地震動位相のモデル化について

佐藤 忠信¹・吉田 郁政²・大島 義信³

¹正会員 東南大学教授 都市工程科学技術研究院 (210096, 中華人民共和国南京市四牌路2)
E-mail: satotdnbseu@yahoo.co.jp

²正会員 東京都市大学教授 工学部都市工学科 (〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)
E-mail: iyoshida@tcu.ac.jp

³正会員 京都大学准教授 大学院工学研究科社会基盤工学専攻 (〒615-8530 京都市西京区京都大学桂)
E-mail: oshima.yoshinobu.3a@kyoto-u.ac.jp

地震動位相をモデル化し、位相を模擬する新しい方法論を展開し、その物理的な背景について考察を加えた。まず地震動の群遅延時間に着目し、その確率特性から導かれる地震動位相の特性を明確にし、位相を模擬するための確率モデルを提案した。さらに、位相の物理的特性が、断層のせん断破壊過程と伝搬経路のランダム性に依存しているものとし、それらがフラクタル特性を有していることをHurst指数を用いて明らかにしたうえで、その検出法を構築した。粒状体を対象としたせん断試験シミュレーション結果と粒状体がランダムに配置されたモルタル供試体中の弾性波伝播試験結果を用い、フラクタル特性の検出法の有用性を検証するとともに、観測された地震動を用いて、地震動の位相がフラクタル特性を有していることを実証し、地震動位相をHurst指数で規定される非整数次ブラウン過程で模擬する方法論を提案した。

Key Words : *earthquake motion phase, group delay time, stochastic differential equation, fractal, Hurst index, fractional Brounian process*

1. まえがき

地震動のような非定常特性を有している時刻歴信号を模擬するには、振幅特性と位相特性のモデル化が必要であるが、振幅特性を解明するための研究に比べ、位相特性についてはあまり焦点が当てられなかったようである。振幅特性についてはパワースペクトルの非定常性をモデル化^{1,2)}する研究が精力的に行われ、1980年代には非定常パワースペクトルを用いて地震動の時刻歴が模擬できるようになった。しかし、地震動位相の物理特性を合理的に説明できる理論が確立されていなかったため、地震動のシミュレーションにはランダム位相を用いることが多かった。位相に関する研究はわが国がリードした。地震動位相のパイオニア的研究を行った大崎ら³⁾はフーリエ位相差分布と時刻歴包絡形との類似性を指摘し、その後、和泉・勝倉⁴⁾がフーリエ位相の円振動数軸上での傾き(群遅延時間)に注目して、その平均値と標準偏差により地震波の重心位置と広がり表現できることを示した。石井ら⁵⁾、佐藤ら⁶⁾は、位相差分布や群遅延時間の特性を、多数の強震記録に基づいた回帰分析によりモデル化し、非定常性を有する地震波形の合成法について検

討した。著者らも、地震動の位相特性のモデル化の意義について述べるとともに、位相モデルについて一連の研究^{7,9)}を行った。また、モデル化された位相スペクトルを用いて、耐震設計で用いられる応答スペクトルに適合した波形が作成できることを示しており¹⁰⁾、鉄道構造物の設計基準でも利用されている¹¹⁾。この方法により耐震設計用地震動を合成する場合、振幅特性を設計用の応答スペクトルで定義するので、振幅スペクトルと位相スペクトルが独立に定義されることになる。しかし、振幅と位相を独立にモデル化して、非定常な地震波形を合成する方法は本質的な矛盾を抱えている。それは、因果性を有する時系列のフーリエ変換の実数部と虚数部は独立ではなく、ヒルベルト変換の関係で結び付けられているためである。したがって、振幅スペクトルをモデル化した場合には、位相スペクトルに何らかの制限が設けられなければならない。こうした問題点を矛盾なく解決するため、位相スペクトルのみに着目した波形の合成方法^{12,13)}も提案されている。このように、設計用地震動を模擬するための地震動位相のモデル化に関しては、ある程度実用に耐えられる段階に達している。

しかし、これらのモデル化は観測記録から求められる

地震動位相の現象論的経験則に立脚したものであり、地震動位相を規定する諸定数を地震のマグニチュード、震央距離と局所的な地盤パラメータなどの回帰式として表現したものであり、位相の物理・数理解釈に基づいたものではなかった。本研究では、地震波のような非定常時系列を、フーリエ解析によって模擬するときに必要なフーリエ位相スペクトルが、地震動のどのような物理特性を表現しているのかに考察を加える。まず、群遅延時間の確率特性に着目し、地震動位相がどのような確率過程に従うのかについて考察する。次に、自己アフィンフラクタルの概念¹⁴⁾を用いて、地震動位相がフラクタル特性を有していることを明らかにしたのち、それをモデル化する方法論を模索する。なお、本論文は直接的に媒質のフラクタル性から地震動位相のフラクタル性を導き出すという研究ではなく、地震動位相がフラクタル性を有していることを示すことにより、媒質のフラクタル性が地震動におよぼす間接的な証拠を示そうとするものである。

2. 群遅延時間を利用した位相差分のモデル化

地震動位相をモデル化するときには、位相そのものを直接モデル化するのではなく、その微分係数として定義される群遅延時間を解析の対象とすることが多い。地震動の時刻歴を $f(t)$ とすれば、そのフーリエ変換は次式のように定義される

$$F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (1)$$

ここに、 ω は円振動数、 $R(\omega)$ と $I(\omega)$ はフーリエ変換の実部と虚部である。地震動のフーリエ振幅 $A(\omega)$ 、位相 $\phi(\omega)$ と群遅延時間 $\xi(\omega)$ は次式で計算される

