時間構造化ネットワーク上の確率的交通配分

大山 雄己¹・羽藤 英二²

¹正会員 東京工業大学 JSPS 特別研究員 PD (〒 152-0033 東京都目黒区大岡山 2-12-1)
E-mail: oymyk.dom@gmail.com

²正会員 東京大学教授 大学院工学系研究科社会基盤専攻 (〒 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)
E-mail: hato@bin.t.u-tokyo.ac.jp

マルコフ連鎖配分 (MCA) はその操作性の高さから近年再び注目を集めているものの、1) 過大なサイクリックフロー、2) ネットワーク条件に依存する計算不可能性、3) IIA 特性の増幅という課題を残すことが知られている。本研究では上記の課題を解決するローディングアルゴリズムとして、時間構造化ネットワーク上の交通配分 (TSA) 手法を提案する。時間制約パラメータとネットワークの構造化手法の導入により、経路選択肢集合が行動論的に解釈可能な形でシステムティックに限定され、サイクリック構造が除去されることで効率的・安定的な計算が可能となった。均衡配分および network-GEV モデルへの適用による数値計算から、周回経路が及ぼす交通量の過大推計・経路重複問題を解決可能であることを明らかにした。

Key Words: Markov chain assignment, stochastic network loading, route choice model, time-structured network, time-space prism

1. はじめに

ネットワークのローディングアルゴリズムは、ネットワークの条件が定まったもとで解析的に交通量を出力する手法であり、確率的均衡配分においては解法の一部を担う。ローディングの対象経路の最も基本的な考え方は、O から D までに同一のノードを2度以上通らない Simple path の集合であり、現実的なネットワークでは経路列挙が困難である。そこで、経路集合の設定を必要とする Explicit なアプローチではなく、経路を列挙しない Implicit アプローチが重要となる。本研究では、Implicit なローディングアルゴリズムとして、時間構造化ネットワーク上の交通配分手法を提案する。

Implicit なアプローチで最も代表的なモデルは Dial のアルゴリズム¹⁾である。計算効率を上げるために、起点から遠ざかり、かつ終点に近づく経路である Efficient path の集合に配分対象経路を限定したモデルであり、Van-Vliet²⁾によって Logit 型配分モデルとの等価性が証明された。Dial のアルゴリズムは計算効率性と Logit 型配分との等価性という優れた性質を持ち、確率的配分の手法として多くの場面で用いられているものの、大きく2つの課題が存在する。1つは、Efficient path によって経路を暗黙裏に限定する結果として、非現実的なフローパターンを生成してしまう可能性がある。2つめは、混雑を考慮した確率的利用者均衡配分を行う場合に、収束の過程で選択肢集合が変化するため、厳密解へ収束しない。後者については Leurent³⁾により1つの解決方法である Stable path set が示されたものの、Dial をベー

スとするアルゴリズムは未だ不自然なフローを生成する可能性を残し、また、周回経路を考慮することもできない。

経路列挙を必要としないもう一つの代表的なアプローチは、マルコフ過程に基づく配分アルゴリズム (Markov Chain Assignment, MCA) である。MCA は佐佐木⁴⁾が提案し、Bell⁵⁾, Akamatsu⁶⁾により Logit 型配分との接続が図られたもので、周回経路を含む無限の経路を配分対象とする。Baillon and Commetti⁷⁾が意思決定としての解釈を与え、Fosgerau et al.⁸⁾により離散選択分析へ展開されるなど、その操作性の高さから近年再び注目を集めている。しかし MCA は、無限周回経路を含む全ての経路を配分対象とするため、過大なサイクリックフローを発生させ、またネットワーク条件によっては手法の核となる期待効用の計算が不安定になるという課題を残している。これに対して、従前では Huang and Bell⁹⁾のようにサイクル経路の除去が図られてきたものの、未だその有効性には疑問が残る。

Logit 型配分にはまた、ロジットモデルの IIA 特性に起因して重複経路へ交通量を過大に配分する問題が存在する。Daganzo et al.¹⁰⁾のプロビット配分はその解決方法のひとつとして古くから知られているものの、計算負荷が高く、現実的なネットワークや繰り返し計算を必要とするモデルへの適用が難しい。また、GEV 型経路選択モデルとして、Vovsha and Bekhor¹¹⁾の CNL モデルや、Bekhor and Prashker¹²⁾による GNL 型確率的利用者均衡配分モデルが存在するものの、経路列挙の問題が生じる。対して、近年では network-GEV^{13),14)}型

の経路選択モデル^{15),18)} や MCA をベースとした Nested Recursive Logit (NRL) model¹⁶⁾, Generalized Recursive Logit model¹⁷⁾ など、経路列挙を必要とせずに経路重複問題を扱うことのできるモデルも提案されている。しかし network-GEV モデルの適用には、ネットワークがサイクルを含まないという条件を満たさなければならず、事前にネットワークの編集が必要であった¹⁸⁾。

本研究で提案する時間構造化ネットワーク上の配分アルゴリズム（時間構造化配分; Time-Structured Assignment, 以下 TSA）は、MCA を基本とし、Baillon and Commetti⁷⁾ と同様、旅行者がノードごとに逐次的なリンク選択を行う行動をモデル化する。本研究では、この逐次的な意思決定という考え方に着目し、無限周回経路の存在に依存した MCA の計算的課題の解決を試みる。意思決定のタイミングによってネットワークの状態を分離し、それらを改めて組み合わせた状態ネットワークである「時間構造化ネットワーク」を基本とし、時間制約の概念を用いたネットワークの限定手法を提案する。この手続きは、非現実的な経路の除去のみならず、従前手法の課題であったベルマン方程式の安定的な求解を可能とする。また、時間構造化ネットワークの記述は、空間的なサイクリック特性を保持したまま計算過程からサイクルの存在を省略できる。これによって、配分対象ネットワークがサイクルを含む場合においても Implicit な枠組みで経路の重複問題を考慮可能となる。

以上のようにネットワークの記述方法と経路の限定手法を提案することで、従前のネットワークローディング手法が抱える計算的課題の解決を試みることに加え、その手続きを通じて経路選択モデルに時空間プリズム制約という行動論的解釈を新しく与える点が、本研究の特徴である。

2. 時間構造化ネットワーク

有向ネットワーク $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ を考える。 $\mathcal{N}$, $\mathcal{A}$ はそれぞれノード、リンクの集合である。ノード間の接続条件を表す指示変数 $\delta(j|i)$ を、リンク $(i \rightarrow j)$ が存在すれば 1、それ以外で 0 とする。以上は通常の二次元空間ネットワークである。

対して、本研究は時間構造化ネットワーク $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{E})$ を導入する。 $\mathcal{S} = [\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_t, \dots, \mathcal{S}_T]$ および $\mathcal{E} = [\mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_t, \dots, \mathcal{E}_{T-1}]$ はそれぞれ状態集合、辺集合の時間配列である。時点 t の状態集合 $\mathcal{S}_t$ は状態 $s_t = i$ ($i \in \mathcal{N}$) を、辺集合 $\mathcal{E}_t$ は辺 $e_t = (s_t, s_{t+1})$ を要素として持つ。以上の記述に従い、経路は離散化された時点 $0 \sim T$ までの状態系列 $[s_0, \dots, s_T]$ として記述される。時間構造化ネットワークにおいて、状態は「時間」と「空間」の

組み合わせとして記述されるため、時点の異なる 2 つの状態 $s_t, s_{t'} (t \neq t')$ は、たとえ同じ空間を示す場合 (ex. $s_t = i, s_{t'} = i$) においても全く異なる状態として扱われる。この性質により、空間的なサイクリック構造を保持したまま、経路からサイクリック構造を除去することができる。

また、本研究では時間制約の概念を経路選択に導入することを考える。上記の記述において T が時間制約の変数に該当し、旅行者は必ず T ステップ以内で目的地に辿り着かなければならないものと考ええる。集合 $\mathcal{S}_t$ および $\mathcal{E}_t$ は時間制約 T の影響を受け、取りうる範囲が限定される。なお、便宜的に T を「時間制約」と表記するものの、本稿における T は経路に含まれる状態数の最大値を意味する。「時間」は旅行時間ではなく、意思決定の時点の意味する。つまり本研究は静的な配分手法であり、動学的な概念とは独立であることに注意されたい。

初期状態 $s_0 = o$, 最終状態 $s_T = d$ が与えられたとする。ここで、ノード $i \in \mathcal{N}$ の変数として $D^o(i)$ 及び $D^d(i)$ を定義する。それぞれ、空間ネットワーク $\mathcal{G}^s = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ 上で o, d からノード i に到達するまでの最小ステップ（リンク）数を表す。隣接するノード組に対する $D^o(i), D^d(i)$ の関係性は、動的計画法によって与えられる。

$$D^o(i) = \min_{h \in \mathcal{N}_i^-} [D^o(h) + 1] \quad (1)$$

$$D^d(i) = \min_{j \in \mathcal{N}_i^+} [D^d(j) + 1], \quad (2)$$

ここで、 $\mathcal{N}_i^-$ はノード i に流入するリンクの始点ノード集合、 $\mathcal{N}_i^+$ はノード i を始点とするリンクの終点ノード集合である。変数 $D^o(i), D^d(i)$ を用いて、 t 時点で取りうる状態集合 $\mathcal{S}_t$ は以下のように表される。

$$\mathcal{S}_t = \{i \in \mathcal{N} | I_t(i) = 1\} \quad (3)$$

where,

$$I_t(i) = \begin{cases} 1, & \text{if } D^o(i) \leq t, D^d(i) \leq T - t \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4)$$

