一軸引張を受けるCFRP板接着鋼板 に生じる応力の高精度解法

石川 敏之¹・宮下 剛²・László Gergely VIGH³

¹正会員 京都大学助教 工学研究科都市社会工学専攻 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)

E-mail: ishikawa.toshiyuki.2e@kyoto-u.ac.jp

²正会員 長岡技術科学大学准教授 環境・建設系

(〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町1603-1)

E-mail: mtakeshi@vos.nagaokaut.ac.jp

³Budapest University of Technology and Economics, Associate Professor, Department of Structural Engineering

(3-9, Muegyetem rkp, Budapest, 1111, Hungary)

E-mail: geri@vbt.bme.hu

本研究では、一軸引張を受けるCFRP板接着鋼板に対して導出される6階の微分方程式の解(高精度解)と、これまでに導出されている2階と4階の微分方程式に分けて解かれた解(近似解)との比較を行った。鋼板の軸力、接着剤に生じるせん断応力および垂直応力の全体的な傾向は高精度解と近似解で同様であったが、近似解のCFRP板の端に生じるせん断応力と垂直応力は、高精度解よりも若干大きな値を示し、接着剤層が薄くなるに従って、高精度解に対する近似解の比は大きくなった。最後に、一軸引張を受ける多層CFRP板接着鋼板に関して、ひずみの連立微分方程式を与え、数値解析による簡易な高精度解法を与えた。

Key Words : CFRP plate, differential equation, high-precision solution, eigen value analysis

1. はじめに

現在、炭素繊維強化樹脂成形板(CFRP板)を接着することによる実鋼構造物の補修・補強事例がいくつか報告されている^{1)~5)}。CFRP板は従来の建設材料である鋼やコンクリートと比べて軽量であり、死荷重の増加がほとんどなく、ヤング率が鋼板と同等以上である。さらに、接着するだけで補修・補強できるので、ボルト孔を設けるなどの、鋼部材に特別な加工を施す必要がない。

しかし、CFRP板接着による鋼構造物の補修・補強では、CFRP板の接着端近傍において、断面力が十分に伝達されない現象が生じるため、端部近傍の鋼部材とCFRP板に生じる応力が、鋼部材とCFRP板からなる合成断面の理論値に達しないことが知られている。さらに、CFRP板の端部近傍の接着剤に高いせん断応力や垂直応力が生じるため、作用荷重によっては、CFRP板が鋼部材からはく離する恐れがある。したがって、CFRP板接着を実構造物へ適用する際に、CFRP板接着鋼部材の載荷試験やFEM解析が行われ、CFRP板の必要長さやCFRP板のはく離に対する評価が行われている^{1)~4), 5)}。さらに、CFRP板の接着補修・補強の設計式に利用できると考え

られる、理論解析も行われている^{1), 4), 6)~9)}。

これまでに、図-1に示すような、一軸引張を受けるCFRP板接着鋼板に対して、接着剤層による軸力の伝達を考慮した鋼板およびCFRP板に生じる応力、ならびに接着剤に生じるせん断応力と垂直応力が理論的に導出されている^{10)~13)}。これらの理論では、接着剤に生じるせん断応力の導出に関連する2階の微分方程式を与え、それを解いて鋼板とCFRP板に生じる応力と接着剤に生じるせん断応力を与えている。さらに、接着剤に生じる垂直応力の導出に関連する4階の微分方程式を与え、2階の微分方程式の解を代入して解いて、接着剤に生じる垂直応力が導出されている。しかし、一軸引張を受けるCFRP板接着鋼板の微小区間の力のつり合いから、実際には6階の微分方程式が導出される。つまりこれまでの解法は、6階の微分方程式を、2階と4階の方程式に分けて近似的

図-1 一軸引張を受けるCFRP板接着鋼板

図-2 CFRP板接着鋼板の側面と断面

に解かれた近似解となっている．これまでに，近似解に対してFEM解析との比較が行われ，工学的に利用可能であることが明らかにされている¹²⁾．しかし，鋼板およびCFRP板の厚さや接着剤の厚さの変化に対して，近似解の値と6階の微分方程式の解との差に関する検討は行われていない．さらに，近似解は，CFRP板が多層の場合には利用できない．

そこで，本研究では，初めに図-1に示すような一軸引張を受けるCFRP板接着鋼板に対して，CFRP板のせん断力に関する6階の微分方程式を導出し，その解(以後，高精度解と呼ぶ)を与える．そして，鋼板厚さ，CFRP板厚さおよび接着剤厚さが，高精度解と近似解との差を与える影響を明らかにする．さらに，一軸引張を受けるCFRP板接着鋼板に対して，高精度解と同じ構成の微分方程式を1次の連立微分方程式で与え，固有値計算によるCFRP板接着鋼板に生じる応力の高精度解の簡易な数値解析法を与える．この解析法を用いると，一軸引張を受ける多層CFRP板接着鋼板に生じる応力が算出できる．

2. 微分方程式とその解

(1) 微分方程式の導出

図-2に示されるような上下面に対称にCFRP板が接着された鋼板について，鋼板厚中央より上側に対して，微小区間に働く断面力を図-3に示す．鋼板には軸力 $N_s(x)$ ，CFRP板には軸力 $N_f(x)$ ，せん断力 $V_f(x)$ および曲げモーメント $M_f(x)$ が作用すると仮定している．鋼板の上面のCFRP板に生じる $V_f(x)$ ， $M_f(x)$ は，鋼板の下面のCFRP板に生じる $V_f(x)$ ， $M_f(x)$ とつりあっている．また，接着剤のヤング率が鋼と比べて非常に小さいことと，接着厚さが非常に薄いため，接着剤は軸力を分担せず，せん断応力 $\tau(x)$ と垂直応力 $\sigma_y(x)$ のみが作用すると仮定している．

部材全体の水平方向の力のつりあいから次式を得る．

$$N_s(x) + 2N_f(x) = P \quad (1)$$

図-3 微小区間の断面力のつり合い

ここに，

$N_s(x)$: 鋼板に生じる軸力，

$N_f(x)$: CFRP板に生じる軸力，

P : 鋼板に作用する軸力，

x : CFRP板接着の中央からの距離(図-2(a))．

鋼板の微小区間の水平方向の力のつりあいから次式を得る．

$$\frac{dN_s(x)}{dx} = 2b_f\tau(x) \quad (2)$$

ここに，

$\tau(x)$: 接着剤に生じるせん断応力，

b_f : CFRP板の幅(接着幅を兼ねるため，鋼板の幅 b_s より小さな値とする)．

CFRP板の微小区間の水平方向の力のつりあい，鉛直方向の力のつりあいおよび曲げモーメントのつりあいより，それぞれ次式を得る．

$$\frac{dN_f(x)}{dx} = -b_f\tau(x) \quad (3)$$

$$\frac{dV_f(x)}{dx} = -b_f\sigma_y(x) \quad (4)$$

$$\frac{dM_f(x)}{dx} = V_f(x) - \frac{b_f t_f}{2} \tau(x) = V_f(x) - \frac{t_f}{4} \cdot \frac{dN_s(x)}{dx} \quad (5)$$

ここに，

$V_f(x)$: CFRP 板に生じるせん断力,
 $M_f(x)$: CFRP 板に生じる曲げモーメント,
 $\sigma_y(x)$: 接着剤に生じる垂直応力,
 t_f : CFRP 板の厚さ.