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2} \\ \phi(\omega) &= \tan^{-1} \left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)} \right) \\ \xi(\omega) &= \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \frac{I'R - R'I}{R^2 + I^2} \end{aligned} \quad (2)$$

図-1 1995年兵庫県南部地震時の神戸気象台加速度記録 (NS) の群遅延時間

ここに、 $()'$ は括弧内の変数を ω で微分することを意味している。

図-1は1995年兵庫県南部地震のときに神戸気象台で計測された加速度記録から式(2)の第3式を用いて計算された群遅延時間である。その平均値は -19.35 秒である。サンプリング時間間隔が 0.02 秒であるので、25Hzで対称に折り返されている。図から明らかなように、群遅延時間は次式で表されるような円振動数軸上のデルタ関数列として表現できそうである。

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^N a_i \delta(\omega - \omega_i) \quad (3)$$

ここに、 $\delta()$ はデルタ関数、 N は離散化点の総数、 ω_i は離散化円振動数点であり、 a_i は各離散化円振動数点での群遅延時間のサンプルである。式(3)を円振動数で積分することにより地震動の位相スペクトルは次式のように表現される。

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^N a_i U(\omega - \omega_i) \quad (4)$$

ここに、 $U()$ はステップ関数である。

図-2は図-1に与えられる群遅延時間の平均値(-19.35)と分散(42.56)を求めたうえで、群遅延時間を正規化しその確率密度分布を図示したものである。同時に標準正規分布の密度関数も図示している。群遅延時間の分布特性を正規分布でモデル化することはできないが、ほぼ原点対象であり、尖度が大きく歪度がほぼゼロなので、そのモデル化はデータから得られる分散を修正することによって可能と考えられる。ちなみに平均値0、分散0.36とした場合の分布も合わせて示した。

図-2 正規化された群遅延時間の確率分布特性

いま, 対象とする円振動数領域を離散間隔 $\Delta\omega$ で N 個に離散化して, 離散点ごとの群遅延時間を図-2に示されるような確率密度関数を有する独立同分布(iid)に従う確率変数と考えることができれば, 離散点 n での離散化位相は, 式(4)から以下のように与えられる

$$\phi_n = \sum_{i=1}^n A_i \Delta\omega \quad (5)$$

ここで, a_i の代わりに大文字 A_i を用いたのは, サンプル実現値ではなく確率変数であることを強調するためである。

群遅延時間の確率分布特性に対して独立同分布を仮定できる場合には, 中心極限定理によると, 群遅延時間の平均値を μ_ξ , 分散を σ_ξ^2 とし, 離散点 n での円振動数を ω とすれば, 確率変数 ϕ_n は

$$\text{平均値} = n\mu_\xi \Delta\omega = \frac{\omega}{\Delta\omega} \mu_\xi \Delta\omega = \omega \mu_\xi$$

$$\text{分散} = n\sigma_\xi^2 \Delta\omega^2 = \frac{\omega}{\Delta\omega} \sigma_\xi^2 \Delta\omega^2 = \omega \sigma_\xi^2 \Delta\omega = \omega S_\xi^2$$

の正規分布で近似される。すなわち, $n \rightarrow \infty$ とした極限での ϕ_n を $\phi(\omega)$ と表現すれば, その密度関数は

$$p(\phi(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega S_\xi^2}} \exp \left\{ -\frac{(\phi(\omega) - \omega \mu_\xi)^2}{2\omega S_\xi^2} \right\} \quad (6)$$

で与えられる。Wiener過程の表現を用いれば, 離散間隔 $\Delta\omega$ ごとの位相差分は平均値 $\Delta\omega \mu_\xi$, 分散 $\Delta\omega S_\xi^2$ の正規分布のサンプル値として与えられることになる。すなわち,

$$p(\Delta W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\omega S_\xi^2}} \exp \left\{ -\frac{\Delta W^2}{2\Delta\omega S_\xi^2} \right\} \quad (7)$$

に従う N 個のサンプル値 $\Delta W_i (i = 1, 2, \dots, N)$ を発生させ, 次式のように, その内の n 個までの和を取れば, 離散点 n での位相 ϕ_n が次式で計算できることになる。

$$\phi_n = n\Delta\omega \mu_\xi + \sum_{i=1}^n \Delta W_i \quad (8)$$

式(8)の意義は非常に大きい。それは, 位相が少なくともWiener過程のような特性を有している確率過程として定義されなければならないことが明らかにされたからである。この結果, 位相過程をモデル化するにあたって, 確率過程論の壮大な世界で得られている各種の知見を利用することが可能になった。位相がWiener過程に従うことを認めれば, 式(7)に基づいて独立にサンプルを発生し, それを足し込めば位相過程が構成できる。しかし, Wiener過程を定義する式(7)は, 独立同分布の仮定の下に誘導されている。同分布の仮定は良いとしても, 独立分布という仮定は地震動位相をモデル化するには制約が強すぎると考えられる¹⁵⁾。そこで, 本論文の5章以下では位相の持つ相関性について議論し, 位相がフラクタル性を有していることを明らかにしたのち, それを満たす最も単純な位相の確率過程について議論する。

その前に, 式(8)の結果を利用して位相を円振動数 ω の連続関数として議論するために, 式(8)を微分形式に書き換え, 次式のように表現する。

$$d\phi = \mu_\xi d\omega + dW \quad (9)$$

ここに, dW はwiener増分過程である。なお, 式(9)で定義された位相差分の形式は, 一番単純な確率微分方程式の形式になっているので, これを一般化するにはどのような方法が考えられるかを以下の3, 4章で解説する。