さらに、時間構造化ネットワーク上の状態接続条件 Δ を用いて、時空間制約下の辺集合 $\mathcal{E}_t$ を以下のように定義する。

$$\mathcal{E}_t = \{(i, j) \in \mathcal{A} | \Delta_t(j|i) = 1\}, \quad (5)$$

where,

$$\Delta_t(j|i) = I_t(i)\delta(j|i)I_{t+1}(j). \quad (6)$$

$\delta(j|i)$ は前述の通り、空間的な接続条件を表す指示変数である。状態 $s_t = i$ 及び $s_{t+1} = j$ がネットワーク $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{E})$ 上に存在し、かつリンク $(i, j) \in \mathcal{A}$ が存在する場合のみ $\Delta_t(j|i) = 1$ となり、それ以外では $\Delta_t(j|i) = 0$ である。

以上式 (1)-(6) の操作は、時間構造化ネットワーク上の時空間プリズム制約を表している。時空間プリズム

図-1 時空間プリズムによる実行可能経路集合の限定

は Hägerstrand¹⁹⁾ によって提唱された概念であり、個人が時間制約下において到達可能な時空間範囲を意味する。本研究はこの考え方をネットワークへ適用したものであり、時空間プリズムを「時間制約下において到達可能な（離散的な）状態集合」 $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{E})$ として定義する。図-1 に時空間プリズム生成の例を示す。図-1(a) の空間ネットワークにおいて、 $T = 5$ の時間制約下でノード 7(o) を出発し、目的地をノード 14(d) とする経路を考える。例えばノード 18 に着目したとき、 $D^7(18) = 3$ 、 $D^{14}(18) = 2$ であり、 $\mathbf{I}(18)$ は

$$\mathbf{I}(18) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

となる。また、 $\Delta_2(18|17) = \Delta_2(18|13) = \Delta_3(19|18) = \Delta_3(13|18) = 1$ である。このように、各時点の状態集合 $\mathcal{S}_t$ 、 $\mathcal{E}_t$ を断面的に重ね合わせることで図-1(b) のような時空間プリズムを描くことができる。時空間プリズムはまた、基準となる状態 $s_t = (t, i)$ および最終状態 $s_T = (T, d)$ に依存する実行可能経路集合 $\mathcal{P}_{s_t}^{s_T}$ を表しており、図-1 の例では $\mathcal{P}_{(0,7)}^{(5,14)}$ は 41 の経路を含む（表-1）。プリズムによって経路が列挙可能な数に絞り込まれていると同時に、プリズムの範囲内で迂回・周回経路を許容していることがわかる。ここでは $T = 5$ を例としているものの、 T の値を調整することで配分対象経路のコントロールが可能である。

冒頭で述べたように、MCA は無限周回経路を含む全

ての経路を考慮することで、特に周回のコストが小さい場合に期待効用が発散に近づいて周回経路を過大評価してしまっていた。対して本研究は、個人の意思決定という観点から無限周回経路の存在が非現実的であることに着目し、時間制約（意思決定の時点数制約）というパラメータ T を導入することでシステムティックに経路集合の限定を行う手法を提案した。 T は外生的なパラメータであるものの、上述のように時空間プリズムを規定する行動論的パラメータとして解釈できる。時点幅やネットワークの表現方法を工夫することで、経路の旅行時間・距離制約としての解釈を与えることも可能である（詳しくは 8 章で議論したい）。また、プリズム制約を満たさない状態 s_t は $I(s_t) = 0$ であるため、行列 $\Delta_t(j|i)$ は通常のネットワーク接続行列 δ よりも非零要素の少ない非常に疎な構造を持つ。この構造に着目し、零要素を記憶しないスパース行列の手法を組み合わせることで、計算負荷、記憶容量が大幅に削減可能となる。

3. 経路選択モデル

本章では、時間構造化ネットワーク上の経路選択モデルを定式化する。

(1) 定式化

状態 $s_t = i$ にある旅行者が、次時点の状態 $s_{t+1} = j$ へ遷移することを考える。このとき、旅行者はリンク (i, j) の直接的なコスト c_{ij} と、最終状態 $s_T = d$ を考慮した状態 $s_{t+1} = j$ の期待最小コスト $\mu_{t+1}^{s_T}(j)$ との和を最小化させると仮定する。状態 $s_t = i$ 、 $s_{t+1} = j$ 間の遷移確率は以下の MNL(multinomial logit) モデルで与えられる（簡単のため、最終状態 s_T の表記を省略している）。

$$p_t(j|i) = \frac{\Delta_t(j|i)e^{-\theta(c_{ij} + \mu_{t+1}(j))}}{\sum_{j' \in \mathcal{N}} \Delta_t(j'|i)e^{-\theta(c_{ij'} + \mu_{t+1}(j'))}}, \quad (8)$$

ここで $\theta > 0$ は旅行コストに対する認知パラメータである。期待最小コスト $\mu_t(i)$ は次の再帰構造を持つ Bellman 方程式²⁰⁾ によって与えられる。

$$\mu_t(i) = \mathbb{E} \left[\min_{j \in \mathcal{N}_i^+} \{ \tilde{c}_{ij} + \mu_{t+1}(j) \} \right], \quad (9)$$

where,

$$\mathcal{N}_i^+ = \{ j \in \mathcal{S}_{t+1} | \Delta_t(j|i) = 1 \}, \quad (10)$$

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} + \varepsilon_{ij}. \quad (11)$$

$\mathcal{N}_i^+$ は s_t に接続する後続の状態集合である。 ε はリンクコスト $\tilde{c}_{ij}$ の確率項であり、i.i.d. ガンベル分布に従う。誤差分布の仮定より、式 (9) はログサム変数を用いて変

表-1 実行可能経路集合 $\mathcal{P}_{(0,7)}^{(5,14)}$

node number at each time													
path	t = 0	1	2	3	4	5	path	t = 0	1	2	3	4	5
1	7	2	3	4	9	14	22	7	8	9	14		
2	7	2	3	8	9	14	23	7	8	13	8	9	14
3	7	2	3	8	13	14	24	7	8	13	8	13	14
4	7	2	7	8	9	14	25	7	8	13	12	13	14
5	7	2	7	8	13	14	26	7	8	13	14		
6	7	2	7	12	13	14	27	7	8	13	18	13	14
7	7	6	7	8	9	14	28	7	8	13	18	19	14
8	7	6	7	8	13	14	29	7	12	7	8	9	14
9	7	6	7	12	13	14	30	7	12	7	8	13	14
10	7	6	11	12	13	14	31	7	12	7	12	13	14
11	7	8	3	4	9	14	32	7	12	11	12	13	14
12	7	8	3	8	9	14	33	7	12	13	8	9	14
13	7	8	3	8	13	14	34	7	12	13	8	13	14
14	7	8	7	8	9	14	35	7	12	13	12	13	14
15	7	8	7	8	13	14	36	7	12	13	14		
16	7	8	7	12	13	14	37	7	12	13	18	13	14
17	7	8	9	4	9	14	38	7	12	13	18	19	14
18	7	8	9	8	9	14	39	7	12	17	12	13	14
19	7	8	9	8	13	14	40	7	12	17	18	13	14
20	7	8	9	10	9	14	41	7	12	17	18	19	14
21	7	8	9	10	15	14							

換可能である。

$$\mu_t(i) = \begin{cases} -\frac{1}{\theta} \log \sum_{j \in N} \Delta_t(j|i) e^{-\theta\{c_{ij} + \mu_{t+1}(j)\}}, & t \neq T \wedge i \neq d, \\ 0, & t = T \vee i = d. \end{cases} \quad (12)$$

上記のような動的計画法を用いた定式化は従前のマルコフ連鎖配分^{6),7),8)}でも見られる手法である。しかし、本研究は経路選択モデルに時間 t およびプリズム制約 $\Delta_t(j|i)$ の概念を導入した点において特徴があり、この特性によってベルマン方程式を簡単に、安定的に解くことが可能となる。

(2) Bellman 方程式

式 (12) の両辺に指数関数を取り、以下のように変形する。

$$e^{-\theta\mu_t(i)} = \begin{cases} \sum_{j \in N} \Delta_t(j|i) e^{-\theta\{c_{ij} + \mu_{t+1}(j)\}}, & t \neq T \wedge i \neq d, \\ 1, & t = T \vee i = d. \end{cases} \quad (13)$$