接着剤に生じるせん断応力 $\tau(x)$ と鋼板および CFRP 板下面の水平方向の変位との関係を次式で与える.

$$\tau(x) = G_e \frac{u_s(x) - u_f(x)}{h} \quad (6)$$

ここに,

G_e : 接着剤のせん断弾性係数,
 h : 接着剤の厚さ,
 $u_s(x)$: 鋼板の水平方向の変位,
 $u_f(x)$: CFRP 板下面の水平方向の変位.
 $u_s(x)$, $u_f(x)$ と $N_s(x)$, $N_f(x)$ および $M_f(x)$ の関係はそれぞれ次式になる.

$$\frac{du_s(x)}{dx} = \frac{N_s(x)}{E_s A_s} \quad (7)$$

$$\frac{du_f(x)}{dx} = \frac{N_f(x)}{E_f A_f} + \frac{M_f(x)}{E_f I_f} \cdot \frac{t_f}{2} \quad (8)$$

ここに,

E_s : 鋼板のヤング率,
 E_f : CFRP 板のヤング率,
 A_s : 鋼板の断面積,
 A_f : CFRP 板の断面積,
 I_f : CFRP 板の断面 2 次モーメント.

式(6)を x で微分し整理して, 式(7), (8)を代入して次式を得る.

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = \frac{G_e}{h} \left\{ \frac{N_s(x)}{E_s A_s} - \left(\frac{N_f(x)}{E_f A_f} + \frac{M_f(x)}{E_f I_f} \cdot \frac{t_f}{2} \right) \right\} \quad (9)$$

式(9)へ式(1)と(2)を代入して, 鋼板の軸力 N_s に関する以下の 2 階微分方程式が導出される.

$$\frac{d^2 N_s(x)}{dx^2} - c^2 N_s(x) = -c^2 \xi_0 \left\{ \frac{t_f}{r_f^2} M_f(x) + P \right\} \quad (10)$$

ここに,

$$c = \sqrt{\frac{b_f G_e}{h} \cdot \frac{2}{1 - \xi_0} \cdot \frac{1}{E_s A_s}} \quad (11)$$

$$\xi_0 = \frac{1}{1 + 2 E_f A_f / (E_s A_s)} \quad (12)$$

$$r_f = \sqrt{\frac{I_f}{A_f}} \quad (13)$$

c は, 鋼板から CFRP 板への軸力の伝達を支配するパラメータ(長さの逆数の次元)である. c の値が大きくなると CFRP 板に所定の軸力が伝達されるのに必要な

CFRP 板の接着長さが短くなる. ξ_0 は, 鋼板の伸び剛性 $E_s A_s$ に対する, CFRP 板の伸び剛性 $E_f A_f$ の比で与えられる鋼板の応力低減を支配する無次元パラメータである. 接着する CFRP 板の伸び剛性を大きくすると, ξ_0 が小さくなるので, CFRP 板接着により鋼板の応力がより低減されることになる. r_f は CFRP 板の断面 2 次半径である.

次に, 接着剤に生じる垂直応力 $\sigma_y(x)$ と鋼板および CFRP 板の鉛直方向の変位との関係を次式で与える.

$$\sigma_y(x) = E_e \frac{v_s(x) - v_f(x)}{h} \quad (14)$$

ここに,

E_e : 接着剤のヤング率,
 $v_s(x)$: 鋼板の鉛直方向の変位,
 $v_f(x)$: CFRP 板の鉛直方向の変位.

CFRP 板の鉛直変位 $v_f(x)$ と曲げモーメント $M_f(x)$ の関係は次式で与えられる.

$$\frac{d^2 v_f(x)}{dx^2} = -\frac{M_f(x)}{E_f I_f} \quad (15)$$

鋼板の図心に軸力が作用し, かつ鋼板の上下面に CFRP 板が接着されているので, 鋼板には曲げモーメントが生じない. したがって $v_s = 0$ として, 式(14)を x で 2 階微分し, 式(15)を代入して次式を得る.

$$\frac{d^2 \sigma_y(x)}{dx^2} = \frac{E_e}{h} \cdot \frac{M_f(x)}{E_f I_f} \quad (16)$$

さらに, 式(16)を x で微分し, 式(4), (5)を代入して, 次式が導出される.

$$\frac{d^4 V_f(x)}{dx^4} + 4\omega^4 V_f(x) = \omega^4 t_f \frac{dN_s(x)}{dx} \quad (17)$$

ここに, ω は次式で与えられる.

$$\omega = \sqrt[4]{\frac{b_f E_e}{4h} \cdot \frac{1}{E_f I_f}} \quad (18)$$

ω は, CFRP 板の端部近傍に生じる曲げモーメントの大きさを支配するパラメータ(長さの逆数の次元)である. ω の値が大きくなると CFRP 板の端部近傍に生じる曲げモーメントの値が大きくなる.

式(17)を x で微分し, 式(10)を代入すると次式になる.

$$\begin{aligned} \frac{d^5 V_f(x)}{dx^5} + 4\omega^4 \frac{dV_f(x)}{dx} \\ = \omega^4 t_f \left\{ c^2 N_s(x) - c^2 \xi_0 \frac{12}{t_f} M_f(x) - c^2 \xi_0 P \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

この式をさらに x で微分し, 式(17)を代入して次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{d^6 V_f(x)}{dx^6} - c^2 \frac{d^4 V_f(x)}{dx^4} + 4\omega^4 \frac{d^2 V_f(x)}{dx^2} \\ - 4c^2 \omega^4 V_f(x) = -c^2 \omega^4 \xi_0^2 \left(\frac{t_f}{r_f} \right)^2 \frac{dM_f(x)}{dx} \end{aligned} \quad (20)$$

$dM_f(x)/dx$ は、式(4)と(16)から、 $\sigma_y(x)$ を消去して次式で与えられる。

$$\frac{dM_f(x)}{dx} = -\frac{1}{4\omega^4} \cdot \frac{d^4 V_f(x)}{dx^4} \quad (21)$$