3. 位相差分モデルの一般化

以上に展開した形式を用いて, 位相差分の模擬法を構築するためには, 多数の地震記録を収集し, 各地震動の時刻歴の発震時刻を調整した上で, Meyerのウェーブレット¹⁶⁾を用いてバンドパス時系列を算出し, その時系列の群遅延時間を計算し, それらの平均値と分散を地震のマグニチュードと震央距離, 局所的な地盤条件の関数として表現した結果⁸⁾を用いることが可能である。図-3はその一例である。群遅延時間の平均値と標準偏差をウェーブレットの中心周波数に関して表示している。

群遅延時間の解析から, こうしたデータが与えられたとき, 位相スペクトルを模擬するには, 群遅延時間の平均値 μ_ξ と分散 σ_ξ^2 が緩やかに変化する ω の連続関数と考え, ω 領域をいくつかの帯域に分け, その中では平均 μ_ξ と分散 σ_ξ^2 が一定値を取るものと考え, 各帯域の境界で位相の値が連続するものと考えれば, 2章で展開した理論がそのまま適用可能である。

図-3 群遅延時間の期待値と標準偏差の振動数依存性と震央距離依存性 (マグニチュード8の地震を対象)⁸⁾

4. 確率微分方程式による定式化

位相を相関性を有するガウス過程で表現する方法として、式(9)を一般化した次式のような確率微分方程式による表現を用いることができる^{17,18)}。

$d\phi = \{c_1(\omega)\phi + c_2(\omega)\}d\omega + \{\sigma_1(\omega)\phi + \sigma_2(\omega)\}dW$
ここに、 $c_1, c_2, \sigma_1, \sigma_2$ は微分方程式の係数であり円振動数の関数として定義され、 dW は式(7)で定義された確率過程 ΔW とすればよい。この場合、位相の平均過程 μ_ϕ と分散過程 σ_ϕ^2 は次式で与えられるので、

$$d\mu_\phi = \{c_1(\omega)\mu_\phi + c_2(\omega)\}d\omega$$

$$d\sigma_\phi^2 = (2c_1(\omega) + \sigma_1^2(\omega))\sigma_\phi^2 d\omega$$

$$+ \{2(c_2(\omega) + \sigma_1(\omega)\sigma_2(\omega))\mu_\phi + \sigma_2^2(\omega)\}d\omega$$

地震記録から求められる位相 $\phi(\omega)$ をもとに、確率微分方程式の係数を同定できる可能性がある。なお確率微分方程式による表現はBooreも提案している¹⁹⁾。

5. 位相の物理的意味を調べるための数学的準備

地震動 $f(t)$ を模擬するとき、震源断層の破壊過程を表す震源関数 $s(t)$ 、伝播経路の伝達特性関数 $p(t)$ 、局所的な地盤の増幅特性関数 $h(t)$ の合成積として次式のように定義することが多い

$$f(t) = s(t) * p(t) * h(t) \quad (10)$$

フーリエ変換を行うと

$$F(\omega) = A_s A_p A_h \exp\{i(\phi_s + \phi_p + \phi_h)\} \quad (11)$$

となる。ここに、 A_s, A_p, A_h ならびに ϕ_s, ϕ_p, ϕ_h は各々の関数のフーリエ振幅とフーリエ位相であり、円振動数の関数である。式(11)から明らかなように地震動位相 $\phi(\omega)$ は各々の関数のフーリエ位相の線形和として表現される。本論文では ϕ_s と $\phi_p + \phi_h$ に分け、それらがフラクタル特性を有していることを、本論文の後半で明らかにしたいと考えている。この節では、そのために必要となるフラクタルの数理¹⁴⁾を概説する。

まず、自己アフィン(self-affine)と言う概念を説明した後、自己アフィンフラクタルとなる非整数次ブラウン過程を定義し、それを規定するHurst指数²⁰⁾の同定法を簡潔に紹介する。

(1) 自己アフィンフラクタル

フラクタルの概念はフランスの数学者Mandelbrot²¹⁾により導入された幾何学の概念であり、簡単に言うと複雑な図形であり、いくら細部を拡大しても複雑さを保つ図形のことをいう。図形の一部を抜き出すと全体と似た形になる図形を自己相似性のある図形と言うが、自己アフ

インと言う概念は縦横の相似率が異なっている図形一般を指している。したがって、自己アフィンなグラフ $y = g(\omega)$ を考えると、 ω 軸を λ 倍したときに y 軸が λ 倍になるのではなく c 倍になる。すなわち、

$$g(\lambda\omega) = cg(\omega) \quad (12)$$

となる。Hurst指数(数値として扱うときは H で表現する)を用いると

$$c = \lambda^H \quad (13)$$

と表現²¹⁾される。Hurst指数は $(0 < H \leq 1)$ の範囲の値を取る。なお、確率的に自己アフィンなグラフはフラクタルと言われる¹⁴⁾。

(2) 非整数次ブラウン過程の定義

ここでは、自己アフィンフラクタル過程を模擬するために、非整数次ブラウン過程 $W_H(\omega)$ (FBP)を定義しそのシミュレーション法を解説する。FBPはWiener過程を $W(\omega)$ とすれば、次式で定義²²⁾される。

$$W_H(\omega) - W_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{\omega} K(\omega - \tau) dW(\tau) \quad (14)$$

ここに、 $W_H(0)$ は初期条件、 $\Gamma()$ はガンマ関数であり、次式で定義される。

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \exp(-\tau) \tau^{x-1} d\tau \quad (15)$$