さらに、式 (14) を要素として持つ行列 $\mathbf{v}_t (|N| \times 1)$, $\mathbf{W}_t (|N| \times |N|)$ を定義する。

$$v_{ti} = e^{-\theta\mu_t(i)}, W_{tij} = \Delta_t(j|i) e^{-\theta c_{ij}}. \quad (14)$$

また、行列 $\mathbf{v}_t$, $\mathbf{W}_t$ の時間配列を $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_T, \dots, \mathbf{v}_T]$, $\mathbf{W} = [\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_t, \dots, \mathbf{W}_{T-1}]$ と表記する。このとき、各状態の期待最小コスト μ は以下の Bellman 方程式の解である。

$$v_{ti} = \begin{cases} \sum_{j \in N} W_{tij} v_{t+1,j}, & t \neq T \wedge i \neq d, \\ 1, & t = T \vee i = d. \end{cases} \quad (15)$$

行列を用いて表現すれば、

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{W}_t \mathbf{v}_{t+1} + \mathbf{b}, \quad (16)$$

となる。ここで、 $\mathbf{b} (|N| \times 1)$ は目的地ノードに対応する要素のみ 1、それ以外の要素が 0 となるベクトルである。

(3) Bellman 方程式の求解

既存のマルコフ連鎖型の経路選択モデル^{6),5),8)}では、式 (16) は時点 t のサフィックスを持たない線形方程式系となり、その求解には以下の接続行列 $\mathbf{W}$ のスペクトル半径 $\rho(\mathbf{W})$ に関する不等式条件 (Hawkins-Simon condition) を満たす必要があった²¹⁾。

$$\rho(\mathbf{W}) = \max_h \{|\lambda_h|\} < 1 \quad (17)$$

λ_h は行列 $\mathbf{W}$ の h 番目固有値であり、式 (17) は $m \rightarrow \infty$ のときに行列 $\mathbf{W}^m$ が収束するための必要十分条件となる。つまり MCA の計算可能性はネットワーク構造に依存し、特にネットワークにサイクルが含まれ、かつ認知パラメータが小さい場合に収束が不安定になる (付録 II に計算例を示す)。

一方、時間構造化ネットワーク上では、意思決定のタイミング (時点 t) によって分離されたネットワークの状態ごとに期待最小コストが定義されており、Bellman 方程式を以下の後ろ向き帰納法によって解くことが可能である。

- Step 1: 準備。経路の初期状態 $s_0 = o$, 最終状態 $s_T = d$ を定め、 $\mu_t^{st}(d) = 0, \forall t$ とする。状態接続条件 Δ , 辺重み行列 $\mathbf{W}$ を計算する。
- Step 2: 初期化。 $t = T$, $\mu_t^{st}(i) = 0, \forall i \in N$ とする。

Step 3: 後ろ向き計算. $t = t - 1$ とし, 式 (16) を用いて $\mu_i^{s_T}(i)$ を計算する.

Step 4: 終了判定. $t = 0$ であれば計算を終了し, そうでなければ Step 3 へ戻る.

この計算方法は単純で収束計算を必要としないため, 時間制約 T が有限である限り一定の計算時間のオーダー ($T \times |N|$) で求解が可能である. 同時にプリズム制約 $\Delta_t(j|i)$ によって非現実的な状態があらかじめ除去されており, より安定的に解を求められる. また, 後ろ向き帰納法はベルマン方程式が線形か非線形かに依らないため, 後述の network-GEV 型モデルにおいても同様の手法を適用可能であり, 汎用性の高いアルゴリズムである点も利点といえよう.

4. 時間構造化ネットワーク上の交通配分

本章では, 確率的交通配分のための1つのネットワークローディング手法として, 時間構造化ネットワーク上の交通配分手法 (Time-Structured Assignment, TSA) を提案する. 従前のローディングアルゴリズム^{1),5),6)}と同様, 混雑を考慮しないネットワークにおけるリンク交通量 x_{ij} を解析的に算出する手法として位置づけられる.

なお, 本論文では意思決定タイミングによるネットワークの時間構造化を行う. つまり, 離散化された時点 t は明示的な時間単位ではなく, 状態遷移のステップであり, 1ステップの間に必ず1回のノード間遷移が行われる. それ以下でもそれ以上でもない. 時間制約が T のとき, 経路に含まれる状態数は必ず $T+1$ 以下となる (初期状態を $t=0$ とするため). 時点間隔として (30秒や1分といった) 明示的な時間を設定すれば, 配分結果の時間依存性を考察可能である²²⁾ものの, 本稿は既存の静的配分理論との比較に重きを置くため, 時間に関する考察は対象外とする.

各 $m = (s_0, s_T)$ に対して, 状態 $s_t = i$ に関する交通量 $g_i^{m,t}$, 辺 $e_t = (s_t = i, s_{t+1} = j)$ に関する交通量 $f_{ij}^{m,t}$ を定義する. なお, $g_i^{m,t}$, $f_{ij}^{m,t}$ は交通量の一時的な格納空間であり, その値自体に意味はないことに注意されたい. ここで, $g_i^{m,t}$, $f_{ij}^{m,t}$ の関係性は以下で定義される.

$$g_i^{m,t} = \begin{cases} \sum_{h \in N} f_{hi}^{m,t-1}, & t \neq 0 \\ Q_m, & t = 0 \wedge i = s_0 \\ 0, & t = 0 \wedge i \neq s_0 \end{cases} \quad (18)$$

and

$$f_{ij}^{m,t} = g_i^{m,t} p_t(j|i), \quad \forall t = \{0, \dots, T-1\} \quad (19)$$

$Q_m = Q_{s_0 s_T}$ は所与の OD 交通量である. また, 任意の状態 $s_t = i$ において以下のフロー保存則が成り立つ.

$$\sum_h f_{hi}^{m,t-1} - \sum_j f_{ij}^{m,t} + \eta_{s_t}^{s_0} Q_m - \eta_{s_t}^{s_T} Q_m = 0, \quad \forall t, \forall i \quad (20)$$

図-2 TSA アルゴリズムにおける交通量配分イメージ

$\eta_{s_t}^{s_0}, \eta_{s_t}^{s_T}$ はそれぞれ $s_t = s_0, s_t = s_T$ のときにのみ 1, それ以外で 0 の値をとる指示変数である. 特に $s_t = s_T$ における保存則は,

$$\sum_h f_{hd}^{m,T-1} - Q_m = 0 \Leftrightarrow g_d^{m,T} = \sum_h f_{hd}^{m,T-1} = Q_m \quad (21)$$

であり, 全ての交通量が最終状態 $s_T = d$ に吸収されることを意味している. なお, この保存則は時空間プリズム制約によって担保されている. $p_t(j|i)$ が $\Delta_t(j|i)$ を含むことで, プリズム内からプリズム外への状態遷移が起こり得ず, 式 (18),(19) から交通量が常にプリズム内を流れることがわかる.

図-2 に TSA アルゴリズムのイメージを示す. 初期状態に OD 交通量を与えて $g_{s_0}^{m,0} = Q_m$ とすれば, 式 (19), (18) を用いて時間前進方向に交通量 $g_i^{m,t}$, $f_{ij}^{m,t}$ を計算することができる. 全ての m について T まで計算したのち, $f_{ij}^{m,t}$ を足し合わせることでリンク $(i, j) \in \mathcal{A}$ の交通量 x_{ij}^m, x_{ij} を得ることができる.

$$x_{ij} = \sum_m x_{ij}^m = \sum_m \sum_{t=0}^{T-1} f_{ij}^{m,t}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}. \quad (22)$$

式 (22) の x_{ij} が従前のローディングアルゴリズムにおけるリンクフローに対応する変数である. 以上をまとめると, 時間構造化ネットワーク上の配分 (TSA) アルゴリズムは以下になる.

- Step 1: 実行可能経路集合の限定. 式 (1)-(6) に基づいて状態接続条件 Δ を計算する.
- Step 2: 状態遷移確率の計算. 辺重み行列 $\mathbf{W}$ を計算し, 3 章 (2),(3) のアルゴリズムに従い, 期待最小コスト μ^{s_T} を求める. μ^{s_T} を式 (8) に代入し, 状態遷移確率 p を計算する.
- Step 3: 初期交通量の設定. $t = 0$ とする. 初期状態フロー $g_{s_0}^{m,0}$ に OD 交通量 Q_m をセットする. $g_i^{m,0} = 0$ ($i \neq s_0$) とする.
- Step 4: 辺交通量の計算. 式 (19) を用いて, 時点 t の全ての辺について $f_{ij}^{m,t} = g_i^{m,t} p_t(j|i)$ を計算する.
- Step 5: 状態交通量の計算. $t = t + 1$ とする. 式 (18) に従い, 時点 t の状態フロー $g_i^{m,t} = \sum_{h \in N} f_{hi}^{m,t-1}$ を

計算する.

Step 6: 終了判定. $t = T$ であれば, 全てのリンクについて空間的フロー $x_{ij}^m = \sum_{t=0}^{T-1} f_{ij}^{m,t}$ を出力し, 計算を終了する. そうでなければ Step 4 へ戻る.

