衡状態の安定性が確認できる。3. (3) 節で示したように、均衡状態は、 $t = 0$ のときの g_{4t+i} (i.e., g_i) が全ての i ($= 0, 1, 2, 3$) について負 ($g_i < 0 \forall i$) であれば安定、そうでなければ不安定である。また、 g_i は、 f_i の 2 次方程式 (44) で表わされる。したがって、分散均衡状態の安定性は、以下の 2 つの状態毎に決定される。

$$\text{Case a)} \quad f_i > f_+ \quad \forall i \neq 0 \Leftrightarrow g_i < 0 \quad \forall i \quad (52)$$

$$\text{Case b)} \quad 0 = f_- < f_i \leq f_+ \quad \exists i \Leftrightarrow g_i > 0 \quad \exists i \quad (53)$$

すなわち、分散均衡状態は、Case a) において安定、b) では不安定となり、何らかの集積パターンが創発する。ここで、 $f_i \in (0, 1]$ であることから、臨界値 $f_- = 0$ は分岐の発生に影響しない。そこで、以降では、2 種類の分岐臨界値のうち、 f_+ のみについて分析する。

輸送費用パラメータ τ を低下させた場合に生じる均衡解の分岐の特性を、 f_i の分岐臨界値 (51) を利用することで明らかにする。ただし、本稿では、 τ と r に一対一対応関係 (30) があることから、 $r \in (0, 1]$ の増加に伴う分岐挙動を調べる。そのために、まず、固有値 $f_i(\cdot)$ を r の関数と考え、その逆関数を $r_i(\cdot)$ と書く:

$$r_+ = r_i(f_+) \Leftrightarrow f_+ = f_i(r_+). \quad (54)$$

ここで、 $f_i(\cdot)$ は r の単調減少関数である (補題 3.2) から、その逆関数 $r_i(\cdot)$ も f_i の単調減少関数である。

初期状態では、輸送費用が大きく、 $r < r_i(f_+) \forall i \neq 0$ が成立しているとしよう。逆関数 (54) の定義から、この条件は、Case a) の条件 (52) と等価であるため、分散状態が安定的である。 r が徐々に増加 (輸送費用 τ が

図-4 分散均衡状態からの分岐方向

低下)すると, ある i^* に対して, $r \geq r_i(f_+)$ が成立する. この条件は, Case b) と同じ条件 (53) を表現しているため, 分散パターンが不安定化することがわかる. ここで, 最初に $r \geq r_i(f_+)$ を満たす i^* は, 補題 3.2 より,

$$i_+^* = \arg \min_i \{f_i(r)\} = 2 \quad (55)$$

である. 従って, r が臨界値:

$$r_+ \equiv \max_k \{r_i(f_+)\} = r_2(f_+) = \frac{1 - \sqrt{f_+}}{1 + \sqrt{f_+}} \quad (56)$$

となったときに, skilled worker 0 の集積パターンが $\mathbf{h}^{(0)} = \bar{\mathbf{h}}^{(0)} + \delta \mathbf{z}_2$ (図-4 a) 方向へと変化する. その結果, 都市システム全体では, 図-4 b で表される集積パターンが形成される. 以上の結果をまとめると, 次の命題が得られる:

命題 4.1 多産業 CP モデルにおいて, no-black-hole 条件 (50) が成立しているものとする. 輸送費用が十分に大きく, skilled worker が各都市に分散した均衡状態を考える. この状態から, 輸送費用パラメータ τ を徐々に下げる (r を徐々に上げる) と,

- 1) 式 (56) と式 (51) で与えられる臨界値 r_+ で 2 極集中パターン (図-4 a) 方向へと skilled worker 0 が集積する.
- 2) この臨界値 r_+ は, a) skilled worker 人口比率が大きく (h 大), b) skilled worker の財消費代替の弾力性が小さい (σ 小), ほど低い.

b) relocation cost のある産業の集積

命題 4.1 で示した分岐により skilled worker 0 の集積が進展すると, skilled worker 0 の人口が増加する都市 (core) と減少する都市 (periphery) の間で, skilled worker 1 の効用水準に差が生じる (i.e., $v_0^{(1)} > v_1^{(1)}$ となる). したがって, その効用差に応じて, skilled worker 1 が集積する可能性がある. そこで, 次に, skilled worker 1 が集積する (i.e., relocation cost のある産業が集積する) 条件を調べよう.

補題 2.2 より, skilled worker 1 の集積パターンの安定性は, 条件 (26) を満足するか否かで判定できる. より具体的には, skilled worker 1 は全ての都市に均等に居住しているため (i.e., $h_i^{(1)} > 0 \forall i$), 次の条件を満足し

ていれば, 分散状態が安定的, そうでなければ skilled worker 1 が skilled worker 0 が既に集積している都市へと集積する (i.e., 図-4 a と同じ方向に集積する):

$$v_0^{(1)}(\mathbf{h}) - v_1^{(1)}(\mathbf{h}) = \frac{1}{\sigma - 1} \ln \left[\frac{\Delta_0(\mathbf{h}^{(0)})}{\Delta_1(\mathbf{h}^{(0)})} \right] + \frac{\Delta_0(\mathbf{h}^{(0)}) - \Delta_1(\mathbf{h}^{(0)})}{d\mathbf{h}^{(1)}} < \eta_{10}. \quad (57)$$

ここで, skilled worker 0 が 2 極集中パターン $\mathbf{h}^{(0)} = \bar{\mathbf{h}}_{(2)}^{(0)} \equiv [2h, 0, 2h, 0]^T$ である場合,

$$\frac{\partial(v_0^{(1)}(\mathbf{h}) - v_1^{(1)}(\mathbf{h}))}{\partial r} = -\frac{1}{\sigma - 1} \frac{1 - r^2}{r(1 + r^2)} - \frac{8(1 - r)}{(1 + r)^3} < 0 \quad (58)$$