また、式(14)の積分核は以下のように定義される。

$$K(\omega - \tau) = \begin{cases} (\omega - \tau)^{H-1/2} - (-\tau)^{H-1/2} & (\tau < 0) \\ (\omega - \tau)^{H-1/2} & (0 \leq \tau \leq \omega) \\ 0 & (\omega \leq \tau) \end{cases}$$

式(14)の定義によれば、確率過程 $W_H(\omega)$ はWiener増分の履歴全てに関係することが分かる。 $W_H(\omega)$ の平均値

図-4 非整数次ブラウン過程のシミュレーション例、Hurst指数が0.2, 0.5, 0.8の場合について示している。 H が0.5の場合はWiener過程となっている。ここでは、横軸の次元を時間とし、無次元化し0~1の範囲で描いているが、次元は対応する現象のものに読み替えればよい。

はゼロであるが、その分散と自己相関関数 $R(\omega_t, \omega_s)$, $\omega_t > \omega_s$ は次式で与えられる²³⁾.

$$E[(W_H(\omega_t) - W_H(\omega_s))^2] = \sigma_0^2 |\omega_t - \omega_s|^{2H} \quad (16)$$

$$R(\omega_t, \omega_s) = \frac{\sigma_0^2}{2} (|\omega_t|^{2H} - |\omega_t - \omega_s|^{2H} + |\omega_s|^{2H}) \quad (17)$$

ここに、 σ_0^2 はWiener過程を規定する分散である。これから、 $H = \frac{1}{2}$ となる特別の場合には、この過程はWiener過程 $W(\omega)$ となること、また、自己相関関数が $|\omega_t - \omega_s|$ のみの関数にはならないので、非定常過程であることも分かる。

非整数次ブラウン過程を式(14)から、直接シミュレートするのは簡単ではないが、離散的な過程の場合にはVoss が提案している2分法によるアルゴリズム²⁴⁾で、簡単にシミュレートできる。図-4にその一例を示した。Hurst指数が小さいと変動が激しいが、大きくになるにつれて次第に変動が滑らかになっていくのが分かる。

(3) Hurst指数の同定法

非整数次ブラウン過程に従うと考えられる離散的サンプリング系列 y_i ($i = 1, 2, \dots, N$) が、過程を制御する変数に関する各離散点、円振動数の場合には ω_i ($i = 1, 2, \dots, N$) で、多数得られるときは、式(16)の関係に着目すれば、 ω_i と $E[y_i^2]$ との関係が $\sigma_0^2 \omega_i^{2H}$ の関数で表現されるので、これから σ_0^2 と $2H$ を同定できる。図-5はその一例を示している。 $H = 0.8$ としてVossのアルゴリズムで200個のサンプルを計算し、それらを用い離散円振動数の各点で分散を計算した結果から、最小二乗法で H を推定したものである。データ点と最小二乗法で決定した曲線とが重なっているのが、見分けがつかないが、同定された H は0.802である。

サンプル系列が一個しか与えられないときは、過程のエルゴード性を仮定し、 $\omega_i = \omega_{k+i} - \omega_k$ として、 ω_i の値を一定に保ったまま、 $\hat{y}_i = y_{k+i} - y_k$ を多数の k に

図-5 200個の非整数次ブラウン過程から求まる分散と正規化変数(Normalized timeと表記)の関係、 $H=0.802$ が同定値。

図-6 エルゴード性を仮定し、一サンプルから求まる分散と正規化変数との関係、 $H=0.782$ が同定値。

対して計算し、その期待値 $E[\hat{y}_i^2]$ を計算し、 ω_i と $E[\hat{y}_i^2]$ との関係が $\sigma_0^2 \omega_i^{2H}$ の関数で表現されることを利用すればよい。図-6は図-5の計算を行ったときの一サンプルを利用して、離散円振動数の各点で分散を計算し、最小二乗法でHurst指数の値を推定したものである。同定された H は0.782である。

図-5と6の両者から分かるように、対象とする過程が自己アフィンフラクタル特性を有しているものであれば、その分散と当該変数との関係から、そのHurst指数を比較的精度よく決定できることが分かる。

6. 地震動位相はフラクタル特性を有するのか？

5章の冒頭で地震動位相がフラクタル特性を有していると述べたが、それが本当かどうかについて、実地震記録を用いて検証する。そのために、2章で展開した群遅延時間と位相の関係を、単純化して以下のように書き直す。群遅延時間 $\xi(\omega)$ を以下のように

$$\xi(\omega) = -T_0 + \eta(\omega) \quad (18)$$

位相 $\phi(\omega)$ を以下のように表現する

$$\phi(\omega) = -T_0 \omega + \phi_0(\omega), \quad \phi_0(\omega) = \int_0^\omega \eta(x) dx \quad (19)$$

ここに、 $-T_0$ は平均群遅延時間、 $\eta(\omega)$ は群遅延時間の平均値周りの変動である。 $-T_0$ は発震時刻から観測点に地震動の主エネルギー成分が到達するまでの時間遅れと考えることができる。

図-7と8は実際に観測された地震加速度記録を用いて、それらのHurst指数を決定したものである。両図とも位相に関しては、直線的な減少関数にしか見えないが、これは式(19)中で $-T_0 \omega$ の項が卓越するためであり、位相の確率特性は位相の表現形式の第2項である $\phi_0(\omega)$ に含

図-7 1995年兵庫県南部地震の際に神戸JMAで観測された加速度記録の解析結果. 上段: 群遅延時間, 中段: 位相, 下段: 位相差分の分散値, これから $H=0.679$ と非整数次ブラウン過程を定義するWiener過程の分散 σ_0^2 を決定した.