ここで, 以上の計算は, MCA における期待最小費用の求解および配分計算における無限等比級数を有限回 (T 回) で打ち切った結果とは異なることに注意されたい. TSA では状態遷移が時空間プリズムによる制約を受け, $\mathbf{W}$ および $\mathbf{p}$ は時点によって異なる値をとるため, 単純なべき乗和で計算することができない. つまり t が時間制約 T に近づくと, ネットワーク上のフロー全体が目的地 d により流れやすくなるという行動論的な性質が, $\mathbf{W}$ および $\mathbf{p}$ の時点依存性によって表現されている. 時点 T において状態 s_T に全ての交通量が吸収されることは, 式 (21) において明示的に示されている.

5. 計算性の検証

本章では, 前章までに提案した手法の計算性 (計算の安定性・効率性) をシンプルネットワークを用いた数値計算によって検証する.

(1) 計算の安定性

提案手法について, 既存モデルとの整合性および計算安定性を確認するため, 図-3 のサイクリックネットワークを用いて配分計算を行った. なお, 図のリンク上に記載された数値は各リンクコストを示している. $Q_{od} = 1000$ の交通量をノード 1(o) から 9(d) に流すことを考える. 認知パラメータを $\theta = 1$ としたときの各モデルの配分結果を表-2 に示す. Dial 配分では, Efficient path による経路の限定の結果, リンク 4-7, 7-8, 5-4, 7-4 の交通量が 0 となった. そのため, 周回経路を含む全経路を配分対象とする MCA とは結果が異なっている. TSA については, 時間制約のパラメータを $T = 5$ としたとき, サイクルを含む経路に交通量が配分されず, リンク 5-4, 7-4 のリンク交通量が 0 となった. T を大きくするとサイクルにも交通量が配分されるようになり, $T = 20$ のときには, 全てのリンクに関して MCA の配分結果と一致した. このように, TSA における T は配分経路の集合を一般化するパラメータであり, T を十分大きな値とすることにより, MCA の配分結果を TSA が特殊解として含むことがわかる.

次に, $\theta = 0.2$ としたときの各モデルの配分結果を表-3 に示す. Dial 配分では $\theta = 1$ のケースと同様 Efficient path の制約によってサイクル経路が除去され, θ の値に応じた配分交通量の変化が起こった. 一方, MCA では行列 W のスペクトル半径が 1.028 となり式 (17) が満たされず, 期待最小コストが発散して計算不可能となっ

図-3 サイクルを含むネットワーク 1

た. それに対して, TSA では $T = 5, 10, 20$ いずれのケースにおいても交通量を出力することが可能となった. 配分結果を見ると $T = 20$ の場合にはサイクル箇所であるリンク 4-5, 4-7, 5-4, 7-4 に過大なフローが流れてしまったように, 従前モデルと同様, 非現実的な配分結果を出力する可能性を残している. しかし, 特に繰り返し計算を必要とする均衡配分やパラメータ推定⁸⁾ において, 計算に不安定性が残ってしまっていた既往研究に対し, ネットワークの条件に依らず計算を可能とする本手法に有効性があるといえよう.

(2) 計算の効率性

TSA の計算効率性を検証するため, 図-4 のように, 1 辺に n 本のリンクを含むグリッドネットワークを対象として分析を行った. 全ての n に対して $Q_{od} = 1000$ の交通量を左上ノード (o) から右下ノード (d) に流した. なお, ネットワークのリンク数は $2n(n+1)$, ノード数は $(n+1)^2$ である. 例えば $n = 80$ のときにリンク数は 12,960 となり, 全ての経路を列挙することは困難であるといえよう.

このネットワークに対して n を 10 ずつ増加させ, Dial 配分, MCA, そして TSA による配分を行ったときの計算時間を比較した結果を表-4 に示す (計算の実行方法については付録 III に記載). なお, 各ネットワークにおいてそれぞれのアルゴリズムごとに 10 回の計算を行い, 実行時間の平均を表に示している. また, TSA の時間制約については $T = 2n + 1$ として設定した. 結果として, n のサイズに依らず TSA は既往配分手法と同程度の計算時間に収まっており, $n = 80$ のネットワークにおいても 1 分未満で計算が終了した. TSA は時間の次元 T を導入して一時的に状態空間を増加させるものの, プリズム制約によって考慮すべき状態を適切に削減し, スパース行列等の演算法を組み合わせることによって, リンク数が 10,000 を超えるネットワークにおいても現実的な実行時間で配分計算が可能であることが示された. 実際, TSA において計算負荷の大部分は期待最小費用の計算およびフロー計算が占めるもの

表-2 ネットワーク 1 における $\theta = 1$ のときの配分結果

	1-2	2-3	1-4	2-5	3-6	4-5	5-6	4-7	5-8	6-9	7-8	8-9	5-4	7-4
Dial	269	0	731	269	0	731	731	0	269	731	0	269	0	0
MCA	290	54	710	236	54	797	643	83	236	697	67	303	154	16
TSA ($T=5$)	298	63	702	235	63	639	639	63	235	702	63	298	0	0
TSA ($T=10$)	290	54	710	236	54	795	642	83	236	697	67	303	153	16
TSA ($T=20$)	290	54	710	236	54	797	643	83	236	697	67	303	154	16

表-3 ネットワーク 1 における $\theta = 0.2$ のときの配分結果

	1-2	2-3	1-4	2-5	3-6	4-5	5-6	4-7	5-8	6-9	7-8	8-9	5-4	7-4
Dial	269	0	731	269	0	731	731	0	269	731	0	269	0	0
MCA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
TSA ($T=5$)	465	144	535	320	144	391	391	144	320	535	144	465	0	0
TSA ($T=10$)	363	36	637	327	36	1431	399	764	327	435	238	565	1032	526
TSA ($T=20$)	340	12	660	328	12	3312	401	2008	328	413	259	587	2911	3164

図-4 1 辺に n 本のリンクを持つグリッドネットワーク

の, 3.4 章で示したようにそれぞれ単純な後ろ向き・前向き計算での求解が可能である. それぞれの計算オーダーが $T \times |N|$ であるため, 両者を考慮しても $2T|N|$ である. つまり, ネットワーク規模の増加に対して計算の次元数が指数的に増加しない (いわゆる「次元の呪い」の問題が生じない) ことがわかる.

一方で, 実ネットワークへの適用にあたっていくつかの注意点が存在する. TSA の計算量は T の値に左右されるため, T を大きくすれば計算時間が増加することに注意が必要である. また本章までに示した計算手順とその実行結果は, 単一の OD ペアに対応したものである. Dial 及び MCA は終点 (起点) 別変数を用いて多起点・1 終点の配分計算を同時に計算でき, 実務上の多起点・多終点の交通量配分に適用可能である. 本論文に示した方法では OD ペア分の計算を実行する必要があり, さまざまな場面での適用を考える上でも, 多起点・1 終点に対応する計算手法を示すことが最も重要な課題の 1 つであるといえよう (具体的な方針については 8 章で議論したい).

6. 確率的利用者均衡配分

本章では, TSA を確率的利用者均衡配分 (SUE) へ適用し, 既存のローディングアルゴリズムに対して結果がどのように変化するかを検証する.

(1) 等価な最適化問題

Akamatsu²³⁾ のエントロピー分解定理に従えば, 確率的均衡配分の最適化問題²⁴⁾ は, リンク交通量を未知変数とする以下の最適化問題を解くことに等しい.

$$\min Z(\mathbf{x}) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega + \frac{1}{\theta} \sum_o \sum_{ij} x_{ij}^o \ln x_{ij}^o - \frac{1}{\theta} \sum_o \sum_i \left(\sum_j x_{ij}^o \right) \ln \left(\sum_j x_{ij}^o \right), \quad (23)$$

s.t.,

$$\sum_h x_{hi}^o - \sum_j x_{ij}^o - \eta_{oi} q_{od} + \sum_d \eta_{id} q_{od} = 0, \quad \forall i \in N, \forall o \in O, \quad (24)$$

$$x_{ij} = \sum_o x_{ij}^o, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}, \quad (25)$$

$$x_{ij}^o \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}, \forall o \in O. \quad (26)$$

ここで, $t_{ij}(x_{ij})$ はリンク ij のフローディペンデントなコストであり, x_{ij}^o は起点 o から出発し, リンク ij を通過する交通量を示す. 式 (24) はノード i に関する起点別のフロー保存則を意味し, η_{oi} , η_{id} はそれぞれ i が目的地ノード, 出発地ノードであるときに 1, それ以外で 0 となる指示変数である. q_{ij} はノード i から j へ向かう交通量である. 式 (25), (26) はそれぞれ起点別リンク交通量の保存則, フローに関する非負条件である. 式 (23)-(26) で示される最適化問題の最適解は, Dial 配分および MCA において Logit 型配分モデルと等価であることが Akamatsu²³⁾ によって示されている.

