円筒形容器内の水の運動に関する実験と 3次元数値計算

入部 綱清¹・與儀 友樹²・仲座 栄三³・花城 有人⁴

¹正会員 琉球大学助教 工学部環境建設工学科 (〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町千原 1 番地)
E-mail:iribe@tec.u-ryukyu.ac.jp

²沖縄県庁 土木建築部 (〒900-8570 沖縄県那覇市泉崎 1 丁目 2-2)
E-mail:yuuki.yogi@gmail.com

³正会員 琉球大学教授 工学部環境建設工学科 (〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町千原 1 番地)
E-mail:enakaza@tec.u-ryukyu.ac.jp

⁴琉球大学大学院 理工学研究科 (〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町千原 1 番地)
E-mail:k138501@eve.u-ryukyu.ac.jp

近年、地震動による容器内の液体の振動により容器が損傷する被害が報告されている。このような条件下においては、容器内の液体の水面は大きく振動し、砕波を伴った3次元的な複雑な運動となるため、非線形性の強い水理現象を解くための3次元数値計算手法の開発が必要である。

本論文では円筒形容器内の水の振動を対象に、粒子法の3次元数値計算を用いて渦度の変動について検討し、渦度と水の運動パターンが特徴付けられることを実験結果との比較により明らかにしている。さらに、振動振動数と水深半径比の関係を検討し、運動パターンの遷移が水深半径比によって変化することを示している。

Key Words : *vortex strength, fluid motion pattern, three-dimensional numerical simulation*

1. 緒言

地震動や船体の揺れによって引き起こされる容器内の水の運動により、容器が損傷する被害が多く報告されている。そのため、この工学的に重要な問題に対し、実験、解析及び数値計算による研究が行われている。

円筒形容器を一方向に加振した際、液体の波が2次元的に面内で振動する面内運動と、波頭が3次元的に容器の壁面に沿って回転する回転運動（以下、スワーリング現象）が確認できる。これらは通常の振動下では、混在して起こっていることが多い。しかし、既往の研究では、面内運動の性質については多く報告されているが、回転運動については比較的少ない。

円筒形容器内の液体の運動に対する基礎的な研究には、Hutton¹⁾による実験や解析的な検討が挙げられ、スワーリング現象についての説明がされている。一方、数値計算による研究には、木村ら²⁾による有限要素法による非線形応答解析が挙げられ、スワーリング現象の説明とその発生について述べられている。しかし、実験と数値計算との比較において、定量的に十分な結果を得るには粘性

の影響を考慮することとしている。このことについては、非粘性条件で検討されている解析的な研究についても同様なことが言える。そのため、粘性の効果が考慮できかつ非線形性の強い水理現象を解くための3次元数値計算手法の開発が必要である。

筆者らは粒子法の一つであるMPS(Moving Particle Semi-implicit)法³⁾を用いて矩形容器や円筒形容器の数値計算を行ってきた。粒子法とは、連続体を粒子の集合体として定義し、粒子の運動を計算することで連続体の動きを再現する手法である。粒子間の接続情報は時々刻々と更新されるため砕波のような計算を行うことができる。そのため、スロッシング現象の様な非線形性が強い自由表面を含む水理現象を計算することができる有力な数値計算手法である。

本研究では円筒形容器内の水の運動パターンやその遷移を検討することを目的とし、筆者らによって高精度化されたMPS法⁴⁾による円筒形容器内の水の3次元数値計算を行い、水粒子の渦度の変動について考察を行う。さらに、渦度の変動に対応する運動パターンを定義し、実験結果との比較を行うことによって、本研究で用いた数

値計算の有用性を示す.