この式を式(20)へ代入し整理て、CFRP 板のせん断力 $V_f(x)$ について、次の6階微分方程式が導出される。

$$\begin{aligned} \frac{d^6 V_f(x)}{dx^6} - c^2 \left\{ 1 + \frac{\xi_0}{4} \left(\frac{t_f}{r_f} \right)^2 \right\} \frac{d^4 V_f(x)}{dx^4} \\ + 4\omega^4 \frac{d^2 V_f(x)}{dx^2} - 4c^2 \omega^4 V_f(x) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

(2) 6階の微分方程式の解(高精度解)

式(22)に対して、CFRP 板の中央($x=0$)の y 軸について対称の場合、 $V_f(x)$ に関する一般解が次式で与えられる。

$$\begin{aligned} V_f(x) = B_1 \sinh(\alpha x) \\ + B_2 \sinh(\beta x) \cos(\gamma x) + B_3 \cosh(\beta x) \sin(\gamma x) \end{aligned} \quad (23)$$

ここに、

$$\alpha = \sqrt[3]{X_8} + \sqrt[3]{X_9} - \frac{1}{3} X_1 \quad (24)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{X_6 + \sqrt{X_6^2 + X_7^2}}{2}} \quad (25)$$

$$\gamma = \frac{X_7}{2\beta} \quad (26)$$

$$X_1 = -\left\{ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{t_f}{r_f} \right)^2 \xi_0^2 \right\} c^2 \quad (27)$$

$$X_2 = 4\omega^4 \quad (28)$$

$$X_3 = -4c^2 \omega^4 \quad (29)$$

$$X_4 = \frac{X_2}{3} - \frac{X_1^2}{9} \quad (30)$$

$$X_5 = \frac{X_3}{2} + \frac{X_1^3}{27} - \frac{X_1 X_2}{6} \quad (31)$$

$$X_6 = -\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{X_8} + \sqrt[3]{X_9} \right) - \frac{1}{3} X_1 \quad (32)$$

$$X_7 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{X_8} - \sqrt[3]{X_9} \right) \quad (33)$$

$$X_8 = -X_5 + \sqrt{X_5^2 + X_4^3} \quad (34)$$

$$X_9 = -X_5 - \sqrt{X_5^2 + X_4^3} \quad (35)$$

B_1 , B_2 および B_3 は未定係数である。

式(5)より、鋼板に生じる軸力 $N_s(x)$ は、 $V_f(x)$ を次式に代入して与えられる。

$$N_s(x) = \frac{4}{t_f} \left\{ \int V_f(x) dx - M_f(x) \right\} + B_0 \quad (36)$$

ただし、式(36)の右辺の B_0 は、 $\int V_f(x) dx$ の積分定数であり、CFRP 板の半長さ l が非常に長い場合に $N_s(0)$ が $\xi_0 P$ に収束するため、 $B_0 = \xi_0 P$ になる。

接着剤に生じるせん断応力 $\tau(x)$ は、 $N_s(x)$ を式(2)に代入して与えられ、接着剤に生じる垂直応力 $\sigma_y(x)$ は、 $V_f(x)$ を式(4)に代入して与えられる。

CFRP 板の接着端で $N_s(l) = P$, $V_f(l) = 0$ および $M_f(l) = 0$ となる境界条件を与えて、未定係数 B_1 , B_2 および B_3 がそれぞれ次式になる。

$$B_1 = \frac{t_f}{4Z_7} (1 - \xi_0) P \quad (37)$$

$$B_2 = Z_6 B_1 \quad (38)$$

$$B_3 = -Z_5 B_1 \quad (39)$$

ここに、

$$Z_0 = \frac{h}{b_f E_e} E_f I_f \quad (40)$$

$$\begin{aligned} Z_1 = \beta(\beta^2 - 3\gamma^2) \text{CH}(\beta l) \text{C}(\gamma l) \\ - \gamma(3\beta^2 - \gamma^2) \text{SH}(\beta l) \text{S}(\gamma l) \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} Z_2 = \beta(\beta^2 - 3\gamma^2) \text{SH}(\beta l) \text{S}(\gamma l) \\ + \gamma(3\beta^2 - \gamma^2) \text{CH}(\beta l) \text{C}(\gamma l) \end{aligned} \quad (42)$$

$$Z_3 = \frac{\beta \text{CH}(\beta l) \text{C}(\gamma l) + \gamma \text{SH}(\beta l) \text{S}(\gamma l)}{\beta^2 + \gamma^2} \quad (43)$$

$$Z_4 = \frac{\beta \text{SH}(\beta l) \text{S}(\gamma l) - \gamma \text{CH}(\beta l) \text{C}(\gamma l)}{\beta^2 + \gamma^2} \quad (44)$$

$$Z_5 = \frac{Z_1 \text{SH}(\alpha l) - \alpha^3 \text{CH}(\alpha l) \text{SH}(\beta l) \text{C}(\gamma l)}{Z_1 \text{CH}(\beta l) \text{S}(\gamma l) - Z_2 \text{SH}(\beta l) \text{C}(\gamma l)} \quad (45)$$

$$Z_6 = \frac{Z_2 \text{SH}(\alpha l) - \alpha^3 \text{CH}(\alpha l) \text{CH}(\beta l) \text{S}(\gamma l)}{Z_1 \text{CH}(\beta l) \text{S}(\gamma l) - Z_2 \text{SH}(\beta l) \text{C}(\gamma l)} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} Z_7 = \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha^3 Z_0 \right) \text{CH}(\alpha l) \\ + (Z_0 Z_1 + Z_3) Z_6 - (Z_0 Z_2 + Z_4) Z_5 \end{aligned} \quad (47)$$

$\text{C}(\cdot)$, $\text{S}(\cdot)$, $\text{CH}(\cdot)$ および $\text{SH}(\cdot)$ は、それぞれ $\cos(\cdot)$, $\sin(\cdot)$, $\cosh(\cdot)$ および $\sinh(\cdot)$ を示す。

(3) 近似解

これまでに、軸力を受ける CFRP 板接着鋼板に対して、CFRP 板に生じる曲げモーメントを無視、すなわち式(10)で $M_f(x) = 0$ として、軸力のつり合いのみに対する微分方程式を導出し、それを解いて鋼板および CFRP 板に生じる応力の分布ならびに接着剤に生じるせん断応力の分布が与えられている。図-2 を参照して、 y 軸に対称な条件および CFRP 板の接着端で $N_s(l) = P$ を与えて、鋼板に生じる軸力が次式で与えられる。

$$N_s(x) = \left\{ (1 - \xi_0) \frac{CH(cx)}{CH(cl)} + \xi_0 \right\} P \quad (48)$$

CFRP板に生じる軸力は、 $N_s(x)$ を式(1)へ代入して与えられ、接着剤に生じるせん断応力 $\tau(x)$ は、 $N_s(x)$ を式(2)に代入して与えられる。