となることに注目しよう. これは, skilled worker 0 が完全に 2 都市に集中すると, 2 都市間の効用差 $v_0^{(1)}(\mathbf{h}) - v_1^{(1)}(\mathbf{h})$ は, 輸送費用の減少とともに, 縮まることを意味している. したがって, skilled worker 0 が 2 極集中し, skilled worker 1 が分散している状態 (以降, 階層パターン) $\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)} \equiv [\bar{\mathbf{h}}_{(2)}^{(0)}, \bar{\mathbf{h}}^{(1)}]$ において, 条件 (57) が満たされれば, skilled worker 1 が分散している状態が安定的となる (i.e., 産業構造が階層化する):

$$v_0^{(1)}(\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)}) - v_1^{(1)}(\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)}) = \frac{1}{\sigma - 1} \ln \left[\frac{1 + r^2}{2r} \right] + \left(\frac{1 - r}{1 + r} \right)^2 < \eta_{10}. \quad (59)$$

以上の結果は, 次の命題にまとめられる:

命題 4.2 命題 4.1 で示した skilled worker 0 が分散均衡状態から 2 極集中パターンへと集積する状況を考える. このとき, skilled worker 1 の集積パターンは, 次の特性を持つ:

- 1) skilled worker 1 の集積は, skilled worker 0 が集積する過程でしか起こらない.
- 2) 産業構造が階層化する条件 (i.e., skilled worker 1 が集積しない図-3 a のような集積パターンの創発条件) は, (59) で与えられる.
- 3) 条件 (59) が成立しない場合, 産業構造は階層化せず, skilled worker 1 は skilled worker 0 が集積する都市と同じ都市に集積する (i.e., 図-3 b で表される集積パターンが形成される).

5. 階層パターンの進展

前章では, 輸送費用の減少に伴い, 階層的な産業構造 (階層パターン) が形成される条件を明らかにした. その状態からさらに輸送費用が減少すると, 階層パターンの安定性が変化し, さらなる集積が起こる. これを具体的に確認するために, 条件 (59) が成立すると仮定した上で, 階層パターンの安定性と分岐挙動を調べる.

(1) 調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値

階層パターン $\bar{h}_{(2,4)}$ の安定性を調べるには、前章までと同様、調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値を解析する必要がある。条件 (59) が成立する場合、調整ダイナミクスは、

$$\nabla F(\bar{h}_{(2,4)}) = \begin{bmatrix} \nabla_0 F^{(0)}(\bar{h}_{(2,4)}) & \nabla_1 F^{(0)}(\bar{h}_{(2,4)}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (60)$$

で与えられるため、高山・赤松¹²⁾と全く同様の方法を採用することで、その解析を容易に行うことができる。この解析により、調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値は、次の補題のとおり与えられる (証明は付録 IV 参照):

補題 5.1 階層パターン $\bar{h}_{(2,4)}$ での調整ダイナミクスの Jacobi 行列 $\nabla F(\bar{h}_{(2,4)})$ の固有値 $\hat{g}$ は、以下のとおり与えられる:

$$\hat{g}_{4t+i} = \begin{cases} -\bar{v}^{(0)}(\bar{h}_{(2,4)}) < 0 & \text{if } t = i = 0, \\ v_1^{(0)}(\bar{h}_{(2,4)}) - \bar{v}^{(0)}(\bar{h}_{(2,4)}) & \text{if } t = 0, i = 1, 3, \\ \hat{G}(\hat{f}_{i/2}) & \text{if } t = 0, i = 2, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (61a)$$

$$\hat{G}(x) \equiv bx - \hat{a}x^2. \quad (61b)$$

ここで、 $\hat{f}_i$ は 1 行目が $[1, r^2]$ となる巡回行列 $\hat{D}$ を行和 $\hat{d} \equiv 1 + r^2$ で正規化した行列 $\hat{D}/\hat{d}$ の第 i 固有値である。

$$\hat{f}_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 0, \\ c(r^2) = \frac{1-r^2}{1+r^2} & \text{if } i = 1. \end{cases} \quad (62)$$

また、 b は式 (46)、 $\hat{a}$ は以下で与えられる:

$$\hat{a} \equiv \frac{3 + lh^{-1}}{2\sigma}. \quad (63)$$

(2) 分岐発生条件

階層パターンから分岐が発生するための条件を確認しておこう。補題 5.1 より、 r の変化に伴って分岐が発生するには、 $\hat{f}_i$ の値域 $(0, 1]$ の範囲内で $\hat{g}_{4t+i}$ の符号が変化する必要がある。式 (61) より、均衡条件が満たされる限り $\hat{g}_{4t+i}$ のうち符号が変化し得るのは、 $\hat{g}_2$ のみである。したがって、輸送費用パラメータ τ の減少によって、skilled worker 0 が少数の都市へ集積するためには、次の補題で示す条件を満足する必要がある。

補題 5.2 多産業 CP モデルにおいて、階層パターン $\bar{h}_{(2,4)}$ が安定均衡状態となる状況を考える。このとき、輸送費用パラメータ τ の変化によって均衡解が分岐するためには、式 (46)、(63) で与えられるパラメータ $\hat{a}, b$ が次の条件を満たす必要がある:

$$\frac{b}{\hat{a}} \leq 1. \quad (64)$$

この条件は、分散均衡状態での no-black-hole 条件に対応する条件である。さらに、この条件は、補題 4.1 より厳しい条件であるため、 $b/a \leq 1 < b/\hat{a}$ が成立する場合、輸送費用パラメータ τ が高い場合でも、固有値 $\hat{g}_k$ が常に正となり、分散均衡状態からの分岐で創発した 2 極集中パターンが安定化しない。すなわち、輸送費用パラメータ τ の変化に伴う 2 極集中パターンからの均衡解の分岐は起こらない (すぐに 1 極集中化してしまう)。そこで、以降の分岐解析では、この条件が満たされている状況のみを考える。