2. 実験及び数値計算の概要

本研究では、半径 6cm の円筒形容器内の水に対して振動台を用いて水の運動が定常になるまで水平一方向に加振する。写真-1 に実験装置を示す。

写真-1 実験装置（振動台及び円筒形容器）

表-1 に実験及び数値計算の条件として、水深、理論的に求まる一次固有振動数、振動台に与えた振動数を示す。実験では、一方向の面内振動から混在運動へ、そして混在運動から回転運動への遷移現象を調べるために、与える振動数を一次の固有振動数からその±10%ずつ変化させた。運動の遷移が確認できた場合、その遷移振動数を中心としてさらに細かく振動数を変化させて実験を行った。写真-2 に面内運動、混在運動及び回転運動が確認できた実験結果の例を示す。

こうした目視による確認実験に対し、後述する粒子法を用いた3次元数値計算を行い、面内・混在・回転の3パターン運動の判定に渦度を用いて定量的な評価を行った。数値計算では渦度を計算する際の座標軸の設定として、加振方向に x 軸、高さ方向に y 軸、奥行き方向に z 軸を設定した。

(a)面内運動

(b)混在運動

(c)回転運動

写真-2 円筒形容器内の水の運動

3. 3次元数値計算

MPS 法は 1996 年に越塚^{3,5)}によって提案されて以来、非圧縮性流れを解く有力な数値計算手法の一つとして多くの分野で活用されてきている。MPS 法は、有限要素法や差分計算法のように要素や格子に基づいた計算手法でないため、自由境界の大変形を比較的容易に表現することが可能である。

MPS法における非圧縮性流れの支配方程式は、連続の

表-1 実験および数値計算の諸元

水深 h (cm)		12.0	9.0	6.0	3.6	3.0	1.8
固有振動数 f_0 (Hz)		2.550	2.533	2.433	2.183	2.067	1.683
振動台の振動数 f (Hz) (ケース数)	実験	2.033～ 3.400 (18case)	2.017～ 3.367 (15case)	1.950～ 3.250 (17case)	1.750～ 2.916 (17case)	1.650～ 2.750 (19case)	1.350～ 2.250 (17cases)
	数値計算	2.270～ 3.130 (5case)	2.270～ 3.130 (5case)	2.220～ 3.030 (5case)	2.130～ 2.860 (5case)	2.040～ 2.700 (5case)	1.790～ 2.270 (5cases)

式とNavier-Stokes式である。オリジナルのMPS法についての説明は参考文献3)に譲り、以下に本研究で用いたMPS法⁴⁾の離散化手法、計算アルゴリズム、計算安定化手法について簡潔に説明を行う。

(1) 離散化

MPS法では、連続の式とNavier-Stokes式に含まれる微分演算、すなわち勾配とラプラシアンが、以下のように行われることを特徴としている。粒子番号 i に係わる勾配とラプラシアンは、それぞれ次式で計算される。

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{\phi_j - \phi_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \right] \quad (1)$$

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2d}{Cn^0} \sum_{j \neq i} \left[(\phi_j - \phi_i) w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \right] \quad (2)$$

ここで、 j は近傍粒子を示し、 ϕ は物理量、 $\vec{r}$ は位置ベクトル、 d は次元数、 w は重み関数、 n^0 は初期粒子数密度である。また、 $\langle \rangle$ は粒子間相互作用モデルであることを表すために用いる記号とする。

本研究では、式(1)の勾配モデルに対する高精度化手法の導入として次式⁹⁾を用いる。

$$\nabla \phi = \left[\frac{1}{n^0} \sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \otimes \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \right]^{-1} \left(\frac{1}{n^0} \sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \frac{\phi_j - \phi_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \right) \quad (3)$$

重み関数 w は粒子間距離 r を用いて次式で表される。

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e - r}{r_e} & r \leq r_e \\ 0 & r_e < r \end{cases} \quad (4)$$

r_e は粒子間相互作用の及ぶ範囲の半径である。MPS法では、互いに接する2粒子間の距離を初期粒子間距離と定義し、 r_e は初期粒子間距離の正の実数倍である。また、粒子数密度 n_i は重み関数 w を用いて次式で定義される。

$$\langle n \rangle_i = \sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \quad (5)$$