一方、式(17)へ式(48)を代入して $V_f(x)$ に関する 4 階の微分方程式を導出し、 y 軸に対称な条件および CFRP 板の接着端で $V_f(l) = 0$ 、 $M_f(l) = 0$ を与えて次式の $V_f(x)$ に関する一般解が導出される。

$$V_f(x) = B_{11}CH(\omega x)S(\omega x) + B_{12}SH(\omega x)C(\omega x) + \frac{CH(cx)}{CH(cl)}Y_0 \quad (49)$$

ここに、

$$B_{11} = - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{c}{\omega} \right)^3 \frac{TH(\omega l)}{T(\omega l)} + \left\{ TH(\omega l) + \frac{1}{T(\omega l)} \right\} TH(cl) \right] \frac{Y_0}{Y_1} \quad (50)$$

$$B_{12} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{c}{\omega} \right)^3 + \left\{ TH(\omega l) - \frac{1}{T(\omega l)} \right\} TH(cl) \right] \frac{Y_0}{Y_1} \quad (51)$$

$$Y_0 = \frac{ct_f}{4 + (c/\omega)^4} (1 - \xi_0) P \quad (52)$$

表-1 計算例に用いる材料定数と寸法

(a) 鋼板	
板幅 b_s × 板厚 t_s [mm]	50 × 12
ヤング率 E_s [GPa]	200
(b) CFRP 板	
板幅 b_f × 板厚 t_f [mm]	50 × 6
ヤング係数 E_f [GPa]	150
接着半長さ l [mm]	100
(c) 接着剤	
厚さ h [mm]	0.5
ヤング率 E_e [GPa]	2.0
せん断弾性係数 G_e [GPa]	0.735

$$Y_1 = \frac{SH(\omega l)}{S(\omega l)} + \frac{C(\omega l)}{CH(\omega l)} \quad (53)$$

$T(\cdot)$ および $TH(\cdot)$ は、それぞれ $\tan(\cdot)$ および $\tanh(\cdot)$ を示す。

接着剤に生じる垂直応力 $\sigma_y(x)$ は、 $V_f(x)$ を式(4)に代入して与えられる。

ここで示した鋼板および CFRP 板の応力、接着剤に生じるせん断応力や垂直応力は、 $N_s(x)$ の導出の際、CFRP 板の曲げモーメントの成分を無視しているため、式(22)から得られる高精度解の近似解になっている。

3. CFRP板接着鋼板に生じる応力の分布に対する高精度解と近似解の比較

(1) 鋼板に生じる応力の分布

例として、表-1に示す鋼板、CFRP板および接着剤の材料定数および寸法に対して、高精度解と近似解から得られる鋼板に生じる応力の分布を図-4に示す。この例では、鋼板の幅とCFRP板の幅を同じとしているが、鋼板の幅がCFRP板の幅よりも著しく広い場合、鋼板の有効幅の概念を適用するなどの検討が必要である。鋼板の応力 $\sigma_s(x)$ は、鋼板の軸力 $N_s(x)$ を鋼板の断面積 A_s で除して与えた。図-4では、 $\sigma_s(x)$ を鋼板の作用応力 $\sigma_{sm} (= P/A_s)$ で除した値が示されている。さらに図には第6章で提案する数値解析結果もプロットしている。数値解析結果に対する考察は後の第6章で行う。この図からわかるように、鋼板の応力の高精度解と近似解は、CFRP板の端部近傍で若干異なっているが、全体としてほぼ同様な傾向を示している。

(2) 接着剤に生じるせん断応力の分布

表-1に示す鋼板、CFRP板および接着剤の材料定数お

図-4 鋼板に生じる応力の分布

よび寸法に対して、高精度解と近似解から得られる接着剤に生じるせん断応力の分布を図-5に示す。接着剤に生じるせん断応力は、鋼板の作用応力 σ_{sn} で除した値が示されている。

この図からわかるように、接着剤に生じるせん断応力の高精度解と近似解は、全体としてほぼ同様な傾向を示しているが、CFRP板の端部近傍で若干異なり、CFRP板の端では、近似解が高精度解よりも大きくなっている。

近似解では、鋼板に生じる軸力を算出する際に、CFRP板に生じる曲げモーメントを無視しているため、図-6に示すように鋼板の図心位置の変位とCFRP板の図心位置の変位 $u_f(x)$ の差 $(u_s(x) - u_f(x))$ によって接着剤にせん断応力が導入されると仮定されている。しかし、高精度解では、式(6)のせん断応力の算出からわかるように、鋼板とCFRP板下面の変位の差 $(u_s(x) - u_{\beta}(x))$ によって接着剤にせん断応力が導入されるため、CFRP板の端において、近似解で与えられるせん断応力が高精度解のそれよりも大きくなる。

(3) 接着剤に生じる垂直応力の分布

表-1に示す鋼板、CFRP板および接着剤の材料定数および寸法に対して、高精度解と近似解から得られる接着剤に生じる垂直応力の応力分布を図-7に示す。

この図からわかるように、接着剤に生じる垂直応力も高精度解と近似解は、全体としてほぼ同様な傾向を示しているが、CFRP板の端では近似解が高精度解よりも若干大きくなっている。後の第4章で示す接着剤に生じるせん断応力と垂直応力の式からわかるように、CFRP板の端の接着剤に生じる垂直応力はせん断応力の値に依存している。したがって、せん断応力の値が大きい近似解の垂直応力の方が、高精度解よりも大きくなっている。

4. CFRP板の必要接着長さに対する高精度解と近似解の比較

本章では、鋼板に生じる軸力、CFRP板の端の接着剤に生じるせん断応力や垂直応力を一定の値に収束させるのに必要なCFRP板の長さに関して、高精度解と近似解の比較を行う。

(1) 鋼板応力を一定の値に収束させるCFRP板の半長さ

CFRP板の接着の中央の鋼板の応力は、接着するCFRP板の半長さが長くなると、近似解、高精度解共に次式で与えられる合成断面に対する計算値に一致する。

$$\overline{\sigma_s(0)} = \xi_0 \sigma_{sn} \quad (54)$$

図-5 接着剤に生じるせん断応力の分布

図-6 CFRP板と鋼板の水平方向の変位の差

図-7 接着剤に生じる垂直応力の分布

例として、表-1に示す鋼板、CFRP板および接着剤の材料定数および寸法に対して、 $\overline{\sigma_s(0)}$ で無次元化された鋼板中央の応力 $\sigma_s(0)/\overline{\sigma_s(0)}$ とCFRP板の半長さ l との関係を図-8に示す。この図からわかるように、この例では、鋼板の応力が式(54)にほぼ一致するCFRP板の半長さ l は、高精度解、近似解共におよそ100mmである。したがって、CFRP板の接着の中央の鋼板の応力を式(54)の値まで低減させるCFRP板の半長さはこれまでに提案されている次式¹⁴⁾から設計できる。

$$l \geq \frac{1}{c} \cosh^{-1} \left(\frac{2}{\eta - 1} \cdot \frac{E_f A_f}{E_s A_s} \right) \quad (55)$$