本論文の TSA を用いる場合, 解くべき等価最適化問題は時間構造化ネットワーク上の辺交通量 $\{f_{ij}^{m,t}\}$ を未知

表-4 グリッドネットワークにおける計算時間の比較 (単位: 秒)

n	10	20	30	40	50	60	70	80
Dial	0.03	0.27	1.06	3.07	7.16	14.36	26.71	47.18
MCA	0.01	0.06	0.30	1.55	6.18	17.61	42.99	94.81
TSA	0.15	0.60	1.91	4.47	9.68	18.67	33.33	55.45

*各 n , 各アルゴリズムについて 10 回ずつ計算を行い, 平均の計算時間を記載.

変数とする問題として, 次のように定式化される.

$$\min Z(\mathbf{f}) = \sum_{ij} \int_0^{x_{ij}} t_{ij}(\omega) d\omega + \frac{1}{\theta} \sum_m \sum_t \sum_{ij} f_{ij}^{m,t} \ln f_{ij}^{m,t} - \frac{1}{\theta} \sum_m \sum_t \sum_i \left(\sum_j f_{ij}^{m,t} \right) \ln \left(\sum_j f_{ij}^{m,t} \right), \quad (27)$$

s.t., 式 (20) および

$$x_{ij} = \sum_m \sum_t f_{ij}^{m,t}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A} \quad (28)$$

$$f_{ij}^{m,t} \geq 0, \quad \forall m, \forall t, \forall (i, j) \in \mathcal{A}. \quad (29)$$

ここで, $m = (s_0, s_T)$ は初期状態・最終状態のペアを表している.

Proof. Lagrange $\mathcal{L}$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{f}, \gamma, \lambda) = & Z(\mathbf{f}) \\ & + \sum_m \sum_t \sum_i \gamma_i^{m,t} \left(\sum_h f_{hi}^{m,t-1} - \sum_j f_{ij}^{m,t} + \eta_{s_i}^{s_0} Q_m - \eta_{s_i}^{s_T} Q_m \right) \\ & + \sum_{ij} \lambda_{ij} \left(x_{ij} - \sum_m \sum_t f_{ij}^{m,t} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

として定義する. 式 (27)-(29) の最適化問題の KKT 条件 (Karush-Kuhn-Tucker condition) は,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{ij}^{m,t}} \cdot f_{ij}^{m,t} = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{ij}^{m,t}} \geq 0, \quad (32)$$

および式 (20),(28),(29) であることから, $f_{ij}^{m,t} \geq 0$ のとき次式を得る.

$$c_{ij} + \log \frac{f_{ij}^{m,t}}{\sum_j f_{ij}^{m,t}} + \gamma_j^{m,t+1} - \gamma_i^{m,t} = 0 \quad (33)$$

where,

$$c_{ij} = t_{ij}(x_{ij}) \quad (34)$$

式 (33) を整理すると,

$$p_t(j|i) = \frac{f_{ij}^{m,t}}{\sum_j f_{ij}^{m,t}} = e^{-\theta(c_{ij} + \gamma_j^{m,t+1} - \gamma_i^{m,t})} \quad (35)$$

を得る. また, 任意の状態 $s_t = i$ について状態推移確率 $p_t(j|i)$ の和は 1 で保存されているため,

$$e^{-\theta\gamma_i^{m,t}} = \sum_j e^{-\theta c_{ij}} e^{-\theta\gamma_j^{m,t+1}} \quad (36)$$

が成り立つ. $\gamma_i^{m,t}$ を状態 $s_t = i$ における期待最小費用 $\mu_i^{m,t}$ とみなせば, これは式 (16) の Bellman 方程式と同

値であり, 時間構造化ネットワーク上の経路選択モデルに他ならない.

さらに, $v_{t,i} = e^{-\theta\gamma_i^{m,t}}$, $w_{ij} = e^{-\theta c_{ij}}$ の記述を用いて, 時点 T まで式 (36) を展開すると,

$$v_{t,i_t} = \sum_{i_{t+1}} w_{i_t i_{t+1}} \sum_{i_{t+2}} w_{i_{t+1} i_{t+2}} \cdots \sum_{i_{T-1}} w_{i_{T-2} i_{T-1}} \cdot w_{i_{T-1} d} v_{T,d} \quad (37)$$

となる. 任意の時点 $t+l$ ($0 < l < T-t$) において考慮の対象となる状態 $s_{t+l} = i_{t+l}$ は $D^i(i_{t+l}) \leq l$ かつ $D^d(i_{t+l}) \leq T - (t+l)$ を満たすもののみであるため,

$$\begin{aligned} v_{t,i_t} &= v_{T,d} \sum_{r \in \mathcal{P}_{(i_t)}^{(T,d)}} \prod_{ij \in r} w_{ij} \\ &= v_{T,d} \sum_{r \in \mathcal{P}_{(i_t)}^{(T,d)}} e^{-\theta c_r} \end{aligned} \quad (38)$$

となる. ここで, $\mathcal{P}_{(i_t)}^{(T,d)}$ は i_t から $(T-t)$ ステップ以内で d に到達する全ての経路の集合 (状態 (t, i_t) および (T, d) によって規定される時空間プリズム) であり, c_r は経路 r のコストである. $v_{T,d} = 1$ とみなせば,

$$v_{t,i_t} = \sum_{r \in \mathcal{P}_{(i_t)}^{(T,d)}} e^{-\theta c_r} \quad (39)$$

であり, これは状態 (T, d) においても成り立つ (右辺は 1 に等しい). 式 (35),(39) より, 経路 $r = [i_0, i_1, \dots, i_{T-1}, i_T]$ ($i_0 = o, i_T = d$) の選択確率は以下ようになる.

$$\begin{aligned} P(r) &= \prod_{t=0}^{T-1} p_t(i_{t+1}|i_t) \\ &= e^{-\theta \sum_{t=0}^{T-1} c_{i_t i_{t+1}}} \frac{v_{T,d}}{v_{0,o}} \\ &= \frac{e^{-\theta c_r}}{\sum_{r \in \mathcal{P}_{(0,o)}^{(T,d)}} e^{-\theta c_r}} \end{aligned} \quad (40)$$

これは 2 章で定義した時空間プリズム $\mathcal{P}_{(0,o)}^{(T,d)}$ を経路集合とする Logit 型配分と等しい.

以上より, 式 (27)-(29) で示される最適化問題が, 時空間プリズムによって定義される経路選択肢集合に対する Logit 型配分 (TSA 配分) と等価であることが証明された. $\square$

また, 解の一意性について考える. 式 (27) の目的関数の第一項 (積分項) はリンクコストパフォーマンス関数がリンクフロー x の単調増加関数であるとき, x に関する狭義凸関数となる²¹⁾. 第 2,3 項のエントロピー関

数項は、以下のように状態 $s_t = i$ ごとのエントロピー関数に分解できる。

$$-H(\mathbf{f}) = \sum_m \sum_t \sum_i -H_{ii}^m(\mathbf{f}) \quad (41)$$

where

$$H_{ii}^m(\mathbf{f}) = - \sum_j f_{ij}^{m,t} \ln f_{ij}^{m,t} + \left(\sum_j f_{ij}^{m,t} \right) \ln \left(\sum_j f_{ij}^{m,t} \right) \quad (42)$$

このとき、 $-H_{ii}^m$ は状態 $s_t = i$ を起点とする辺交通量 $\{f_{ij}^{m,t}, \forall j \in N_i^+\}$ に関して狭義凸関数である²³⁾。さらに、式 (20) および (28),(29) の制約条件は線形等式と非負条件のみであるため、解の許容領域は閉凸集合である。したがって、式 (27)-(29) の最適化問題は狭義に凸の目的関数を持つ凸計画問題であり、解が存在する場合には常に一意に定まる。

本研究ではこの等価最適化問題を、部分線形化法によって解く。部分線形化法では、式 (27) の第一項（積分項）を部分線形化近似した補助問題が2~4章のTSA配分と等価となる。このことは、補助問題の最適性条件が式 (27)-(29) の最適化問題の最適性条件に一致することから同様の手順で証明することが可能である。つまり、TSA配分アルゴリズムは均衡配分問題の解法において、各反復（リンクコストの改訂）に対する交通パターン $\mathbf{x}$ を求めるために用いられる。

(2) 配分結果

ノード数 24, リンク数 76, OD ペア数 552, 総需要 36650 の Sioux Falls ネットワークデータ²⁵⁾ を対象とし、Dial, MCA, TSA それぞれのローディングアルゴリズムを用いた確率的均衡配分を行った。認知パラメータを $\theta = 1$ とし、Dial のアルゴリズムを用いた場合の配分結果と、MCA 及び TSA を用いて SUE を解いた配分結果とのリンク交通量の差を図-5 に示す。差の大きさを色分けして示しており、灰・黒色の場合は Dial 配分の結果と大きな違いはなく、赤の場合であれば Dial の結果よりも 1200 台以上多くの交通量が配分されたことを意味する。MCA の配分結果（図-5A）を見ると、ノード 7,8,16,18 で形成されるサイクルに含まれる全てのリンクで交通量が 200 以上増加しており、過大なサイクリックフローが生まれたといえる。一方、TSA の配分結果（図-5B）では、リンク 7-18, 18-7 では大きなリンク交通量の増加が未だ見られるものの、MCA に比べれば全体的にフローの増加が抑えられていることがわかる。なお、全ての OD 間が到達可能であり、かつ経路の多様性を許容するため、時間制約のパラメータは $T = \max[2D^o(d)]$ のように設定した。つまり、TSA は MCA と同様マルコフ連鎖をベースとしながら、時間制約という行動原理に即したパラメータを導入することで、MCA の課題であった過大なサイクリックフローに