図-8 1993年釧路沖地震の際に釧路JMAで観測された加速度記録の解析結果. 上段: 群遅延時間, 中段: 位相, 下段: 位相差分の分散値, これから $H=0.812$ と非整数次ブラウン過程を定義するWiener過程の分散 $\sigma_0^2 = 28.8$ を決定した.

まれている. したがって, Hurst指数を求める下段の解析は $\phi_0(\omega)$ のみを用いて行っている. 図のタイトル中に同定されたHurst指数値が与えられている. この場合は位相差分の分散が ω^{2H} に比例することになる. したがって, $\Delta\phi$ を式(12)の g に代入し, $E[\Delta\phi^2] \propto \omega^{2H}$ であることを念頭に置けば, 式(13)の関係式が得られ, 地震動の位相がフラクタル特性を有していることが結論付けられる.

このようにして決定された位相のフラクタル特性を用いて, 実際の地震動が模擬できるかどうかを検証するために, 図-8に与えられる釧路沖地震の解析結果から非整数次ブラウン過程を模擬し, これをサンプル位相として, 観測記録から得られる $-T_0$ 値($=46.68$)ならびに観測記録のフーリエスペクトル振幅を用いて, 地震動を再現した例が図-9に示されている. この図から, 論文で述べてきた方法論により, 実用的な観点から地震動の位相特性を模擬できる可能性が示された. 以下に, 5章の冒頭に述べた地震動位相のフラクタル特性が震源特性と伝播経路の特性に分解できるのかについて, 実地震記録を用いて考察する.

7. 観測地震動位相のフラクタル特性

地震波動は比較的多様な物質で構成されている地殻と名付けられている媒質中を伝播してくるので, その過程

図-9 同定された $H = 0.812$ ならびにWiener過程を定義する分散を用いて非整数次ブラウン過程で模擬した位相で再現した地震動の時刻歴 (群遅延時間の平均値 $T_0 = 46.68$ とフーリエ振幅スペクトルは実地震記録のものを利用). 上段: 観測加速度記録, 中段: 非整数次ブラウン過程を用い模擬した $\phi_0(\omega)$, 下段: 再現した時刻歴.

図-10 用いた地震動の震源と観測点分布

で、限らない屈折反射を繰り返して観測点に到達する。伝播経路上の媒質構造はマクロ的な構造からミクロ的な構造までさまざまであるが、少なくとも両者の間にある種の相似関係を有していると考えられる。地殻の複雑性はミクロ的部分を拡大してみるとマクロ的構造と相似になっているという仮定である。もしある種の相似関係が地殻を構成している媒体中に存在するのであれば、それはフラクタルとして記述可能であるから、地震波動の時刻歴の中に地殻のフラクタル性が埋め込まれているはずである。それを何とか検出したいというのが本章の目的である。

図-11 2011年東北地方太平洋沖地震の余震記録から得られる震央距離とHurst指数の関係。左図：余震IIIの結果、中央図：余震IIの結果、右図：余震Iの結果。

図-12 2011年東北地方太平洋沖地震の余震記録から得られる震央距離と $-T_0$ の関係。左図：余震IIIの結果、中央図：余震IIの結果、右図：余震Iの結果。

図-13 1997年鹿児島県北西部地震(M6.3)の記録の解析結果。左図：震央距離と $-T_0$ の関係、中央図：震央距離と群遅延時間の分散値との関係、右図：震央距離とHurst指数値との関係

そのためには、震源特性が比較的単純で伝播経路の特性のみが卓越するであろう地震記録を利用する必要がある。ここでは、2011年東北地方太平洋沖地震の際に観測されたマグニチュード5程度の余震記録を用いて、考察を加える。図-10は用いた地震記録の観測点分布と震源位置を示したものである。余震I, II, IIIのマグニチュードはそれぞれ5.2, 4.6と5.4である。全ての記録は防災科学技術研究所が提供しているK-NETとKiK-netから取得した。余震IとIIIは観測点網で十分な記録が取れており、なるべく小さなマグニチュードの地震を観測点網の北端と南端で選択し、余震IIは解析の再現性をチェックするために余震IIIの震源位置に近い余震として選択した。

図-11は各々の余震記録から得られたHurst指数と震央距離との関係を示したものである。図中の○印が求められた結果であり、各直線は最小二乗近似の直線である。左図には一本の直線のみが記入されているが、中央と右図には二本の直線が記入されている。各図の上側の直線は各々の左側にある図の直線のコピーである。 H の値は0~1の間に定義されるので、直線近似はそぐわないが、この震央距離の範囲内であれば1を超えることはなかったので、近似的な評価を行うために直線近似とした。図から明かなように、Hurst指数は震央距離が増加するとともに次第に大きくなっている。これは、位相スペクトルの特性を表現している $\phi_0(\omega)$ の円振動数に対する変動が震央距離の増加とともに次第に滑らかになっていくことを意味しており、興味深い結果である。また3本の直線はほぼ平行である。これは、震源位置や地震のマグニチュードによらず、地震観測を行っている周囲の地殻のフラクタル特性がこれら直線の勾配から把握できることを示唆している。では、絶対値の差は何に起因しているのだろうか、おそらく震源の破壊過程の特性によるものと考えられるが、断定できるまでには至っていない。図-12は各余震記録の平均群遅延時間から算出した $-T_0$ の値と震央距離との関係を示したものである。この図から、観測点が展開されている近傍の地殻内を伝播するであろうS波の平均的な伝播速度が推定できる。それらは余震IIIとIIについては3.62km/sと3.81km/sでほぼ通っているが、余震Iから求まる値は4.39km/sで、震源位置が南と北で地震波の伝播速度が0.5~0.8km/sほど違うようである。この原因究明は今後の研究課題である。