(3) 階層パターンからの分岐

a) relocation cost のない産業の集積

階層パターンから分岐が発生する $\hat{f}_i$ の臨界値は、(2) 節と同様の手順により、次のように与えられる:

$$\hat{f}_+ = \frac{b}{\hat{a}} > 0, \quad \hat{f}_- = 0. \quad (65)$$

$\hat{f}_i$ の値域が $(0, 1]$ であることから、階層パターンにおいても、分散均衡状態の場合と同じく、一方の臨界値 $\hat{f}_-$ は無視することができる。したがって、以降では、 $\hat{f}_i$ が $\hat{f}_+$ に達する際の分岐挙動を分析する。

輸送費用 τ を低下 (r を増加) させた場合に生じる均衡解の分岐の特性を示すために、固有値 $\hat{f}_i(r)$ の逆関数 $\hat{r}$ を定義しておこう:

$$\hat{r}_+ = \hat{r}_i(\hat{f}_+) \Leftrightarrow \hat{f}_+ = \hat{f}_i(\hat{r}_+). \quad (66)$$

ここで、 $\hat{f}_i(\cdot)$ は r の単調減少関数である (式 (62)) ため、その逆関数 $\hat{r}_i(\cdot)$ も $\hat{f}_i$ の単調減少関数である。

初期状態として、2 極集中パターンが安定均衡解である状態を考える。この状態から r をさらに増加 (i.e., 輸送費用 τ を減少) させると、 $\hat{f}_i = \hat{f}_+$ が成立する $r = \hat{r}_+$ において、最初に分岐が発生する。ここで、補題 5.1 より、 $\hat{g}_{4t+i}$ の符号が変化し得るのは、明らかに $t = 0, i = 2$ のみであるため、 r が臨界値

$$\hat{r}_+ = \hat{r}_2(\hat{f}_+) = \sqrt{\frac{1-\hat{f}_+}{1+\hat{f}_+}} \quad (67)$$

に達すると、その固有ベクトル $\hat{z}_2 = [1, 0, -1, 0]^T$ に対応した集積パターン

$$\mathbf{h}^{(0)} = \bar{\mathbf{h}}_{(2)}^{(0)} + \delta \hat{z}_2 = [2h + \delta, 0, 2h - \delta, 0]^T \quad (68)$$

方向に、skilled worker 0 が集積する。以上の議論は、次の命題にまとめられる。

命題 5.1 多産業 CP モデルにおいて、条件 (64) が成立し、2 極集中パターンが安定的であると考え。その状態からさらに r を増加させると、

- 1) 式 (67) で与えられる臨界値 $\hat{r}_+$ で 1 極集中パターン方向に skilled worker 0 が集積する。

- 2) 臨界値 r^* は, a) skilled worker 人口比率が大きく (h 大), b) skilled worker の財消費代替の弾力性が小さい (σ 小), ほど低い.

b) relocation cost のある産業の集積

命題 5.1 で示した分岐により skilled worker 0 の集積が進展すると, $v_0^{(1)} > v_1^{(1)}$ または $v_0^{(1)} > v_2^{(1)}$ が成立し得るため, 前節での議論と同様, skilled worker 1 が集積する可能性がある. そこで, skilled worker 1 が集積する (i.e., relocation cost のある産業が集積する) 条件を調べよう.

最初に, skilled worker 0 が完全に 1 極集中 (i.e., $\mathbf{h} = \bar{\mathbf{h}}_{(1)}^{(0)} \equiv [4h, 0, 0, 0]^T$) すると,

$$\frac{\partial(v_0^{(1)}(\mathbf{h}) - v_1^{(1)}(\mathbf{h}))}{\partial r} = -\frac{1}{\sigma-1} \frac{1}{r} - \frac{4(3-r)}{(1+r)^3} < 0 \quad (69a)$$

$$\frac{\partial(v_0^{(1)}(\mathbf{h}) - v_2^{(1)}(\mathbf{h}))}{\partial r} = -\frac{1}{\sigma-1} \frac{2}{r} - \frac{8}{(1+r)^2} < 0 \quad (69b)$$

となることに注目しよう. これは, 前節と同様, skilled worker 0 が 1 極集中パターンとなつてからは, 都市間の効用差は輸送費用が減少するにつれて縮小することを意味している. したがって, skilled worker 0 が 1 極集中し, skilled worker 1 が分散している状態 $\mathbf{h}_{(1,4)} \equiv [\bar{\mathbf{h}}_{(1)}^{(0)}, \bar{\mathbf{h}}_{(1)}^{(1)}]$ において, 次の条件を満たせば, skilled worker 1 は移住しない (逆に, この条件を満たさない場合, 効用が増加する方向に skilled worker 1 が集積する):

$$v_0^{(1)}(\mathbf{h}_{(1,4)}) - v_1^{(1)}(\mathbf{h}_{(1,4)}) = -\frac{1}{\sigma-1} \ln[r] + \frac{4(1-r)}{(1+r)^2} < \eta_{10}, \quad (70a)$$

$$v_0^{(1)}(\mathbf{h}_{(1,4)}) - v_2^{(1)}(\mathbf{h}_{(1,4)}) = -\frac{2}{\sigma-1} \ln[r] + \frac{4(1-r)}{(1+r)^2} < \eta_{20}. \quad (70b)$$

以上の結果は, 次の命題にまとめられる:

命題 5.2 階層パターン $\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)}$ が安定的な状態から, 命題 5.1 で示したように, skilled worker 0 が 1 極集中パターン方向に集積する状況を考える. このとき, skilled worker 1 の集積パターンは, 次の特性を持つ:

- 1) skilled worker 1 の集積は, skilled worker 0 が集積する過程でしか起こらない.
- 2) skilled worker 1 の立地パターンが変化しない条件は, (70) で与えられる.
- 3) skilled worker 1 は, 条件 (70a) が成立しない場合は都市 1,3 から 0 へ, 条件 (70b) が成立しない場合は都市 2 から 0 に集積する.