ここで、 $\eta (>1)$ は $\sigma_s(0)/\overline{\sigma_s(0)}$ の値であり、1に近い値を式(55)に代入してCFRP板の半長さが設計できる。

他方、文献13)では、 $l \geq 5/c$ を提案している。ただし、この式で $l = 5/c$ の場合、 $\eta = 1 + 0.027 E_s A_s / (E_f A_f)$ となり、 $E_s A_s / (E_f A_f)$ の値によって η の値($\sigma_s(0)/\overline{\sigma_s(0)}$)が変動することになる。今回の例では、 $l = 5/c$ からCFRP板の半長さを設計すると93.5mmとなり、その際の η が1.01すなわちCFRP板の接着の中央の鋼板の軸力が $\overline{\sigma_s(0)}$ の1.01倍になる。

(2) 接着剤に生じるせん断応力を一定の値に収束させるCFRP板の半長さ

CFRP板の端の接着剤に生じるせん断応力は、接着するCFRP板の半長さが長くなると一定の値に収束する。高精度解に対して、CFRP板の端の接着剤に生じるせん断応力は次式に収束する。

$$\begin{aligned} \overline{\tau(l)} = & \left\{ \alpha^4 (3\beta^2 - \gamma^2) - 4\alpha^3 \beta (\beta^2 - \gamma^2) \right. \\ & \left. + (\beta^2 + \gamma^2)^3 \right\} \times \frac{2Z_0}{b_f t_f} \overline{B_1} \quad (56) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \overline{B_1} = & \frac{\alpha(\beta^2 + \gamma^2)}{\alpha^4 - 4\alpha\beta(\beta^2 - \gamma^2) + (\beta^2 + \gamma^2)(3\beta^2 - \gamma^2)} \quad (57) \\ & \times \frac{t_f}{4} (1 - \xi_0) P \end{aligned}$$

近似解に対して、CFRP板の端の接着剤に生じるせん断応力は次式に収束する。

$$\overline{\tau(l)} = \frac{c}{2b_f} (1 - \xi_0) P \quad (58)$$

例として、表-1に示す鋼板、CFRP板および接着剤の材料定数および寸法に対して、 $\overline{\tau(l)}$ で無次元化されたCFRP板の端の接着剤に生じるせん断応力 $\tau(l)/\overline{\tau(l)}$ とCFRP板の半長さ l との関係を図-9に示す。この図から、 $\tau(l)/\overline{\tau(l)}$ と l の関係も、高精度解と近似解でほぼ重なっていることがわかる。 $\tau(l)/\overline{\tau(l)}$ が1に収束するCFRP板の半長さ l は、 $\sigma_s(0)/\overline{\sigma_s(0)}$ が1に収束する値よりも小さい。したがって、CFRP板の半長さ l を式(55)で設計することにより、 $\tau(l)/\overline{\tau(l)}$ の値は、高精度解、近似解共に $1/\eta$ より1に近くなる。

(3) 接着剤に生じる垂直応力を一定の値に収束させるCFRP板の半長さ

CFRP板の端の接着剤に生じる垂直応力は、接着するCFRP板の半長さが長くなると一定の値に収束する。高

図-8 $\sigma_s(0)/\overline{\sigma_s(0)} - l$ 関係

図-9 $\tau(l)/\overline{\tau(l)} - l$ 関係

精度解に対して、CFRP板の端の接着剤に生じる垂直応力は次式に収束する。

$$\overline{\sigma_y(l)} = \left\{ \alpha^3 - \alpha(3\beta^2 - \gamma^2) + 2\beta(\beta^2 + \gamma^2) \right\} \frac{\overline{B_1}}{b_f} \quad (59)$$

近似解に対して、CFRP板の端の接着剤に生じる垂直応力は次式に収束する。

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_y(l)} = & \frac{c\omega}{4 + (c/\omega)^4} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\omega} \right)^3 - \frac{c}{\omega} + 2 \right\} \frac{t_f}{b_f} (1 - \xi_0) P \\ = & \frac{2\omega}{4 + (c/\omega)^4} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\omega} \right)^3 - \frac{c}{\omega} + 2 \right\} t_f \overline{\tau(l)} \quad (60) \end{aligned}$$

例として、表-1に示す鋼板、CFRP板および接着剤の材料定数および寸法に対して、 $\overline{\sigma_y(l)}$ で無次元化されたCFRP板の端の接着剤に生じる垂直応力 $\sigma_y(l)/\overline{\sigma_y(l)}$ とCFRP板の半長さ l との関係を図-10に示す。この図から、 $\sigma_y(l)/\overline{\sigma_y(l)}$ と l の関係も、高精度解と近似解でほぼ重なっていることがわかる。 $\sigma_y(l)/\overline{\sigma_y(l)}$ が1に収束するCFRP板の半長さ l は、 $\tau(l)/\overline{\tau(l)}$ が1に収束する値とほぼ同じであるので、CFRP板の半長さ l を式(55)で設計することにより、 $\sigma_y(l)/\overline{\sigma_y(l)}$ の値も、高精度解、近似解共に $1/\eta$ より1に近くなる。

5. CFRP板の端の接着剤に生じるせん断応力と垂直応力に対する高精度解と近似解の比較

CFRP板の中央の鋼板に生じる軸力は、接着するCFRP板の半長さ l が長くなると、高精度解も近似解も合成断面に対する計算値と一致するが、CFRP板の端の接着剤に生じるせん断応力と垂直応力は、高精度解と近似解でそれぞれ異なる値に収束する。そこで本章では、第4章で与えたCFRP板の端の接着剤に生じるせん断応力と垂直応力の収束値を用いて、鋼板、CFRP板および接着剤の厚さが高精度解と近似解の差に与える影響を明らかにする。

(1) 鋼板厚さの影響

CFRP板の端に生じるせん断応力と垂直応力に対して、高精度解に対する近似解の比と鋼板の厚さ t_s との関係を図-11に示す。この図では、 t_s 以外の材料定数として、表-1の値が用いられている。図-11からわかるように、高精度解に対する近似解の比は、垂直応力よりもせん断応力の方が常に大きい。さらに、鋼板の厚さ t_s が増加するにつれて、せん断応力、垂直応力共に高精度解に対する近似解の比が大きくなっているが、この計算条件に対する図-11に示す鋼板の厚さ t_s の範囲において、高精度解に対する近似解の比は、せん断応力、垂直応力共に1.1よりも小さい。

(2) CFRP板厚さの影響

CFRP板の端に生じるせん断応力と垂直応力に対して、高精度解に対する近似解の比とCFRP板の厚さ t_f との関係を図-12に示す。この図では、 t_f 以外の材料定数として、表-1の値が用いられている。