対する 1 つの回答を提示したといえよう。

また、各アルゴリズムを用いた場合の収束過程を検証するため、誤差指標 ε_1 , ε_2 を次のように定義し、その変化を図-6 に示した。

$$\varepsilon_1 = 100 \times \frac{\sum_{ij} (x_{ij}^* - x_{ij})^2}{\sum_{ij} x_{ij}^*}, \quad (43)$$

$$\varepsilon_2 = 100 \times \max_{ij} \frac{|x_{ij}^* - x_{ij}|}{x_{ij}^*}. \quad (44)$$

ここで、 x_{ij}^* は収束時点のリンク交通量、 x_{ij} は収束の各ステップにおけるリンク交通量である。サイクリック経路が発生する MCA や TSA は Dial 配分に比べて初期の振動が大きいものの、収束のスピードに大きな差はない結果となった。Dial 配分は収束に要する反復回数が少ないものの、リンク旅行時間の変動によって配分対象経路である Efficient path が変化するため、厳密解に収束しないことが知られている。TSA は MCA に対して状態数が T 倍となるため、その分収束させるべきパラメータ数が多く、反復回数が最も多くなったと考えられる。また、Dial 配分と TSA はいずれも最短経路探索をアルゴリズム中に含む。Dial 配分が各反復ごとに最短経路探索を行う一方で、TSA の基準となる変数 D^o , D^d は混雑条件に依存せず均衡配分の計算過程で一定の値をとるため、TSA では全反復、そして全 OD ペアに対して 1 度のみ最短経路探索を実行すればよい。

7. サイクリックネットワークの経路重複問題

既往研究^{15),18)} と同様の手法を用いて、提案モデルを network-GEV(n-GEV) 型モデルへと拡張する。n-GEV モデルの適用には、ネットワークがサイクリック構造を持たないという条件を満たす必要があり^{13),14)}、nGEV 型経路選択モデルでは事前にネットワークの編集を行い、サイクルを除去する必要があった。原・赤松¹⁸⁾ では Max-Plus 代数を用いた記述によりサイクリック構造を許容した n-GEV モデルの可能性を示唆しているものの、実際の計算では上述の条件を満たすために Dial ネットワークへ編集したネットワークを用いている。一方で、本研究で提案した時間構造化ネットワーク上の経路は本来的にサイクルを持ち得ないため、空間的なネットワークを切断・編集する必要がない。本章ではこの時間構造化ネットワークの特性を生かして、サイクルを持つ経路を考慮に入れた場合の経路相関パターンを分析することを試みる。なお、本章で用いるモデルは既存研究で提案された n-GEV 型経路選択モデルの適用にとどまっており、ここではサイクリック経路の存在がモデルの解に与える影響を考察することを目的とする。

図-5 Sioux Falls ネットワークを対象とした確率的利用者均衡配分の結果 (A: MCA, B: TSA をそれぞれ解法として用いた場合と Dial 配分を解法として用いた場合の交通量の差)

図-6 平均、最大誤差の推移

(1) network-GEV 型モデルの定式化

時間構造化ネットワーク上の n-GEV 型経路選択モデル (n-GEV-t) の状態遷移確率は、以下の式で表される。

$$p_t(j|i) = \frac{\Delta_t(j|i) \cdot \alpha_{ij} e^{-\theta_i \{c_{ij} + \mu_{t+1}(j)\}}}{\sum_{j' \in N} \Delta_t(j'|i) \cdot \alpha_{ij'} e^{-\theta_i \{c_{ij'} + \mu_{t+1}(j')\}}}, \quad (45)$$

ここで、 θ_i はノード i に固有のスケールパラメータであり、状態 $s_t = i, \forall t$ において共通である。 α_{ij} はノードペア (i, j) に固有のアロケーションパラメータであり、辺 $e_t = (s_t = i, s_{t+1} = j), \forall t$ において共通である。なお、アロケーションパラメータは隣接ノード間の関係性を表し、 $\sum_j \alpha_{ij}, \alpha_{ij} > 0, \forall ij$ を満たす。これらのパラメータの導入により、Bellman 方程式は以下のように書き換えられる。

$$v_{ti} = \sum_{j \in N} w_{tij} (v_{t+1,j})^{\frac{\theta_i}{\theta_j}} \quad (46)$$

where,

$$v_{ti} = e^{\theta_i \mu_t(i)} \quad (47)$$

$$w_{tij} = \Delta_t(j|i) \cdot \alpha_{ij} e^{\theta_i c_{ij}} \quad (48)$$

式 (48) は非線形方程式となるものの、価値関数 v_{ti} が時間構造化処理されているため、3 章と同様に後ろ向き帰納法によって解くことができる。

(2) 経路選択確率

n-GEV-t モデルにおける経路 r の選択確率は、状態遷移確率を用いて、

$$\mathbb{P}(r = [i_0, \dots, i_t, \dots, i_T]) = \prod_{t=0}^{T-1} p_t(i_{t+1}|i_t) \quad (49)$$

のように求められる。式 (49) に従い、図-7 上のネットワークにおける経路選択確率を計算し、既存モデルの計算結果と比較を行った。ここで $T = 6$ と設定すれば、図-7 下の 6 経路が存在する。それぞれ経路ベースのコストは 4, 4, 4, 6, 6, 6 であり、各経路の選択確率を $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ と表記する。なお、スケールパラ

メータ, アロケーションパラメータはそれぞれ

$$\theta_i = \frac{D^o(d)}{D^d(i)} \quad (50)$$

$$\alpha_{ij} = \frac{\delta(j|i)}{N(i)} \quad (51)$$

とした. $N(i)$ はノード i の次数を表す.

経路選択確率の計算結果を表-5 に示す. まず, サイクルを考慮せずに経路 1,2,3 のみを選択肢集合とする Logit 型経路選択モデルの結果は, $P_1 = P_2 = P_3 = 0.333$ となった. 経路 1,2 はリンク 1-2 を共有しており, 互いに相関を持つと考えられるものの, Logit モデルの IIA(Independence from Irrelevant Alternatives) 特性により全ての経路選択確率が等しくなった. n-GEV 型経路選択モデルでは, $P_1 = P_2 = 0.250, P_3 = 0.500$ となり, 経路 1,2 の相関が考慮される結果となった. しかしサイクリック構造は考慮できずにリンク 3-1 の切断が必要であり, 経路 4,5,6 の選択確率は評価されない. サイクリック経路を選択肢集合に含む場合の Logit 型経路選択モデルでは, $P_1 = P_2 = P_3 = 0.294, P_4 = P_5 = P_6 = 0.040$ となった. サイクリック経路を考慮したことによってリンク 1-2 の使用率が高まったものの, IIA 特性により経路間の重複は考慮されていない. こうした従前モデルに対して, n-GEV-t モデルでは $P_3 > P_1 > P_2 > P_6 > P_4 > P_5$ のように, 全ての経路で選択確率が異なる結果となった. 周回経路を含む経路の相関が考慮されることで経路 1,2 の選択確率に差が生まれるだけでなく, 同じノードを複数回訪れるためのコストが大きいといったメカニズムが考慮され, 経路 4,5,6 の選択確率が Logit 型経路選択モデルの結果よりも軒並み小さく評価される結果となった. 災害時, あるいは歩行者の回遊時の経路選択行動では, 周回経路の発生が十分に考えられるように, 選択肢集合からサイクリック経路を取り除くことは適切ではない. このとき, 従前では考慮できなかった, 同じ空間を二度以上訪れるコストが高いといった行動メカニズム (Cycle reluctance) が記述できることで, 過大な選択確率がサイクリック経路に割り当てられることを避けることができると考えられる.