図-13は1997年の鹿児島県北西部地震記録の解析結果である。地震のマグニチュードは6.3であるが、観測点が震源を取り囲んで配置されているので、震源での断層破壊過程のフラクタル特性が把握できるものと考え解析を行った。 $-T_0$ の値と震央距離との関係を示す左図から、この地域の平均的なS波速度が3.06km/sと求められる。なお、群遅延時間の分散は地震動の継続時間を評価する指標とされているので、中央図の群遅延時間の分散値と震央距離の関係から地震動の継続時間が震央距離の増加とともに増加すると言う一般的な事実も読み取れる。右図は

Hurst指数と震央距離の関係である。この場合も震央距離の増加とともにHurst指数は増加しているが、興味ある結果は、震央距離がゼロになる点での H が0.695と読み取れることである。震央距離ゼロの点でのHurst指数の物理的な意味を吟味するのは最後の節で行うが、この値は断層の破壊過程のフラクタル特性を与えているものと考えられる。

8. 地震動位相のフラクタル特性を分解する

物質のせん断現象に含まれるフラクタル性、ランダム媒質中を屈折反射を繰り返しながら伝播する波動記録に内蔵されているフラクタル性を、フラクタル特性を規定するHurst指数として捕えられることを示し、その類推から断層の破壊過程ならびに波動の伝播過程のフラクタル特性が地震動の位相特性に反映されることを示す。そのためにせん断現象のシミュレーション結果とモルタル中にガラスビーズを埋め込んだ供試体中の弾性波伝播実験結果を用いて、各現象のフラクタルを計量するためにHurst指数の同定解析を行う。

(1) 粒状体のせん断破壊現象から抽出されるフラクタル特性

第2共著者の吉田は波動伝播から破壊現象までを一貫して解析できる地震応答解析手法としてMPS法(Moving Particle Simulation)に注目しその開発を行っている^{25),26)}。ここではMPS法を利用した、二次元平面下での二軸圧縮破壊シミュレーション結果を用いて、せん断破壊の現象がフラクタル特性を有していることを明らかにする。MPS法の詳しい内容やその汎用性については参考文献を参照されたい。

用いるデータは、二次元平面内に不規則に初期配置された粒状体からなる媒質に等方圧をかけ圧縮した後、図-14に示すようなせん断帯が発生するまで側方拘束圧一定の下で鉛直方向圧を増加させる実験を模擬したものである。せん断面近傍に位置している粒子であれば、その加速度時系列がせん断過程の

図-14 MPS法を利用した粒状体のせん断試験結果の一例
左図：拘束圧10kN/m²で主せん断面はB側に発生
右図：拘束圧50kN/m²で主せん断面はA側に発生

図-15 MPS法を利用した粒状体の偏差応力と歪関係の一例(ピーク偏差応力の低い方から拘束圧を10, 25, 50kN/m²とした場合)

図-16 MPS法を利用した粒状体のせん断現象から決定されるHurst指数と粒状体の力学特性との相関性

影響を強く受けているはずであると考え、使用したデータは、せん断帯が発生した側のせん断面近傍に位置する粒子の加速度時刻歴である。同時に図-15に示すような応力-軸ひずみ関係も与えられている。

与えられた加速度時刻歴からその群遅延時間を計算し、それからHurst指数を求め、Hurst指数の値と拘束圧で正規化したピーク偏差応力、残留偏差応力、偏差応力降下量との関連を示したのが図-16である。図中には異なった8種類のHurst指数に対して、それぞれの正規化偏差応力値がプロットされているが、各々のHurst指数はMPSの解析に必要となる、粒子間の相互作用を制御する2種類のパラメータを適宜変化させて得られた結果である。なお、Hurst指数が小さい方から3組のデータは側方拘束圧10kN/m²、中央の3組が25kN/m²、右端の2組が50kN/m²である。図から明らかなように、Hurst指数が大きくなるにつれて拘束圧で正規化されたピーク偏差応力と偏差応力降下量(正規化されたピーク偏差応力と残留偏差応力の差)はともに大きくなっていること、正規

図-17 ガラスビーズを混入させたセメントペースト供試体中を伝播する弾性波の伝播速度計測システム

表-1 モルタル中に混入した骨材

Case	Material	Diameter, mm	Volume ratio, %
1	Grass beads	11	10
2		20	25
3		11	35
4		11	25
5		30	25

化された残留偏差応力はHurst指数が増加するとわずかに増加するように見えるが、ほとんど影響ないと考えても良いことがわかる。各種材料の破断面の形状がフラクタル形状を示すことは、材料学の分野ではよく知られた事実である。したがって、せん断現象の力学特性とせん断面のフラクタル形状との間に強い相関性の有ることは想像できるが、材料のフラクタル特性とせん断現象の詳細な関係を議論するのは今後に残された課題である。しかしある種のフラクタル特性が、せん断面上にある粒子の加速度時系列から計算される位相特性の中に見い出せたことは、非常に興味深い。

(2) 伝播経路の不規則性に内在するフラクタル特性の検出

第3著者の大島はコンクリート材料中の弾性波の伝播特性を研究²⁷⁾している。ここでは、その実験で得られたデータを使って不均質媒体中を伝わる弾性波の記録から不均質媒質のフラクタル的相似側がどのように検出できるのかについて考察を加える。