6. 数値計算例による大域的な分岐特性の確認

(1) 数値実験方法

本章では, これまでに得られた理論解析結果をわかりやすく示すために, 輸送費用の減少に伴い多都市・多産業 CP モデルで創発する典型的な集積パターン (i.e., 同時集積パターン, 階層パターン) の数値計算例を示す. ここでは, 数値計算により均衡解を求めるアルゴリズムとして, Ikeda et al.³⁾, 池田ら³⁶⁾ と同様, 計算分岐理論と群論的分岐理論を適切に組み合わせた方法を採用する (計算分岐理論・群論的分岐理論の詳細は, 例えば, Ikeda and Murota³⁷⁾, 藤井ら³⁸⁾ 参照).

以降で示される数値計算例では, パラメータを $H^{(t)} = 1/T, \sigma = 5.0, l = 1.0$ と設定し, relocation cost は都市間の距離に依存しない (i.e., 産業のみに依存する: $\eta^{(t)} = \eta_{ij}^{(t)} \forall i, j \neq i$) ケースを扱う. ただし, 階層パターンが創発する場合については, 前章までで解析した 4 都市 2 産業のケースに加え, 複数の階層が現れる 8 都市 4 産業とした場合の数値計算例も提示する. 数値計算により得られる安定的な均衡解は, 縦軸に人口最大都市における産業毎の skilled worker の人口割合 ($h_i^{(t)}/H^{(t)}$), 横軸に r を取った図により示す. また, 図の赤, 青, 緑, 黄色の実線は, 各々, 産業 0, 1, 2, 3 を表す.

(2) 同時集積パターンが創発する場合

命題 4.2 で示した skilled worker 0, 1 (両産業) が同時に集積する条件を満たす $\eta^{(1)} = 0.2$ とした場合の均衡立地パターンは, 図-5 a で示すとおりである. この結果から, 輸送費用の減少に伴い, skilled worker 0, 1 とともに “分散→2 極→1 極” と集積パターンが変化しており, 常に同じ都市に集積することが分かる. さらに, 図-5 b から, skilled worker 1 の集積は, 必ず skilled worker 0 の集積過程で起こる, という命題 4.2, 1) と整合的な結果も確認できる.

図-5 が示すように, 分散均衡状態 $\bar{\mathbf{h}}$ から skilled worker 0, 1 が同時に 2 つの都市に集積する場合, 必ず, その後の (1 都市への) 集積も同時に起こる. これは, 分散均衡状態から 2 極集中パターンに人口分布が変化するより, 2 極集中パターンから 1 極集中パターンに変化する方が, 移動する skilled worker 0 の数が多いためである. その結果として, skilled worker 1 の都市間効用差は, “分散→2 極” より “2 極→1 極” の方が大きくなり, 常に両産業が同時に集積する.

(3) 階層パターンが創発する場合

a) 4 都市 2 産業のケース

まず, 前章までで解析した 4 都市 2 産業のケースにおいて, 命題 4.2 で示した階層パターンが創発する条件

a) 集積パターンの進展過程

b) 2 極集中から 1 極集中への進展 (0.65 ≤ r ≤ 0.7 の範囲)

 図-5 両産業が同時に集積する場合: $\eta^{(1)} = 0.2$

 a) 3 段階の階層: $\eta^{(1)} = 0.3$

 b) 2 段階の階層: $\eta^{(1)} = 0.5$

図-6 階層パターンが創発する場合

を満たす $\eta^{(1)} = 0.3, 0.5$ とした場合を考える。図-6 a は、命題 5.2 で示した条件 (70b) のみが満たされないケースである、 $\eta^{(1)} = 0.3$ とした場合の結果である。この図から、産業 0, 1 の skilled worker の分布が「分散・分散 → 2 極・分散 → 1 極・3 極」と進展しており、輸送費用の低下により、階層的な産業構造が形成されていることが分かる。より具体的には、輸送費用が中程度 (r が 0.35~0.65 程度) であれば「両産業が立地する都市」と「産業 1 のみが立地する都市」の 2 段階、輸送費用が低い ($r > 0.65$) 場合は「両産業」、「産業 1」、「産業なし (農業部門のみが立地)」という 3 階層からなる産業構造が

創発している。

さらに、 $\eta^{(1)} = 0.5$ とした場合の安定的な均衡状態を図-6 b に示そう。このケースでは、条件 (59), (70) が常に満たされるため、図-6 a と異なり、skilled worker 1 は常に分散する。具体的には、輸送費用の低下に伴い、「分散・分散 → 2 極・分散 → 1 極・分散」と各産業の集積パターンが進展しており、命題 4.2, 5.2 と整合的な結果が確認された。

b) 8 都市 4 産業のケース

これまでに解析した 4 都市 2 産業から、都市数・産業数を増加させると、より多くの階層をもつ都市シス

図-7 8 都市 4 産業での安定的な集積パターン

テムが形成されると考えられる．そこで，次に，都市数を 8，産業数を 4 とした場合の数値計算例を示そう．図-7 a は $\eta \equiv [\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)}] = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3]$ とした場合，図-7 b は $\eta = [0.0, 0.1, 0.18, 0.3]$ とした場合の数値計算結果である．これらの図から，産業の階層が，輸送費用の減少に伴う skilled worker の集積により，徐々に増加していることが分かる．より具体的には，均衡解の分岐により，産業の階層が“1 段階→2 段階→3 段階→4(5) 段階”へと増加している．この結果から，都市数・産業数の増加に伴い，より複雑な都市システム内の産業の階層構造が表現できることが分かる．