図-12からわかるように、高精度解に対する近似解の比と t_f との関係は、高精度解に対する近似解の比と鋼板の厚さ t_s との関係と同様に、CFRP板の厚さ t_f が増加するにつれて、せん断応力、垂直応力共に高精度解に対する近似解の比が大きくなっている。この例では、CFRP板の厚さ t_f が12mmを超えると、せん断応力の高精度解に対する近似解の比は、1.1以上になっている。

(3) 接着剤厚さの影響

CFRP板の端に生じるせん断応力と垂直応力に対して、高精度解に対する近似解の比と接着剤の厚さ h との関係を図-13に示す。この図では、 h 以外の材料定数として、表-1の値が用いられている。

図-13からわかるように、高精度解に対する近似解の比と h との関係は、接着剤の厚さ h が薄くなるにつれて、せん断応力、垂直応力共に高精度解に対する近似解の比

図-10 $\sigma_y(l)/\overline{\sigma_y(l)} - l$ 関係

図-11 鋼板厚さ t_s の影響

図-12 CFRP板厚さ t_f の影響

が大きくなっている。この例では、接着剤の厚さ h が0.4mmよりも小さくなると、せん断応力の高精度解に対する近似解の比は、1.1以上になっている。さらに、接着剤の厚さ h が0.2mmより小さくなると、垂直応力の高精度解に対する近似解の比も、1.1以上になる。図-13に示している接着剤の厚さ h が非常に薄い0.05mmの例では、せん断応力の高精度解に対する近似解の比は1.19、垂直応力の高精度解に対する近似解の比は1.15になる。

以上より、接着剤の厚さ h が薄くなるに従って、接着剤に生じるせん断応力と垂直応力の近似解の値は、高精

図-13 接着剤厚さ h の影響

度解と比べて大きくなる傾向にある。

6. 数値解析によるCFRP板接着鋼板に生じる応力 の高精度解法

文献15)では、一軸引張を受けるCFRP板接着鋼板の軸方向の直ひずみおよび接着剤のせん断ひずみに対して、ひずみの連立微分方程式を与え、それを固有値を用いた数値解析により解く方法が提案されている。本章では、文献15)の数値解析法に用いられている連立微分方程式へ、CFRP板のせん断力によるせん断ひずみ、CFRP板の曲げモーメントによる直ひずみおよび接着剤に生じる垂直ひずみを加えて、数値解析によりCFRP板接着鋼板に生じる鋼板、CFRP板の応力ならびに接着剤に生じるせん断応力を導出する方法を与える。

(1) 数値解析による解法

図-3に示すCFRP板が接着された鋼板の微小区間の水平方向、鉛直方向の力のつり合いおよび曲げモーメントのつり合いから、次式の行列・ベクトル形式で示したひずみに対する連立微分方程式が与えられる。

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}(x)}{dx} = A\boldsymbol{\varepsilon}(x) \quad (61)$$

行列 A および、ひずみベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ は付録(1)に示す。

CFRP 板を複数枚接着した場合、微分方程式が高階になり解の導出が困難になるが、この数値計算による解法では、鋼板、各 CFRP 板に生じる応力および各接着剤に生じるせん断応力と垂直応力が簡易に算出できる。

式(61)の一般解は、次式で与えられる^{15), 16)}。

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = Y(x)\mathbf{C} \quad (62)$$

ここに、

$$\mathbf{C}_{(6N+1) \times 1} = \{C_1 \quad \cdots \quad C_j\}^T \quad (63)$$

$$Y(x)_{(6N+1) \times (6N+1)} = T e^{A(x)} T^{-1} \quad (64)$$

$$e^{A(x)}_{(6N+1) \times (6N+1)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_{6N+1} x} \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$T_{(6N+1) \times (6N+1)} = [\mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_{6N+1}] \quad (66)$$

λ_j : 行列 A の j 番目の固有値,

$\mathbf{v}_j$: j 番目の固有値に対する固有ベクトル,

j : 1 から $6N+1$ までの整数,

N : CFRP板の積層枚数.

未定係数ベクトル $\mathbf{C}$ は、境界条件を与えて次式で与えられる。

$$\mathbf{C} = H^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (67)$$

ここに、

H : 係数行列.

作用軸力によるひずみベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ は付録(1)に示す。

係数行列 H は、式(62)のひずみ成分に対して、境界条件や部材軸方向に分割した際の各分割区間のひずみの連続条件を与えて得られる行列 $Y(x)$ の行ベクトル成分で構成される行列である。

本研究では、CFRP板の半長さ l に対して数値解析を行うため、CFRP板の端($x=l$)で、鋼板およびCFRP板に生じる軸ひずみ、CFRP板に生じるせん断ひずみおよび曲げモーメントによって生じる直ひずみ、CFRP板の接着の中央($x=0$)で接着剤に生じるせん断ひずみ、垂直ひずみの1階微分成分およびCFRP板に生じるせん断ひずみに境界条件を与えて、未定係数ベクトル $\mathbf{C}$ を算出した。

式(62)から得られるひずみベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ を次式に代入し、各部材に生じる応力が計算できる。

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = D\boldsymbol{\varepsilon}(x) \quad (68)$$

応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}(x)$ および弾性係数行列 D も付録に示している。

(2) 数値解析結果

CFRP板の積層数 N を1として、表-1に示す材料定数と寸法に対して、CFRP板接着鋼板に生じる応力、接着剤に生じるせん断応力および垂直応力の数値解析結果を図-4、5および7に示す。数値計算では、CFRP板のせん断力成分をせん断ひずみ成分で表すためのCFRP板のせん断弾性係数を5GPaとている。

数値解析の計算は複素数で実施するが、解としては物理的に意味がある実部を採用している。本解析では、数値解析結果の虚部が極微小な値であったので、数値計算誤差によって生じたと考える。図-4、5および7からわかるように、鋼板に生じる応力、接着剤に生じるせん断応

力および垂直応力に対して、数値解析解は、高精度解の上にプロットされている。したがって、本数値解析によって、CFRP板接着鋼板に生じる応力、接着剤に生じるせん断応力および垂直応力の高精度解を簡易に計算できることがわかる。この数値計算法では、CFRP板が複数積層された場合に対しても、各接着剤に生じるせん断応力と垂直応力が計算できる。

7. まとめ

本研究では、一軸引張を受けるCFRP板接着鋼板に対して、CFRP板のせん断力に関する6階の微分方程式を導出し、その解(高精度解)を与えた。そして、高精度解と、鋼板の軸力に関する2階の微分方程式とCFRP板のせん断力に関する4階の微分方程式を解いて与えられる解(近似解)との比較を行った。さらに数値解析による、一軸引張を受けるCFRP板接着鋼板に生じる応力の簡易な高精度解法を示した。本研究で得られた結果を以下に示す。