実験はコンクリート中を透過する弾性波が受ける骨材の影響を明らかにするため、各種骨材を用いた円柱供試体中を透過する弾性波を計測したものである。図-17に計測システムの模式図を示す。表-1はここで使用する実験データのみの材料特性であり、セメントペーストをマトリックスとして、混入したガラス球の特性を示した。供試体は、いずれも直径100mm高さ200mmの円柱供試体である。ただし、打設面は研磨により平滑化している。弾性波の送受信には、40kHzをピーク周波数とする端触子を用いた。入力波形として、ファンクションジェネレータにて幅0.8μs、送信電圧400Vの矩形パルス波を発生させ、受信波形はサンプリングレート10MHzにおいて収録した。ただし、解析の便宜上データは2MHz

図-18 ガラスビーズの混入体積比とHurst指数の関係(ガラスビーズの直径は11mm)

図-19 ガラスビーズの直径とHurst指数の関係(混入体積比は25%)

にダウンサンプリングしている。ファンクションジェネレータから発信された矩形波は、分岐させてロガーにて収録した。

この実験で得られた透過波の時系列記録から、その群遅延時間を計算し、位相スペクトルのフラクタル特性をHurst指数で評価した。入力される弾性波は解析上問題ない程度にパルス性状を保っているため、透過波は供試体中の不規則性に内在する相似側の影響のみを受けていると考えて差支えない。

図-18はガラスビーズの直径が11mmのときにその混入体積比を増加させるとHurst指数が減少するという結果であり、図-19は混入体積比を25%としてガラスビーズの直径を大きくしていくとHurst指数が増加するという結果を与えている。なお、この実験結果から求まるHurst指数には0.5を下回る場合がある。Hurst指数が0.5より大きい小さいかによって、そのフラクタル特性はかなり異なるものとなる。また地震波の位相から求められたHurst指数の値と

もかなりかけ離れている。現段階ではこの理由を説明できる明確な理由は判明していない。波動の伝播する境界条件や媒質、用いている弾性波の波長が地震動のそれとは大きくかけ離れているのがその原因と考えられるが、確定的な証拠を提示できる段階にはなっていない。また、こうした実験の組み合わせを多数実施することは費用の観点から実用的ではないので、現在数値計算によるシミュレーションによりさらに定量的な結果を得るべく努力をしている段階である。いずれにせよ、この解析を通して、媒質の不均質性を測るための指標となりうるフラクタル特性が、不均質材料中を透過してくる波動の位相特性で検出できる可能性の有ることが判明した。

7. むすび

本研究は、地震学で深く研究されてきた地震動の特性を地震動の位相特性のモデル化にどのように反映すればよいのか、という素朴な疑問に答えるために開始したものである。地震動を模擬するためには震源特性、伝播経路の特性、局所的な地盤の増幅特性を適切にモデル化しなければならないと言われて久しい。この論文は、震源特性と伝播経路の特性が地震動の位相にどのように反映されるのかを明らかにしようとしたものである。とくに、地震動位相がフラクタル性を有していることに着目し、媒質のフラクタル性が地震動に及ぼす影響の間接的な証拠を示そうとしたものである。得られた結論を要約すれば以下のようなものである。

- (i)地震動位相を線形位相遅れ部とそこからの変動部の二種類に分解すると、後者はフラクタル特性を有しており、非整数次ブラウン過程としてモデル化できる可能性があることを明らかにした。
- (ii)地震動位相のフラクタル特性を解析するためのパラメータとして、Hurst指数と非整数次ブラウン過程を駆動するブラウンノイズの分散値を選定し、それらを同定する方法論を提示した。
- (iii)地震動位相のフラクタル特性を規定するHurst指数は震源距離が増加するとともに増加することを明らかにした。
- (iv)実地震動記録を用いて、地震動位相のフラクタル特性が断層のせん断破壊過程を表現するものと伝播経路の媒質のランダム性に基づくものとに分解できることを明らかにした。
- (v)この事実をさらに明確にするために、まず粒子法を利用した粒状体のせん断シミュレーション結果を用いて、せん断面上に位置する粒子の加速度時系列からその位相を計算し、その変動部分がフラクタル特性を有すること、さらに位相の変動部からHurst指数を同定し、粒状体のせん断強度特性がHurst指数を用いて評価できる可能性のあることを明らかにした。
- (vi)また、セメントペーストをマトリックスとする

媒体にガラスビーズを混入した供試体中を伝播する弾性波の計測結果を利用して、供試体を透過した弾性波の位相を計算し、その変動部からHurst指数を同定した上で、混入したガラスビーズの粒径や混入率が透過波の位相から決定されるHurst指数に及ぼす影響について考察を加えた。この結果から、ランダム媒質中を伝播する弾性波のフラクタル性をその位相特性から評価できる可能性のあることを明らかにした。

地震動に関する最近の研究はコンピューターの発達もあって、断層の震源過程、伝播経路の不規則性などを詳細にモデル化して、力技で地震動を模擬する方法論の開発に力点が置かれるようになってきている。こうした観点に立つと、地震動位相のモデル化は必要性の低い研究と言われるかもしれない。耐震設計に携わる者として、それもあるほどどうなづけるが、もっと簡便で、誰でもが利用でき、地震動の物理特性を十分に反映した適切な地震動のモデル化手法はないものかと模索してきた。この論文は最近考えてきた地震動のモデル化、特に位相特性のモデル化に関する考察を論文としたものである。忌憚のないご批判を頂きたいと考えている。