式(5)は粒子 i とその近傍粒子 j との重み関数の和を表している。式(1)、(2)及び(3)に含まれる初期粒子数密度 n^0 は、一辺を初期粒子間距離とする正方格子状の粒子配置で計算される粒子数密度である。また、式(2)に含まれる C は解析定数であり次式で与えられる。

(2) 計算アルゴリズム

MPS法では非圧縮性流れに半陰解法アルゴリズムを適用している⁹⁾。以下にその手順を示す。

まず、Navier-Stokes式である式(7)から圧力項を除いた式(7)の計算を陽解法で行う。

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{F} \quad (7)$$

$$\vec{u}_i^* = \vec{u}_i^k + \nu \nabla^2 \vec{u}_i^k \Delta t + \vec{F} \Delta t \quad (8)$$

ここで $\vec{u}$ は流速ベクトル、 p は圧力、 $\vec{F}$ は外力ベクトル、 ν は動粘性係数、 ρ は流体の密度、 ∇ は勾配、 ∇^2 はラプラシアン、 Δt は時間増分、 k は時刻である。

式(8)より仮の速度 $\vec{u}_i^*$ を求めて式(9)より仮の粒子位置 $\vec{r}_i^*$ を求める。

$$\vec{r}_i^* = \vec{r}_i^k + \vec{u}_i^* \Delta t \quad (9)$$

仮の粒子位置 $\vec{r}_i^*$ で粒子数密度 n^* を求めると密度一定条件を満たしていないため、初期粒子数密度 n^0 とは一致していない。そこで、仮の位置で求められた粒子数密度 n^* と初期粒子数密度 n^0 の差より圧力を解く。圧力 p は陰解法によって計算される。本研究では田中ら⁷⁾により提案された次式を用いて圧力を計算する。

$$\nabla^2 p_i^{k+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \vec{u}_i^* - \gamma \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n_i^{k+1} - n^0}{n^0} \quad (10)$$

ここで、 γ は緩和係数であり時間増分 Δt に応じて適切な値を用いる必要がある。本研究では $\gamma = 0.02$ として計算を行った。

式(10)より圧力を求め、式(11)に代入し修正速度 $\vec{u}_i'$ を求める。

$$\vec{u}_i' = -\frac{1}{\rho} \nabla p_i^{k+1} \Delta t \quad (11)$$

式(11)より求めた修正速度を仮の速度に加えて次ステップの速度を求める。最後に修正速度 $\vec{u}_i'$ より修正される変位 $\vec{u}_i' \Delta t$ を仮の粒子位置 $\vec{r}_i^*$ に加え、式(12)より次のタイムステップの位置 $\vec{r}_i^{k+1}$ を求めて1タイムステップの計算が終了する。

$$\vec{r}_i^{k+1} = \vec{r}_i^* + \vec{u}_i' \Delta t \quad (12)$$

(3) 高精度化および安定化手法の導入

a) 圧縮性の導入³⁾

本手法は、非圧縮性流れを計算対象としていても、計算の安定性の観点から圧縮性を積極的に計算に取入れるという工夫である。式(10)の圧力ポアソン方程式は圧縮性を導入すると次式のように与えられる。

$$\nabla^2 p_i^{k+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \vec{u}_i^* - \gamma \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n_i^{k-1} - n^0}{n^0} + \frac{\rho}{\Delta t^2} \alpha p_i^{k+1} \quad (13)$$

ここで α は圧縮率である。圧縮率を大きくすると圧力ポアソン方程式の係数行列の対角成分が大きくなり、結果として数値安定性の向上に寄与する。

b) 圧力勾配の安定化³⁾

式(1),(3)による勾配モデルを圧力勾配項の計算に単純に適用すると、数値的に安定しにくいという問題が発生する。その対策のために、対象とする粒子 i の周りの近傍粒子も含めた中から最小の圧力を求め、その最小圧力を以て粒子 i の圧力に置き換えた後、圧力勾配は次のように求められる。

$$\langle \nabla p \rangle_i = -\frac{\Delta t}{\rho n^0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{p_j - \hat{p}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \right] \quad (14)$$