- 1) 鋼板に生じる軸力の分布、接着剤に生じるせん断応力および垂直応力の分布は、高精度解と近似解とで同様な傾向であった。
- 2) CFRP板の接着の中央の鋼板の軸力が、CFRP板と鋼板の合成断面から計算される鋼板の軸力に達するCFRP板の長さに関して、高精度解と近似解の違いは小さい。
- 3) CFRP板の端の接着剤に生じるせん断応力と垂直応力の近似解は、高精度解よりも若干大きくなった。鋼板の厚さ、CFRP板の厚さおよび接着剤の厚さに関わらず、高精度解に対する近似解の比は、垂直応力のそれよりも大きくなる。したがって、CFRP板の端の接着剤に生じるせん断応力と垂直応力を用いて、CFRP板のはく離の照査を行う場合、抵抗値を評価する際の接着剤に生じる応力の算出、および荷重の作用によって生じるそれらの値の算出において、高精度解と近似解を混在させないのが良い。
- 4) 一軸引張を受けるCFRP板接着鋼板に関して、1階のひずみの連立微分方程式を与え、数値解析による簡易な高精度解法を与えた。

謝辞：本研究の一部は、独立行政法人日本学術振興会の「組織的な若手研究者等海外派遣プログラム」による支援を得た。ここに記して謝意を示します。

付録

(1) 数値解析に用いる行列とベクトル

式(61)に用いる行列 A を次式に示す。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{F}_0^T & \mathbf{F}_b^T \\ \mathbf{F}_0 & B_{a1} & B_{b1} \\ \mathbf{F}_c & B_{c1} & B_1 \end{bmatrix} \quad (N=1)$$

$$A_{(6i+1) \times (6i+1)} = \begin{bmatrix} A_{(6i-5) \times (6i-5)} & \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0^T & \mathbf{F}_0^T \\ B_0 & B_{di} \\ B_0 & B_0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 & B_0 & B_0 \\ \mathbf{F}_0 & B_{ei} & B_0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{ai} & B_{bi} \\ B_{ci} & B_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (i=2 \sim N) \quad (A1)$$

ここに、

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (A2)$$

$$B_{ai} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{G_{fi} A_{fi} d_{fi}}{E_{fi} I_{fi}} & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (A3)$$

$$B_{bi} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{G_{ei} b_{fi}}{E_{fi} A_{fi}} & 0 \\ -\frac{E_{ei} b_{fi}}{G_{fi} A_{fi}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{G_{ei} b_{fi} d_{fi}^2}{E_{fi} I_{fi}} & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (A4)$$

$$B_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h_i} & 0 & -\frac{1}{h_i} \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_i d_{fi}} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (A5)$$

$$B_{di} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{G_{ei} b_{fi}}{E_{fi-1} A_{fi-1}} & 0 \\ \frac{E_{ei} b_{fi}}{G_{fi-1} A_{fi-1}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{G_{ei} b_{fi} d_{fi-1}^2}{E_{fi-1} I_{fi-1}} & 0 \end{bmatrix} \quad (i=2 \sim N) \quad (A6)$$

$$B_{ei} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h_i} & 0 & -\frac{1}{h_i} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h_i d_{fi-1}} \end{bmatrix} \quad (i = 2 \sim N) \quad (A7)$$

$$\mathbf{F}_b^T = \left\{ 0 \quad 2 \frac{G_{e1} b_{f1}}{E_s A_s} \quad 0 \right\} \quad (A8)$$

$$\mathbf{F}_c = \left\{ 0 \quad \frac{1}{h_1} \quad 0 \right\}^T \quad (A9)$$

B_0 は 3×3 の零行列, $\mathbf{F}_0$ は, 3×1 の零ベクトル, i は, CFRP 板あるいは接着剤の鋼板に近い側からの番号であり, $1 \sim N$ までの整数である. d_{fi} は, CFRP 板 i の図心から CFRP 板 i の上下面までの距離である. G_{fi} は CFRP 板 i のせん断弾性係数である.

ひずみベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$, 応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}(x)$, 作用軸ひずみベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ および弾性係数行列 D はそれぞれ次式で与えられる.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \left\{ \varepsilon_s(x) \quad \varepsilon_{fN1}(x) \quad \gamma_{f1}(x) \quad \varepsilon_{fM1}(x) \quad \varepsilon_{ye1}(x) \quad \gamma_{e1}(x) \quad \varepsilon_{ye1}'(x) \cdots \right\} \quad (A10)$$

$$\left\{ \varepsilon_{fNi}(x) \quad \gamma_{fi}(x) \quad \varepsilon_{fMi}(x) \quad \varepsilon_{yei}(x) \quad \gamma_{ei}(x) \quad \varepsilon_{yei}'(x) \cdots \right\}^T$$

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \left\{ \sigma_s(x) \quad \sigma_{fN1}(x) \quad \tau_{f1}(x) \quad \sigma_{fM1}(x) \quad \sigma_{ye1}(x) \quad \tau_{e1}(x) \quad \sigma_{ye1}'(x) \cdots \right\} \quad (A11)$$

$$\left\{ \sigma_{fNi}(x) \quad \tau_{fi}(x) \quad \sigma_{fMi}(x) \quad \sigma_{yei}(x) \quad \tau_{ei}(x) \quad \sigma_{yei}'(x) \cdots \right\}^T$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \left\{ P/(E_s A_s) \quad 0 \quad \cdots \right\}^T \quad (A12)$$

$$D_{(6N+1) \times (6N+1)} = \text{diag} \left\{ E_s \quad E_{f1} \quad G_{f1} \quad E_{f1} \quad E_{e1} \quad G_{e1} \quad E_{e1} \quad \cdots \quad E_{fi} \quad G_{fi} \quad E_{fi} \quad E_{ei} \quad G_{ei} \quad E_{ei} \quad \cdots \right\} \quad (A13)$$

D は対角成分のみが非零となる対角行列である.

$\sigma_{fNi}(x)$, $\varepsilon_{fNi}(x)$, $\tau_{fi}(x)$, $\gamma_{fi}(x)$, $\sigma_{fMi}(x)$ および $\varepsilon_{fMi}(x)$ はそれぞれ CFRP 板 i の軸応力, 軸ひずみ, せん断応力, せん断ひずみ, 曲げモーメントによって CFRP 板 i の下面に生じる直応力および直ひずみである.

$\sigma_{yei}(x)$, $\varepsilon_{yei}(x)$, $\tau_{ei}(x)$ および $\gamma_{ei}(x)$ はそれぞれ接着剤 i に生じる垂直応力と垂直ひずみ, せん断応力とせん断ひずみである. $\sigma_{yei}'(x)$ および $\varepsilon_{yei}'(x)$ は, 微分方程式の階数を 1 階とするための補助変数であり, それぞれ垂直応力と垂直ひずみの 1 階微分成分である.