これらの結果が得られる理由は，第 4, 5 章で示したように，relocation cost が必要な skilled worker の移住が，他の skilled worker の移住に伴い生じる都市間の効用差に起因していることから理解できる．具体的には，移住する skilled worker の種類・人数に応じて，都市間効用差が変化するため，skilled worker の relocation cost のわずかな違いが，結果に大きな違いをもたらす．これは，移住先の不確実性の解消などによる relocation cost の減少は，産業立地パターンの大幅な変化をもたらしていることを示唆している．

7. おわりに

本稿では，relocation cost を導入した多産業 CP モデルを構築し，その分岐特性を解析的に示した．その結果，階層的な産業構造が，安定的な均衡状態として創発することが明らかにされた．これは，産業毎に異なる立地変更の慣性力が，階層的な産業構造を持つ都市

システムを形成・維持させることを意味している．このような階層構造の形成・維持メカニズムは，従来研究では全く知られていない新たな知見である．

本研究では，産業構造の階層化メカニズムを明快に示すために，myopic な労働者を仮定して分析した．ただし，移住に伴う不確実性を認識できる状況を考える場合，労働者が予見的 (foresight) であると仮定した状況を考えるのがより自然であろう．したがって，予見的な労働者を仮定した分析を行い，本研究の結果の頑健性を確認することは，今後の重要な研究課題である．

謝辞： 本論文は，日本学術振興会・科学研究費補助金 (課題番号 24760415 / 24360202) の助成金を受けた研究の一部である．ここに記し，感謝の意を表する．

付録 I 調整ダイナミクスの解釈

式 (23) で示した $\gamma_{ij}^{(t)}(s)$ は，skilled worker t の行動が，立地変更を行う時点のみに支払う relocation cost と効用フローとの差で (i.e., ストックとフローを比較して) 決定されるという形で定式化されているしかし，この仮定 (23) は，skilled worker t が将来得られる効用フローを考慮して立地変更を行う状況とも対応が取れる．ここでは，それを具体的に確認しておこう．skilled worker t が都市 i において現時点 $s = s_0$ から将来に渡り得られる効用は，割引率 δ を用いて，

$$\int_{s_0}^{\infty} v_i(\mathbf{h}(s)) \exp[-\delta(s - s_0)] ds = \frac{v_i(\mathbf{h}(s_0))}{\delta}$$

と表現されたと考える。これは、skilled worker t は将来に渡り得られる効用を、現時点 s_0 での人口分布 $\mathbf{h}(s_0)$ が将来も続くと考えて算出することを意味する。このように効用を表現できる場合、 $\gamma_{ij}^{(t)}(s)$ は、以下のように与えられる：

$$\gamma_{ij}^{(t)}(s) = \frac{h_i^{(t)}(s)h_j^{(t)}(s)}{\delta H^{(t)}} \left[v_j^{(t)}(\mathbf{h}(s)) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}(s)) - \delta \eta_{ij}^{(t)} \right]_+.$$

上式は、 $\delta = 1$ となるように時間単位を基準化すると、式 (23) と一致する。以上より、 $\gamma_{ij}^{(t)}(s)$ に関する仮定 (23) は、skilled worker t が relocation cost と将来にわたり得られる効用とを比較して立地変更をする状況を表現していることがわかる。

付録 II 補題 2.2 の証明: 均衡状態の安定条件

条件 (b) は、式 (26) が満たされれば、 $h_i^{(t)*} \forall (i, t) \in \{(i, t) | \exists j \text{ s.t. } (i, j, t) \in \bar{S}\}$ を要素に持つ $\hat{\mathbf{h}}^*$ の近傍 $\mathbf{h}_n$ に対して $\dot{\mathbf{h}}_n = \mathbf{F}(\mathbf{h}_n) = \mathbf{0}$ となることを示している。このとき、都市 i の skilled worker t は移住しない。

条件 (a) は、 $(i, j, t) \in S$ に含まれる $(i, t), (j, t)$ に対応する $h_i^{(t)*}, h_j^{(t)*}$ の安定性は、通常の (i.e., relocation cost が存在しない) CP モデルの安定性解析と同様の方法で確認できることを主張している。これは、 $S_j^{(t)} \equiv \{i | (i, j, t) \in S\}$, $\hat{S}_i^{(t)} \equiv \{j | (i, j, t) \in S\}$ とすると、任意の t に対して調整ダイナミクス $\hat{F}_i^{(t)}$ が次のように与えられることから明らかである¹¹。

$$\hat{F}_i^{(t)} = \frac{h_i^{(t)*} \sum_{k \in \hat{S}_i^{(t)}} h_k^{(t)*}}{H^{(t)}} \left\{ v_i^{(t)}(\mathbf{h}^*) - \hat{v}_i^{(t)}(\mathbf{h}^*) \right\} \quad \forall i \in \bigcup_{j=0}^K S_j^{(t)},$$

$$\hat{v}_i^{(t)}(\mathbf{h}^*) \equiv \frac{\sum_{k \in \hat{S}_i^{(t)}} h_k^{(t)} \left\{ v_k^{(t)}(\mathbf{h}^*) - \eta_{ik}^{(t)} \right\}}{\sum_{k \in \hat{S}_i^{(t)}} h_k^{(t)}},$$

$$\hat{F}_j^{(t)} = \frac{h_j^{(t)*} \sum_{k \in S_j^{(t)}} h_k^{(t)*}}{H^{(t)}} \left\{ v_j^{(t)}(\mathbf{h}^*) - \check{v}_j^{(t)}(\mathbf{h}^*) \right\} \quad \forall j \in \bigcup_{i=0}^K \hat{S}_i^{(t)},$$

$$\check{v}_j^{(t)}(\mathbf{h}^*) \equiv \frac{\sum_{k \in S_j^{(t)}} h_k^{(t)} \left\{ v_k^{(t)}(\mathbf{h}^*) + \eta_{kj}^{(t)} \right\}}{\sum_{k \in S_j^{(t)}} h_k^{(t)}}.$$