なお、本研究で用いた地震記録は気象庁ならびに防災科学技術研究所が提供しているK-NETとKiK-netから取得した。ここに謝意を表する。

参考文献

- 1) 亀田弘行：強地震動の非定常パワースペクトルの算出法に関する一考察，土木学会論文報告集，第 234 号，pp.5-62，1977.
- 2) 後藤尚男，亀田弘行，杉戸真太：非定常強震地震動の統計的予測モデル，土木学会論文報告集，第 286 号，pp.37-51，1979.
- 3) 大崎順彦，岩崎良二，大川出，雅尾享：地震波の位相特性とその応用に関する研究，第 5 回日本地震工学シンポジウム，pp.201-208，1978.
- 4) 和泉正哲，勝倉裕：地震動の位相情報に関する基礎的研究，日本建築学会構造系論文集，第 327 号，pp.20-26，1983.
- 5) 石井 透，渡辺孝英：地震動の位相特性と地震のマグニチュード・震源距離・深さの関係，日本建築学会学術講演梗概集，pp.385-386，1987.
- 6) 佐藤智美，植竹富一，菅原良次：群遅延時間を用いた長周期地震動の経験的経時特性モデルに関する研究，日本建築学会構造系論文集，第 493 号，pp.31-39，1997.
- 7) 佐藤忠信，室野剛隆，西村昭彦：震源・伝播・地点特性を考慮した地震動の位相スペクトルのモデル化，土木学会論文集 No.612/I-46，pp.201-213，1999.
- 8) 佐藤忠信，室野剛隆，西村昭彦：観測波に基づく地震動の位相スペクトルのモデル化，土木学会論文集 No.640/I-50，pp.119-130，2000.
- 9) 室野剛隆，佐藤忠信，村上昌彦：断層近傍地震動の位相特性の経験的なモデル化，第 11 回日本地震工学シンポジウム論文集，Vol.1，pp.521-526，2002.
- 10) 佐藤忠信，室野剛隆：レベル 2 地震に対する土構造物の耐震設計シンポジウムおよび講習会テキスト，地盤工学会，地盤工学会関西支部，pp.98-117，2000.
- 11) (公財)鉄道総合技術研究所：構造物等設計標準同解説 耐震設計，丸善出版，2012.
- 12) 佐藤忠信，室野剛隆：位相情報を用いた地震動のシミュレーション法，土木学会論文集，No.675/I-55，pp.113-123，2001.
- 13) 佐藤忠信，室野剛隆：位相情報を利用した非定常地震動のシミュレーション法，土木学会論文集，No.752/I-66，pp.159-168，2004.
- 14) Kenneth F. : Fractal Geometry; *Mathematical Foundation and Application*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, 2003
- 15) Nigam, N. C. : Phase properties of a class of random processes, *Earthquake engineering and structural dynamics*, 10 (5), pp.711-717, 1982.
- 16) Meyer, Y. : *Orthonormal Wavelets in Wavelets*, Springer, pp.21-27, 1989.
- 17) 佐藤忠信：地震動を非定常確率過程としてモデル化するための課題と新しい試み—時間周波数解析によるモデル化とランダム振動解析への応用，第 54 回理論応用力学講演会「特別講演」，2005/年 1 月 26 日，日本学術会議 講堂(東京)，2005.
- 18) Mikosch, T. : *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 1998.
- 19) Boore, D. M. : Phase derivatives and simulation of strong ground motions, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 93(3), pp.1132-1143, 2003.
- 20) Hurst, H.E., Black, R.P., Simaika, Y.M. : *Long-term storage: an experimental study*, London, Constable, 1965.
- 21) Mandelbrot, B. : *The Fractal Geometry of Nature*, W H Freeman & Co, 1982.
- 22) Biagini, F., Hu Y., Oksenda, I B. and Zhang, T. : *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications, Probability and Its Applications*, Springer-Verlag, London, 2008.
- 23) 松葉育雄：長期記憶過程の統計，自己相似な時系列の理論と方法，共立出版社，2007.
- 24) Voss, R. F. : *Random fractal forgeries*, In R.A. Earnshaw, editor, *Fundamental Algorithms for Computer Graphics*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- 25) 吉田郁政：MPS 法を用いた地盤構造物の地震時破壊挙動解析のための基礎検討，土木学会論文集 A2，Vol.67，No.1，pp.93-104，2011.
- 26) 吉田郁政，大庭啓輔，石丸 真：MPS 法あるいは DEM を用いた破壊挙動の不確定性に関する基礎的考察，土木学会論文集 A2(応用力学)，Vol. 67，No. 2 (応用力学論文集 Vol.14)，pp. 1365-1374，2011.
- 27) 大島義信：コンクリート透過弾性波におけるコーダ干渉波の減衰特性，土木学会論文集 A2(応用力学)，Vol. 69，No. 2，pp.769-775，2013.

(2013. 11. 11 受付, 2014.3.10 修正, 2014.3.14 受理)

ON MODELING OF EARTHQUAKE MOTION PHASE

Tadanobu SATO, Ikumasa YOSHIDA and Yoshinobu OSHIMA

The purpose of this research is to make clear the physical characteristics of earthquake motion phase. Using stochastic characteristic of group delay time calculated from observed earthquake motions we developed stochastic simulation models of earthquake motion phase spectrum. Taking into account the fact that the phase characteristic is controlled by fault rupture process and the randomness of wave propagation medium we introduce the Hurst index to evaluate these characteristics based on the fractal theory. Using not only observed earthquake motions but also the simulation results of shear phenomena of particle assembled mediums as well as experimental results of ultrasonic wave propagation in grass bead embedded mortar specimens we confirm the efficiency of proposed method to grasp the fractal characteristic of earthquake motion phase. To simulate earthquake motion phase we introduce the concept of fractional Brownian process (FBP). A simple method is proposed to determine the Hurst index and the variance of a given process characterized by the FBP. We find that the phase characteristic of earthquake motion can be expressed by this process which is a non-stationary function of the circular frequency. Using several observed earthquake motion we demonstrate this fact and show the efficiency of newly founded result to simulate realistic earthquake motion phase.