近似解は, 式(9)の $M_f(x)$ を無視して定式化されているので, $N=1$ に対して, 式(A5)の B_{ci} を次式に置き換えて数値解析を行うことにより, 付図-1に示すように近似解を与えることができる.

付図-1 近似解を与える数値解析結果(せん断応力)

付図-2 接着剤に生じるせん断応力の分布(式(A17))

$$B_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_i d_{fi}} \end{bmatrix} \quad (A14)$$

(2) 近似解から得られるCFRP板の曲げモーメントを用いた接着剤に生じるせん断応力の算出

近似解では, 図-6に示すように, 接着剤に生じるせん断応力が次式で仮定されている.

$$\tau(x) = G_e \frac{u_s(x) - u_f(x)}{h} \quad (A15)$$

しかし, 近似解に対しても CFRP 板に生じる曲げモーメント $M_f(x)$ が式(16)から与えられるので, 式(6)を次式の差分形式で示すことにより, CFRP 板の曲げモーメントの影響を考慮した接着剤に生じるせん断応力が算出できる.

$$\tau(X) = G_e \frac{u_s(X) - u_f(X)}{h} \quad (\text{A16})$$

ここに,

$$u_s(X) = u_s(X - \Delta x) + \frac{N_s(X)\Delta x}{E_s A_s} \quad (\text{A17})$$

$$u_f(X) = u_f(X - \Delta x) + \frac{N_f(X)\Delta x}{E_f A_f} + \frac{M_f(X)\Delta x}{E_f I_f} \cdot \frac{t_f}{2} \quad (\text{A18})$$

式(A17), (A18)の $u_s(X)$, $u_f(X)$ は, 式(7), (8)をそれぞれ差分化して与えている. また, X は $\Delta x/2$ から $l - \Delta x/2$ の範囲の x 座標値である. ただし, $X = \Delta x/2$ の場合, 式(A17), (A18)の右辺第 1 項の $u_s(-\Delta x/2)$, $u_f(-\Delta x/2)$ は共に 0 とする.

式(A16)から計算される接着剤に生じるせん断応力と高精度解および近似解から計算される接着剤に生じるせん断応力の分布を付図-2に示す. 計算では $\Delta x = 0.1 \text{ mm}$ としている. この図から, 近似解で与えられるCFRP板に生じる曲げモーメント $M_f(x)$ を用いて計算した接着剤に生じるせん断応力は, 高精度解よりも若干小さいが, ほぼ同程度の解を与えることがわかる.

参考文献

- 1) Miller, T.C., Chajes, M.J., Mertz, D.R. and Hastings, J.N.: Strengthening of a steel bridge girder using CFRP plates, *Journal of Bridge Engineering*, ASCE, USA, Vol.6, pp.514-522, 2001.
- 2) 板垣一也, 渡邊憲市, 鈴木博之: 炭素繊維強化樹脂板(カーボン板)による鋼橋補強の事例, 第 8 回鋼構造の補修・補強技術報告論文集, pp.49-54, 2002.
- 3) 村上英樹, 安森 浩, 小林 朗, 立石晶洋: 鋼部材に対する炭素繊維プレートを用いた緊張力導入に関する実験的研究, プレストレストコンクリート技術協会, 第 15 回プレストレストコンクリートの発展に関するシンポジウム論文集, pp.359-362, 2006.
- 4) Moy, S.S.J. and Bloodworth, A.G.: Strengthening a steel bridge with CFRP composites, *Structures & Buildings*, Vol.160, Issue SB2, pp.81-93, 2007.
- 5) 杉浦 江, 小林 朗, 稲葉尚文, 本間淳史, 大垣賀津雄, 長井正嗣: 鋼部材腐食損傷部の炭素繊維シートによる補修技術に関する設計・施工法の提案, 土木学会論文集 F, Vol.65, No.1, pp.106-118, 2009.
- 6) Smith, S.T. and Teng, J.G.: Interfacial stresses in plated beams, *Engineering Structures*, Vol.23, pp.857-871, 2001.
- 7) Deng, J., Lee, M.M.K. and Moy, S.S.J.: Stress analysis of steel beams reinforced with a bonded CFRP plate, *Composite Structures*, Vol.65, pp.205-215, 2004.
- 8) Yang, J. and Wu, Y.F.: Interfacial stresses of FRP strengthened concrete beams: Effect of shear deformation, *Composite Structures*, Vol.80, pp.343-351, 2007.
- 9) 石川敏之, 佐々木 裕, 山田健太郎: 板曲げを受ける CFRP 板接着鋼板のはく離強度, 応用力学論文集, Vol.11, pp.903-910, 2008.
- 10) Hart-Smith, L.J.: Adhesive-bonded double-lap joints, Technical report, NASA 112235, 1973.
- 11) 西田貴裕, 石川敏之, 大倉一郎: 引張を受ける接着強度部材のはく離に垂直応力が与える影響, 土木学会第 63 回年次学術講演会講演概要集, I-458, pp.915-916, 2008.
- 12) Bocciarelli, M., Colombi, P., Fava, G. and Poggi, C.: Prediction of debonding strength of tensile steel/CFRP joints using fracture mechanics and stress based criteria, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.76, pp.299-313, 2009.
- 13) Bocciarelli, M., Colombi, P., Fava, G. and Poggi, C.: Fatigue performance of tensile steel members strengthened with CFRP plates, *Composite Structures*, Vol.87, pp.334-343, 2009.
- 14) 石川敏之, 大倉一郎: 複数の段差を有する CFRP 板接着鋼板の各 CFRP 板の必要接着長さと最適剛性, 土木学会論文集 A, Vol. 66, No.2, pp.368-377, 2010.
- 15) 宮下 剛, 長井正嗣: 一軸引張りを受ける多層の CFRP が積層された鋼板の応力解析, 土木学会論文集 A, Vol.66, No.2, pp.378-392, 2010.
- 16) 稲見武夫: 理工系の基礎数学 3・常微分方程式, 岩波書店, 1998.

(2012.6.7 受付)

HIGH-PRECISION SOLUTION OF STEEL PLATE STRENGTHENED WITH CFRP PLATES UNDER UNIAXIAL LOADING

Toshiyuki ISHIKAWA, Takeshi MIYASHITA and László Gergely VIGH

In this paper, a solution of six-order differential equation for steel plate strengthened with CFRP plates under uni-axial loading, high-precision solution, is given. In the previous paper, second-order and forth-order differential equations for steel-CFRP system were approximately solved to give the stress distribution. By the comparison of high-precision and approximate solutions, it was found that the stress distributions of both solutions were almost same. However, the shear and normal stress in adhesive layer at the end of CFRP plate given by the approximate solution is slightly higher than that given by the high-precision solution. Finally, numerical analysis solution method that matches the high-precision solution was introduced by using eigenvalue analysis of the first order simultaneous differential equations.