(3) ネットワークフロー

次に, 経路選択確率の計算に用いた 4 つのモデルを用いて, ネットワーク配分を行った結果を図-8 に示す. なお, 混雑は考慮せずに 1 度のみのローディングを行った. 図-8 A,B は図-7 下の経路 1,2,3 のみを考慮した場合の結果であり, A でリンク 1-2 に流れていた過大なフローが, B では重複が考慮され抑制されたことがわかる. 周回を考慮した Logit 型経路選択モデル (図-8 C) では, リンク 1-2 を通過する経路数が増加したことにより, A の場合よりもさらに過大なフローがリンク 1-2, 2-3 に流れる結果となった. サイクリック経路に含まれ

図-7 サイクルを持つネットワーク 2 (上), $T = 6$ のときの経路選択肢 (下)

るリンク 3-1 には 119 の交通量が配分された. 対して, n-GEV-t モデルを用いた配分結果 (図-8 D) では, 周回経路を含む経路の重複が考慮され, A,B,C の場合に発生していた過大なフローが抑えられる結果となった. リンク 3-1, つまりサイクリック経路の存在が明示的に考慮されることで, より多くの交通量が経路 3 (リンク 1-4) に流れ, リンク 1-2 の交通量がサイクルを考慮しない場合よりも減少した. リンク 3-4 の交通量の差は特に大きく, 相関を考慮しない A,C のケースでは 333 の交通量が配分された一方, B のケースでは 250, D では 142 となった. このように, 周回経路によってリンクの重複度が上がり, フローが抑制されるといった現象は従前のモデルでは記述出来なかった. 本モデルでは, 周回を含む経路の多様性が, 経路の選択確率およびリンク交通量に与える影響を評価できるようになった点に特徴があるといえよう.

8. おわりに

本研究では, 静的配分におけるネットワークローディング手法として, 時間構造化ネットワーク上の交通配分 (TSA) アルゴリズムを提案した. ネットワークの時間構造化は, ネットワーク上の状態を意思決定のタイミングによって分離する操作であり, 計算過程でサイクルの存在を省略することができる. また, 時間制約

表-5 経路選択確率の比較

Path	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
logit	0.333	0.333	0.333	-	-	-
nGEV	0.250	0.250	0.500	-	-	-
TSN-logit	0.294	0.294	0.294	0.040	0.040	0.040
TSN-nGEV	0.281	0.140	0.562	0.005	0.002	0.010

図-8 ネットワーク 2 における交通量配分結果の比較

のパラメータ T を導入することで、時空間プリズムという行動論的解釈の可能な概念に即した形で経路選択肢集合がシステマティックに限定可能となることを示した。これらの工夫により、経路選択確率の評価において、単純な解法を用いた Bellman 方程式の求解が可能となり、ネットワーク条件に依らず期待最小コストを安定的に求められる。数値計算によって、従前の MCA ではスペクトル半径の問題が生じて配分不可能であったネットワークにおいても交通量を出力でき、かつ時間制約パラメータ T を操作することで柔軟にその値を検証可能となったことを示した。確率的利用者均衡配分の計算結果においては、TSA アルゴリズムの適用が、MCA の場合に発生する過大なサイクリックフローを抑制しうる可能性が示された。さらに network-GEV 型モデルへと拡張することで、従前では難しかった、周回経路を含む経路の重複効果を記述可能であることを数値計算から明らかとした。

以上より、本研究で提案する TSA アルゴリズムは、従前の MCA が抱えていた 1) ネットワーク条件に依存する計算性、2) 過大なサイクリックフロー、そして 3) IIA 特性の増幅という 3 つの課題を解決しうる手法であると結論づけられる。さらに、計算性の検証からも、そ

うした問題の解決が現実的な計算時間で可能であることが示された。

計算時間をより高速にし、大都市道路網といった実ネットワークへの適用を考える上では、多起点・多終点に対応した TSA の計算手続きを示す必要がある。本論文で示した計算手順は単一の OD 別に同様の操作・計算を繰り返すものであり、Dial や MCA といった既存の配分手法に対して効率的とは言えない。TSA において、時空間プリズムを規定する状態接続条件が起点・終点に依存するものの、同一の時間制約であれば起点にバリエーションを与えていづれかの起点からの最小ステップ数を計算することで、多起点・1 終点の計算を同時に実行できる。時点 T 付近の状態集合が単一の最終状態に吸収されるよう限定されるため、本論文と同様、無限周回経路が発生することはない。また複数の初期状態（時間付き起点）と発生交通量を考慮でき、動的な交通量配分への発展も可能である。ただし、プリズムの形が複数の起点の影響を受けて歪になること、時点 0 付近の状態集合が密になることが想定されるため、プリズムの解釈も含めた計算手順や計算性の検証を今後の課題とし、後続の研究で示したい。

本研究は、個人の意思決定という観点から無限周回

経路の存在が非現実的であることに着目し、時間制約のパラメータ T を導入した。論文中で提示したように、 T は時空間プリズムを規定するパラメータとして、経路選択モデルに新たな行動論的解釈を与える可能性を持つ。災害時の経路選択行動といった不確実状況下の動学的な意思決定や、時間制約下で地区を動き回って効用を最大化させる回遊行動なども今後の適用例として考えられる。その際、時間制約のパラメータ T の個人間異質性や確率分布の仮定が研究課題として挙げられよう。しかし、パラメータ T の設定方法については継続した検証が必要である。本論文の計算では、 T の値によって配分結果や計算効率性が異なることに言及したものの、妥当な値については検証を行っていない。また、全ての OD ペアに対して共通の値として扱ったことも課題だといえよう。任意のネットワークが与えられたときに T を決定する明確な基準が示されていない点が本論文の限界であり、実交通におけるサイクリック経路の発生率や交通量の配分結果等から、適切な T の設定方法を検証していく必要があると考えられよう。また、ネットワーク表現と T との関係についても課題が残る。本論文では交差点をノード、交差点ごとに区切られた道路をリンクとしてネットワークを表現し、通過リンク数制約を与えてネットワークを限定したものの、道路区間・交差点の設定は配分結果に少なくない影響を与えると考えられる。ネットワーク表現はまた、パラメータ T の解釈を左右する。本研究ではリンク間の推移を意思決定のタイミングとしてみなすというモデルの性質上、最も一般的な「時間制約」という用語を用いた。しかし、例えば交差点ごとに区切られた道路を一本のリンクとみなす場合、 T は通過する交差点の数を表し、また一定距離区間でリンクを定義することで、 T (に単位リンク距離を乗じた値) を経路距離の制約として考えることも可能である。 T の行動論的解釈とその可能性の追求、そしてより扱いやすい指標とするための枠組みの提示・実証が今後の課題である。

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 JP14J10824, JP17J09979 の助成を受けたものです。ここに感謝の意を表します。

付録 I Logit 型配分との等価性

経路 $r = [s_0, \dots, s_t, \dots, s_T] = [i_0, \dots, i_t, \dots, i_T]$ を考える。 r は時間構造化ネットワーク上の経路である。リンクコストは時点に依らず一定のため、経路 r のコストは $c_r = \sum_{t=0}^{T-1} c_{i_t i_{t+1}}$ である。経路 r の選択確率は状態遷移確率を用いて、

$$\mathbb{P}(r = [i_0, \dots, i_t, \dots, i_T]) = \prod_{t=0}^{T-1} p_t(i_{t+1}|i_t) \quad (\text{I.1})$$

となる。式 (9) 及び $v_{ii} = e^{-\theta \mu_t(i)}$ の表記を用いれば、式 (8) は以下のように書き直される。

$$p_t(j|i) = e^{-\theta c_{ij}} \frac{v_{t+1,j}}{v_{t,i}} \quad (\text{I.2})$$

式 (I.1), (I.2) を用いて、経路 r の選択確率を以下のように展開する。

$$\begin{aligned} P(r) &= \prod_{t=0}^{T-1} e^{-\theta c_{i_t i_{t+1}}} \frac{v_{t+1, i_{t+1}}}{v_{t, i_t}} \\ &= e^{-\theta c_{i_0 i_1}} \frac{v_{1, i_1}}{v_{0, i_0}} e^{-\theta c_{i_1 i_2}} \frac{v_{2, i_2}}{v_{1, i_1}} \dots e^{-\theta c_{i_{T-1} i_T}} \frac{v_{T, i_T}}{v_{T-1, i_{T-1}}} \\ &= \frac{v_{T, i_T}}{v_{0, i_0}} \sum_{t=0}^{T-1} e^{-\theta c_{i_t i_{t+1}}} \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

$\mu_t^{s_T}(i)$ は最終状態 (目的地) までの期待最小コストであるから、その定義より、

$$\mu_0(i_0) = -\frac{1}{\theta} \log \sum_{r \in \mathcal{P}_{(0, i_0)}^{(T, i_T)}} e^{-\theta c_r} \quad (\text{I.4})$$

である。ここで、 $\mathcal{P}_{(0, i_0)}^{(T, i_T)}$ は初期状態 $s_0 = i_0$ 、最終状態 $s_T = i_T$ のときの実行可能経路集合 (時空間プリズム) である。最終的に、式 (I.3) は、

$$P(r) = \frac{e^{-\theta c_r}}{\sum_{r \in \mathcal{P}_{(0, i_0)}^{(T, i_T)}} e^{-\theta c_r}} \quad (\text{I.5})$$

となり、プリズム内の全経路を選択肢集合とする Logit 型経路選択確率と等価になる。

付録 II Bellman 方程式の求解条件

MCA では、式 (17) のスペクトル半径に関する不等式が Bellman 方程式求解の必要十分条件となる。ここで、ネットワーク条件とスペクトル半径の関係についてケーススタディを通じた分析を行う。