付録 III 調整ダイナミクスの Jacobi 行列

ここでは、長期均衡状態 $\mathbf{h}^*$ における調整ダイナミクスの Jacobi 行列を示す。ただし、本稿で調整ダイナミクスの固有値・固有ベクトルの計算が必要となるのは、 $t = 0$ を除いて、 $v_i^{(t)} = v_j^{(t)} - \eta_{ij}^{(t)}$ が成立しないケースである (i.e., $(i, j, t) \in \bar{S} \forall i, j, t \neq 0$)。この場合、調整ダイ

¹¹ ここでは、条件 (26) が $(i, j, t) \in \bar{S}$ に対して成立するため、 $j \in S_i^{(t)}$ において $v_j^{(t)}(\mathbf{h}^*) = v_k(\mathbf{h}^*) - \eta_{jk}^{(t)}$ を満足する k が存在しないことに注意が必要である。

ナミクス $\mathbf{F}(\mathbf{h}^*)$ は、

$$\dot{\mathbf{h}}^* = \mathbf{F}(\mathbf{h}^*) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{h}^*) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

で表されるため、その右辺 $\mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{h}^*)$ の Jacobi 行列は次のように与えられる：

$$\nabla \mathbf{F}(\mathbf{h}^*) = \begin{bmatrix} \nabla_0 \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{h}^*) & \vdots & \nabla_1 \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{h}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ここで、 $\nabla_t \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{h}^*)$ は、 (i, j) 要素が $\partial F_i^{(0)}(\mathbf{h}^*) / \partial h_j^{(t)}$ の Jacobi 行列であり、次のように表される：

$$\begin{aligned} \nabla_0 \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{h}^*) &= \text{diag}[\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{h}^*) - \bar{\mathbf{v}}^{(0)}(\mathbf{h}^*) \mathbf{1}] \\ &+ \frac{\text{diag}[\mathbf{h}^{(0)*}] [(H^{(0)} \mathbf{I} - \mathbf{1} \{\mathbf{h}^{(0)*}\}^\top) \nabla_0 \mathbf{v}^{(0)} - \mathbf{1} \{\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{h}^*)\}^\top]}{H^{(0)}}, \end{aligned} \quad (\text{III.1a})$$

$$\nabla_1 \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{h}^*) = \frac{\text{diag}[\mathbf{h}^{(0)*}] [(H^{(0)} \mathbf{I} - \mathbf{1} \{\mathbf{h}^{(0)*}\}^\top) \nabla_1 \mathbf{v}^{(0)}]}{H^{(0)}}. \quad (\text{III.1b})$$

上式の右辺の Jacobi 行列は、次のように与えられる：

$$\begin{aligned} \nabla_t \mathbf{v}^{(0)} &\equiv \frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}}{\partial \mathbf{h}^{(t)}} = \nabla_t \mathbf{S}^{(t)} + \sigma^{-1} \left\{ \nabla_t \mathbf{w}^{\text{H},(0)} + \nabla_t \mathbf{w}^{\text{L},(0)} \right\}, \\ \nabla_t \mathbf{S}^{(t)} &= (\sigma - 1)^{-1} \mathbf{M}^{(t)\top}, \\ \nabla_t \mathbf{w}^{\text{H},(0)} &= \begin{cases} \mathbf{M}^{(0)} - \mathbf{M}^{(0)} \text{diag}[\mathbf{H}] \{\mathbf{M}^{(0)}\}^\top & \text{if } t = 0, \\ \mathbf{M}^{(0)} & \text{if } t = 1, \end{cases} \\ \nabla_t \mathbf{w}^{\text{L},(0)} &= \begin{cases} -\mathbf{I} \mathbf{M}^{(0)} \{\mathbf{M}^{(0)}\}^\top & \text{if } t = 0, \\ \mathbf{0} & \text{if } t = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

付録 IV 補題 5.1 の証明

階層パターン $\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)}$ の部分的な対称性を利用するために、都市集合 $C = \{0, 1, 2, 3\}$ を skilled worker 0 が居住する都市 $C_0 = \{0, 2\}$ と居住しない都市 $C_1 = \{1, 3\}$ に分割する。そのために、次の置換行列 $\mathbf{P}$ を定義する：

$$\mathbf{P} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

式 (III.1) に $\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)}$ を代入し、置換行列 $\mathbf{P}$ の相似変換を施すと、 $\nabla_t^\# \mathbf{F}^{(0)}(\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)}) \equiv \mathbf{P} \nabla_t \mathbf{F}^{(0)}(\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)}) \mathbf{P}^\top$ は

$$\nabla_t^\# \mathbf{F}^{(0)}(\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)}) = \begin{bmatrix} \nabla_t \mathbf{F}^{(0,0)} & \vdots & \nabla_t \mathbf{F}^{(0,1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \nabla_t \bar{\mathbf{F}}^{(1,1)} \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.1})$$

$$\nabla_0 \mathbf{F}^{(0,i)} \equiv 2h \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{E}_{[2]} \right) \nabla_0 \mathbf{v}^{(0,i)} - \frac{v_i^{(0)}(\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)})}{2} \mathbf{E}_{[2]},$$

$$\nabla_0 \mathbf{F}^{(1,1)} \equiv \left\{ \bar{v}(\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)}) - v_1(\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)}) \right\} \mathbf{I}$$

$$\nabla_1 \mathbf{F}^{(0,i)} \equiv 2h \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{E}_{[2]} \right) \nabla_1 \mathbf{v}^{(0,i)}$$

$$\nabla_1 \mathbf{F}^{(1,1)} \equiv \mathbf{0}$$

で与えられる。 $\nabla_t \mathbf{v}^{(0,i)}$ は、以下のように表される $\nabla_t^\# \mathbf{v}^{(0)}(\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)}) \equiv \mathbf{P} \nabla_t \mathbf{v}^{(0)}(\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)}) \mathbf{P}^\top$ の $0, i$ ブロックの部分行列である：