ここに、 $\hat{p}_i$ は最小圧力に置き換えられた粒子 i の圧力を表す。このような対策により、全ての粒子間の力が斥力となり数値計算の安定性が向上する。

c) 自由表面粒子の衝突計算⁴⁾

圧力ポアソン方程式を計算する際に、ディリクレ境界条件として自由表面粒子に圧力値としてゼロを与える。そのため圧力値を精度よく計算するために自由表面粒子の抽出は重要である。本研究では、粒子数密度の閾値によって自由表面粒子を判定する方法を高精度化するため、自由表面粒子とその近傍粒子間で弾性衝突計算を行う方法を導入した。

4. 数値計算による渦度の変動と水の運動パターン

図-1 に、水深と容器半径の比が 0.6 において、定性的に水面の変動に違いが見られた 4 つの振動数に対する数値計算結果の渦度 (ω_x , ω_y , ω_z) の時間変化を示す。図中の渦度は全水粒子の渦度の平均値としている。

図-1(a)に振動数 2.13Hz の結果を示す。図より ω_x と ω_y はほとんど確認できず、 ω_z のみが卓越した運動パターンを示した。

図-1 3次元数値計算による渦度の時間変動と運動パターン ($h/d=0.6$)

図-2 容器内の水の運動パターンと振動数の関係

図-1(b)に振動数 2.27Hz の結果を示す。(a)と比較すると ω_z は約 4 倍になっている。また、計算が開始して約 1.8 秒後から ω_x と ω_y を確認できたが、 ω_z と比較すると値は小さく、周期は規則的ではなかった。

図-1(c)に振動数 2.63Hz の結果を示す。計算が開始して約 1 秒後に ω_x と ω_y が確認できたが徐々に減少し、約 4 秒後から再び増加し始めた。その後、 ω_x については ω_z と同等な値となり、周期についても同様な傾向となった。一方、 ω_y については徐々に渦度が増加し、その後は若干変動はしているが平均的には一定の値に収束した。

図-1(d)に振動数 2.86Hz の結果を示す。 ω_x と ω_y については、計算が開始して 1 秒後に変動が見られたが、(c)の様に発達せず、すぐに減少し収束し (a)と同様、 ω_z が卓越した運動パターンを示した。

このように数値計算結果から定性的に得られる水面波形と渦度の変動が特徴付けられることが示された。そこで本研究では実験との比較のため、渦度の変動に対応する運動パターンを以下のように定義する。

図-1(a)及び(d)は ω_z が卓越した運動であり、この場合を面内運動とする。図-1(b)は渦度の 3 成分 (ω_x , ω_y , ω_z) が共に有意に表れる場合であり、この場合を混在運動とする。図-1(c)は ω_y の値が増加した後、一定の値に収束する場合であり、このような場合を回転運動とする。本研究ではこのように運動パターンを定義し、以降はこの定義を基に実験と数値計算の比較を行う。

5. 実験と数値計算結果との比較

図-2に水深半径比と振動数の変化に対する容器内の水の運動パターンの遷移を示す。図中の破線は、線形理論より得られる固有振動数、実線は、面内運動から混在運動、混在運動から回転運動に遷移する境界振動数を表す。図より、実験及び数値計算ともに振動数を増加させると面内、混在、回転の順で運動パターンが遷移することが分かった。また、それぞれの境界である振動数の傾向も概ね一致していた。

運動パターンが遷移する振動数については、水深半径比が減少すると、面内から混在運動に遷移する境界振動数、混在運動から回転運動に遷移する境界振動数ともに、小さくなることが分かった。またこの場合、混在運動から回転運動に遷移する境界振動数の低下が大きいため、混在運動が誘起される振動数帯の幅が狭くなっていることも分かった。これについては、数値計算結果も実験値と同じ傾向を示した。