図-9 のサイクルを持つネットワークに対して、認知パラメータ θ を変化させたときの行列 $\mathbf{W}$ のスペクトル半径 $\rho(\mathbf{W})$ を計算した結果を表-6 に示す。なお、ネットワークにおけるリンク上の数字はリンクコスト c_{ij} を表している。結果として、 θ が小さい、つまりコストの小さなサイクルがネットワークに含まれる場合は期待最小コストが発散して式 (17) が満たされなかった。本ケースでは、 θ が 0.4 以下のとき、Bellman 方程式を解くことができなかった。

以上より、従前のマルコフ連鎖配分は計算可能性がネットワーク構造に依存し、特にネットワークにサイクルが含まれ、かつ認知パラメータが小さい場合、収束が不安定になることが確認された。

付録 III 確率的配分の実行方法

本研究で比較計算に用いた Dial 配分、MCA の解法及び計算実行方法について説明する。

図-9 サイクルを含むネットワーク 3

表-6 認知パラメータ θ とスペクトル半径 $\rho(\mathbf{W})$ の変化

θ	1	0.9	0.8	0.7	0.6
$\rho(\mathbf{W})$	0.45	0.51	0.59	0.68	0.78

θ	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
$\rho(\mathbf{W})$	0.91	1.05	1.23	1.44	1.70

Dial 配分では、起点 O から各ノードまで、各ノードから終点 D までの最短経路コストを知る必要がある¹⁾。本研究では最短経路探索の方法として Dijkstra 法（データ構造としてはヒープ）を採用した。

MCA において、期待最小費用の直接的な計算方法としてリンクコスト行列 $\mathbf{W}(|\mathcal{N}| \times |\mathcal{N}|)$ の逆行列計算を用いる方法がある。しかし逆行列計算はネットワーク規模が大きいつき計算負荷が大きく、また任意のノード間 $(|\mathcal{N}| \times |\mathcal{N}|)$ の期待最小費用の行列 $\mathbf{V}$ ($V_{ij} = \sum_{r \in \mathcal{R}_{ij}} e^{-\theta c_r^{ij}}$: $\mathcal{R}_{ij}$ はノード i, j 間の経路集合) が計算されるため、無駄な記憶容量を必要とする。実際にはリンク交通量 x_{ij}^{od} は、 $\mathbf{V}$ のうち起点ノードに対応する行および終点ノードに対応する列要素のみを用いて、以下のように求められる²¹⁾。

$$x_{ij}^{od} = Q_{od} p_{ij}^{od} = \frac{V_{oi} w_{ij} V_{jd}}{V_{od}} \quad (\text{III.1})$$

ここで、 p_{ij}^{od} は OD ペア od に対するリンク選択確率、 $\mathbf{w}(|\mathcal{N}| \times |\mathcal{N}|)$ はリンク (ij) が存在する場合には $w_{ij} = e^{-\theta c_{ij}}$ 、それ以外で 0 の要素を持つ行列である。 $\mathbf{V}_o(1 \times |\mathcal{N}|) = \{V_{oi}, \forall i \in \mathcal{N}\}$, $\mathbf{V}_d(|\mathcal{N}| \times 1) = \{V_{id}, \forall i \in \mathcal{N}\}$ は、それぞれ以下の連立方程式 (III.2)(III.3) の解として与えられる。

$$\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_o \mathbf{w} + \mathbf{b}_o \quad (\text{III.2})$$

$$\mathbf{V}_d = \mathbf{w} \mathbf{V}_d + \mathbf{b}_d \quad (\text{III.3})$$

$\mathbf{b}_o(1 \times |\mathcal{N}|)$, $\mathbf{b}_d(|\mathcal{N}| \times 1)$ はそれぞれ、起点 o 、終点 d に対応する要素のみ 1、それ以外で 0 をとるベクトルである。

本研究ではすべての配分アルゴリズムにおいて、上述の形式の連立方程式を反復法によって求解した。具体的には連立方程式 $\mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{w} + \mathbf{b}$ に対して初期値 $\mathbf{V}^{(0)}$ を与え、次式を用いて解を更新する。

$$\mathbf{V}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{V}^{(k)} \mathbf{w} + \mathbf{b} \quad (\text{III.4})$$

そして、 $\mathbf{V}^{(k)}$ が収束条件 $|\mathbf{V}^{(k+1)} - \mathbf{V}^{(k)}| < \gamma$ を満たすまで解の更新を繰り返す。収束判定値は $\gamma = 1e-30$ とした。

参考文献

- 1) Dial, R. B.: A probabilistic multipath traffic assignment algorithm which obviates path enumeration, *Transportation Research*, Vol.5, No.2, pp.83-111, 1971.
- 2) Van Vliet, D.: Selected node-pair analysis in Dial's assignment algorithm, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.15, No.1, pp.65-68, 1981.
- 3) Leurent, F. M.: Curbing the computational difficulty of the logit equilibrium assignment model, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.31, No.4, pp.315-326, 1997.
- 4) 佐佐木綱: 吸収マルコフ過程による交通量配分理論, 土木学会論文集, No.121, pp.28-32, 1965.
- 5) Bell, M. G. H.: Alternatives to Dial's logit assignment algorithm, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.29, No.4, pp.287-295, 1995.
- 6) Akamatsu, T.: Cyclic flows, Markov process and stochastic traffic assignment, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.30, No.5, pp.369-386, 1996.
- 7) Baillon, J. B. and Cominetti, R.: Markovian traffic equilibrium, *Mathematical Programming*, Vol.111, No.1-2, pp.33-56, 2008.
- 8) Fosgerau, M., Frejinger, E. and Karlstrom, A.: A link based network route choice model with unrestricted choice set, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.56, pp.70-80, 2013.
- 9) Huang, H.-J. and Bell, M. G.: A study on logit assignment which excludes all cyclic flows, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.32, No.6, pp.401-412, 1998.
- 10) Daganzo, C. F., Bouthelie, F. and Sheffi, Y.: Multinomial probit and qualitative choice: A computationally efficient algorithm, *Transportation Science*, Vol.11, No.4, pp.338-358, 1977.
- 11) Vovsha, P. and Bekhor, S.: Link-nested logit model of route choice: overcoming route overlapping problem, *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, No.1645, pp.133-142, 1998.
- 12) Bekhor, S. and Prashker, J.: Stochastic user equilibrium formulation for generalized nested logit model, *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, No.1752, pp.84-90, 2001.
- 13) Bierlaire, M.: The Network GEV, Swiss Transport Research Conference, 2002.
- 14) Daly, A. and Bierlaire, M.: A general and operational representation of Generalised Extreme Value models, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.40, No.4, pp.285-305, 2006.
- 15) Papola, A. and Marzano, V.: A network generalized extreme value model for route choice allowing implicit route enumeration, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, Vol.28, No.8, pp.560-580, 2013.
- 16) Mai, T., Fosgerau, M. and Frejinger, E.: A nested recursive logit model for route choice analysis, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.75, pp.100-112, 2015.
- 17) Mai, T.: A method of integrating correlation structures for a generalized recursive route choice model, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.93, pp.146-161, 2016.
- 18) 原祐輔, 赤松隆: Network-GEV 型経路選択モデルを用いた確率的利用者均衡配分, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.70, No.5, pp.1611-1620, 2014.

- 19) Hägerstrand, T.: What about people in regional science?, *Papers of the Regional Science Association*, Vol.24, No.1, pp.6-21, 1970.
- 20) Bellman, R.: *Dynamic Programming*, Princeton, 1957.
- 21) 松井寛: 交通ネットワークの均衡分析 –最新の理論と解法–, 土木学会, 1998.
- 22) 大山雄己, 羽藤英二: 時空間制約と経路相関を考慮した歩行者の活動配分問題, 都市計画論文集, Vol.51, No.3, 2016.
- 23) Akamatsu, T.: Decomposition of path choice entropy in general transport networks, *Transportation Science*, Vol.31, No.4, pp.349-362, 1997.
- 24) Fisk, C.: Some developments in equilibrium traffic assignment, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol.14, No.3, pp.243-255, 1980.
- 25) Transportation Network Test Problems, <http://www.bgu.ac.il/~bargera/tntp/>

(2016. 10. 11 受付)

STOCHASTIC ASSIGNMENT IN TIME-STRUCTURED NETWORKS

Yuki OYAMA and Eiji HATO

Markov chain assignment (MCA) has been gathering attention in recent years again because of its high operability. However, MCA remains following challenges; 1) unreasonable cyclic flow, 2) computational instability in case of network with low cost cycles and 3) amplification of IIA property of the logit model. This paper proposes an assignment algorithm in time-structured network (TSA). Incorporating the concepts of time-constraint and network structuring into the MCA model can restrict a path set and remove cyclic structures in networks. Numerical examples including its application to the stochastic user equilibrium showed that TSA algorithm solved the problem regarding the computational instability and also relaxed cyclic flows. Moreover, the result of its extension to the network-GEV model indicated that TSA can describe the cycle reluctance.