$$\nabla_t^\# \mathbf{v}^{(0)}(\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)}) = \nabla_t^\# \mathbf{S}^{(0)} + \sigma^{-1} \left[\nabla_t^\# \mathbf{w}^{\mathbf{H},(0)} + \nabla_t^\# \mathbf{w}^{\mathbf{L},(0)} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \nabla_t^\# \mathbf{v}^{(0,0)} & \nabla_t^\# \mathbf{v}^{(0,1)} \\ -\nabla_t^\# \mathbf{v}^{(1,0)} & -\nabla_t^\# \mathbf{v}^{(1,1)} \end{bmatrix},$$

$$\nabla_t^\# \mathbf{S}^{(0)} \equiv (\sigma - 1)^{-1} \mathbf{M}^\#,$$

$$\nabla_t^\# \mathbf{w}^{\mathbf{H},(0)} \equiv \begin{cases} \{\mathbf{M}^\#\}^\top - \{\mathbf{M}^\#\}^\top \mathbf{H}_{(2)}^\# \mathbf{M}^\# & \text{if } t = 0, \\ \mathbf{M}^\# & \text{if } t = 1, \end{cases}$$

$$\nabla_t^\# \mathbf{w}^{\mathbf{L}} \equiv \begin{cases} -l \{\mathbf{M}^\#\}^\top \mathbf{M}^\# & \text{if } t = 0, \\ \mathbf{0} & \text{if } t = 1, \end{cases}$$

ここで、 $\mathbf{M}^\#, \mathbf{H}_{(2)}^\#$ は、各々、 $\mathbf{M}, \text{diag}[\bar{\mathbf{h}}_{(2)}^{(0)} + \bar{\mathbf{h}}_{(2)}^{(1)}]$ を $\mathbf{P}$ で置換した行列である：

$$\mathbf{M}^\# \equiv \mathbf{P} \mathbf{M} \mathbf{P}^\top = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}/\hat{d} & \hat{\mathbf{E}}_{[2]}/2 \\ \hat{\mathbf{E}}_{[2]}/2 & \hat{\mathbf{D}}/\hat{d} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{(2)}^\# \equiv \mathbf{P} \text{diag}[\bar{\mathbf{h}}_{(2)}^{(0)} + \bar{\mathbf{h}}_{(2)}^{(1)}] \mathbf{P}^\top = \text{diag}[3h, 3h, h, h].$$

以上の結果から、 $\mathbf{v}^{(i,j)}$ が巡回行列であることが確認できるため、式 (IV.1) の各ブロックの部分行列 $\mathbf{F}^{(i,j)}$ も巡回行列であることがわかる。したがって、 $\nabla^\# \mathbf{F}(\bar{\mathbf{h}}_{(2)})$ は、 2×2 の DFT 行列 $\mathbf{Z}_{[2]}$ を対角ブロックに持つ $\hat{\mathbf{Z}}_{[2]} \equiv \text{diag}[\mathbf{Z}_{[2]}, \mathbf{Z}_{[2]}]$ による相似変換により、全てのブロックを対角化できる。さらに、各ブロック行列を対角化した行列は、上三角行列であるため、その対角要素が $\nabla \mathbf{F}(\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)})$ の固有値となる。これを計算すると、式 (61) が得られる。