このように、実験と数値計算結果の傾向は概ね一致したが、回転運動の振動数帯より高い振動数の領域においては、実験では水面変動の小さい混在運動、数値計算では面内運動に遷移した。こうした実験と数値計算結果の違いについては、目視での確認の精度にもよるところも大きく、詳細な検討を今後の課題としたい。

6. 結語

本研究の主要な結論を以下に示す。

- ① 粒子法による 3 次元数値計算結果は、定性的に得られる水面波形と渦度の変動が特徴付けられることが示された。

- ② 数値計算によって得られた渦度から円筒形容器に対する一軸方向の振動下における水の運動パターンを定義した。
- ③ 数値計算から得られた渦度を用いた水の運動パターン（面内運動，混在運動，混在運動）の判定は，実験による判定結果と一致した。
- ④ 円筒形容器内の水の運動は，加える振動の振動数を固有振動数よりも低い振動数から高振動数に変化させると，面内運動，混在運動，回転運動の順に遷移した。また，水深半径比を小さくすると混在運動が起こる振動数帯幅が狭くなった。
- ⑤ 数値計算結果では，回転運動の振動数帯より高い振動数側で運動パターンが回転運動から面内運動へと遷移したが，実験結果では水面変動の小さい混在運動に遷移した。

本研究では，式(8)を水の動粘性係数を用いて計算した。今後はより高い粘性の流体に対して検討を行いたい。

謝辞：本研究の遂行に当たっては，琉球大学島嶼防災研究センタープロジェクト経費「社会科学及び自然科学の統合による自然災害の予測と分散機構の解明」（プロジ

ェクト代表：仲座栄三）の援助を受けている。ここに記し，感謝の意を表す。

参考文献

- 1) Hutton, R.E. : An investigation of resonant, nonlinear non-planar free surface oscillations of a fluid, NASA TN., D-1870, 1963.
- 2) 木村憲明，大橋弘隆：軸対象容器におけるスロッシングの非線形応答（第2報，数値計算及び実験との比較），日本機械学会論文集，44(386)，pp3446-3454, 1978.
- 3) 越塚誠一：粒子法，丸善，144p，2005.
- 4) 井島聖也，入部綱清，仲座栄三：MPS法における圧力ポアソン方程式のディリクレ境界条件判定の改善，土木学会論文集B2（海岸工学），Vol.68, No.1, pp.17-28, 2012.
- 5) Koshizuka, S. and Y. Oka. : Moving particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, Nuclear Science and Engineering, Vol. 123, pp. 421-434, 1996.
- 6) 入部綱清，仲座栄三：新たな勾配計算手法によるMPS法の精度向上に関する研究，土木学会論文集B2（海岸工学），Vol.67, No.1, pp.36-48, 2011.
- 7) 田中正幸，益永孝幸：疑似圧縮性効果によるMPS法の安定化と圧力の平滑化，Transactions of JSCEs, 20080025, 2008.

EXPERIMENTAL STUDY AND THREE-DIMENSIONAL NUMERICAL SIMULATION ON MOTION OF WATER IN A CYLINDRICAL TANK

Tsunakiyo IRIBE, Yuuki YOGI, Eizo NAKAZA and Yuuto HANASIRO

Recently, when earthquake occurs, damage to container due to fluid motion in the container has been discovered and reported. Under this type of condition fluid surface in the container oscillates greatly and the motion of fluid becomes a three-dimensional complex flow with a breaking wave. Therefore, the necessity to develop a three-dimensional numerical simulation method for solving nonlinear hydraulics phenomena is very important. This paper shows the changes of vortex strength using a three-dimensional particle method subject to the oscillation fluid in a cylindrical container, and comparing with the experimental results the relation between vortex strength and fluid motion pattern is discovered and characterized. In addition, this study shows the transaction of motion pattern depending on depth radius ratio through to the relation between vibration frequency and depth radius ratio.