参考文献

- 1) Pflüger, M.: A Simple, Analytically Solvable, Chamberlinian Agglomeration Model, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 34, No. 5, pp. 565–573, 2004.
- 2) Akamatsu, T., Takayama, Y. and Ikeda, K.: Spatial Discounting, Fourier, and Racetrack Economy: A Recipe for the Analysis of Spatial Agglomeration Models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 36, No. 11, pp. 1729–1759, 2012.
- 3) Ikeda, K., Akamatsu, T. and Kono, T.: Spatial Period-Doubling Agglomeration of a Core-Periphery Model with a System of Cities, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 36, No. 5, pp. 754–778, 2012.
- 4) Burda, M. C.: The Determinants of East-West German Migration: Some First Results, *European Economic Review*, Vol. 37, No. 2-3, pp. 452–461, 1993.
- 5) O'Connell, P. G. J.: Migration Under Uncertainty: "Try Your Luck" or "Wait and See", *Journal of Regional Science*, Vol. 37, No. 2, pp. 331–347, 1997.
- 6) Fujita, M.: On the Self-Organization and Evolution of Economic Geography, *The Japanese Economic Review*, Vol. 47, No. 1, pp. 34–61, 1996.
- 7) Christaller, W.: *Die Zentralen Orte in Süddeutschland*, Jena (English translation: Central Place in Southern Germany, Prentice-Hall, 1966), 1933.
- 8) Berry, B. J. L.: *Geography of Market Centers and Retail Distribution*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1967.
- 9) Marshall, J. U.: *The Structure of Urban Systems*, University of Toronto Press, 1989.
- 10) Mori, T., Nishikimi, K. and Smith, T. E.: The Number-Average Size Rule: A New Empirical Relationship between Industrial Location and City Size, *Journal of Regional Science*, Vol. 48, No. 1, pp. 165–211, 2008.
- 11) 赤松隆, 高山雄貴, 池田清宏, 菅澤晶子, 佐藤慎太郎: 1 次元都市システムにおける人口集積パターンの創発メカニズム, 土木学会論文集 D, Vol. 66, No. 4, pp. 442–460, 2010.
- 12) 高山雄貴, 赤松隆: 一次元空間における産業構造の階層化メカニズム: コミュニケーション外部性を考慮した多産業立地モデルの分岐解析, 土木計画学研究・論文集, Vol. 27, pp. 285–295, 2010.
- 13) Krugman, P. R.: History Versus Expectations, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 106, No. 2, pp. 651–667, 1991.
- 14) Baldwin, R. E.: Core-Periphery Model with Forward-Looking Expectations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 31, No. 1, pp. 21–49, 2001.
- 15) Ottaviano, G. I. P.: Monopolistic Competition, Trade, and Endogenous Spatial Fluctuations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 31, No. 1, pp. 51–77, 2001.
- 16) 織田澤利守, 赤松隆: 集積経済下における地域間移住タイミング選択の均衡ダイナミクス, 土木学会論文集 D, Vol. 63, No. 4, pp. 567–578, 2007.
- 17) Oyama, D.: History Versus Expectations in Economic Geography Reconsidered, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 33, No. 2, pp. 394–408, 2009.
- 18) Melitz, M. J.: The Impact of Trade on Intra-Industry Reallocations and Aggregate Industry Productivity, *Econometrica*, Vol. 71, No. 6, pp. 1695–1725, 2003.
- 19) Baldwin, R. E. and Okubo, T.: Heterogeneous Firms, Agglomeration and Economic Geography: Spatial Selection and Sorting, *Journal of Economic Geography*, Vol. 6, No. 3, pp. 323–346, 2006.
- 20) Lösch, A.: *Die Räumliche Ordnung der Wirtschaft*, Jena (English translation: The Economics of Location, Yale University Press, 1954), 1940.
- 21) Eaton, B. C. and Lipsey, R. G.: An Economic Theory of Central Places, *The Economic Journal*, Vol. 92, No. 365, pp. 56–72, 1982.
- 22) Fujita, M., Krugman, P. R. and Mori, T.: On the Evolution of Hierarchical Urban Systems, *European Economic Review*, Vol. 43, No. 2, pp. 209–251, 1999.
- 23) Tabuchi, T. and Thisse, J.-F.: A New Economic Geography Model of Central Places, *Journal of Urban Economics*, Vol. 69, No. 2, pp. 240–252, 2011.
- 24) Hsu, W.-T.: Central Place Theory and City Size Distribution, *The Economic Journal*, Vol. 122, No. 563, pp. 903–932, 2012.
- 25) Krugman, P. R.: Increasing Returns and Economic Geography, *The Journal of Political Economy*, Vol. 99, No. 3, pp. 483–499, 1991.
- 26) Akamatsu, T. and Takayama, Y.: A Simplified Approach to Analyzing Multi-location Agglomeration Models, *MPRA Paper, University Library of Munich*, 2012.
- 27) Forslid, R. and Ottaviano, G. I. P.: An Analytically Solvable Core-periphery Model, *Journal of Economic Geography*, Vol. 3, No. 3, pp. 229–240, 2003.
- 28) Krugman, P. R.: Intraindustry Specialization and the Gains from Trade, *The Journal of Political Economy*, Vol. 89, No. 5, pp. 959–973, 1981.

- 29) Zeng, D.-Z.: Redispersion is Different from Dispersion: Spatial Economy of Multiple Industries, *The Annals of Regional Science*, Vol. 40, No. 2, pp. 229-247, 2006.
- 30) Takatsuka, H. and Zeng, D.-Z.: Dispersion Forms: An Interaction of Market Access, Competition, and Urban Costs, *Journal of Regional Science*, Vol. 49, No. 1, pp. 177-204, 2009.
- 31) Dixit, A. K. and Stiglitz, J. E.: Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity, *The American Economic Review*, Vol. 67, No. 3, pp. 297-308, 1977.
- 32) Hirsch, M. W. and Smale, S.: *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- 33) Ikeda, K., Murota, K., Akamatsu, T., Kono, T., Takayama, Y., Sobhaninejad, G. and Shibasaki, A.: Self-Organizing Hexagons in Economic Agglomeration: Core-Periphery Models and Central Place Theory, *Mathematical Engineering Technical Reports, METR 2011-24, Department of Mathematical Engineering and Information Physics, The University of Tokyo*, 2011.
- 34) 高山雄貴, 赤松隆: 2次元集積経済モデルによる Lösch 型集積パターンの創発: 三角形格子状の都市モデルにおける理論的解析, *土木計画学研究・論文集*, Vol. 27, pp. 109-120, 2010.
- 35) 池田清宏, 赤松隆, 河野達仁, 高山雄貴, 坂本賢二, Reza, S.: 線分都市経済の人口集積メカニズムの分析, *土木学会論文集 D3(土木計画学)*, Vol. 69, No. 1, pp. 53-63, 2013.
- 36) 池田清宏, 河野達仁, 赤松隆, 柳本彰仁, 八巻俊二: 都市の集積・分散モデルの対称性破壊分岐: 群論的分岐理論によるアプローチ, *土木学会論文集 D*, Vol. 63, No. 4, pp. 553-566, 2007.
- 37) Ikeda, K. and Murota, K.: *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials*, Springer, 2010.
- 38) 藤井文夫, 大崎純, 池田清宏: 構造と材料の分岐力学, コロナ社, 2005.

(2013. 1. 24 受付)

EMERGENCE OF URBAN HIERARCHIES IN ONE-DIMENSIONAL SPACE: BIFURCATION ANALYSIS OF A MULTI- INDUSTRIAL CORE-PERIPHERY MODEL WITH RELOCATION COSTS

Yuki TAKAYAMA, Takashi AKAMATSU and Akiko FUKUSHIMA

The purpose of this study is to clarify the mechanism for the formation of hierarchical urban systems. Specifically, we show that relocation costs is a source for the emergence of urban hierarchies. To achieve this purpose, a multi-industrial core-periphery (CP) model is developed by extending a single-industrial CP model of Pflüger¹⁾, and by incorporating relocation costs that are heterogeneous across industries. Applying the analytical and numerical approaches provided by Akamatsu et al.²⁾ and Ikeda et al.³⁾, we show that hierarchical industrial location patterns emerge as stable equilibria of the model.