佐藤忠信・吉田郁政・大島義信共著「地震動位相のモデル化について」への討議

(土木学会論文集A1(構造・地震工学), Vol.70, No.4掲載)

野津 厚¹

¹正会員 (独)港湾空港技術研究所 地震防災研究領域(〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬3-1-1)
E-mail: nozu@pari.go.jp

討議者 (Discussion)

野津 厚(港湾空港技術研究所)
Atsushi NOZU

本論文は、地震動の位相がもつフラクタル性に着目し、その性質をHurst指数によって定量的にモデル化しようとした研究であり、その独自性に対し心より敬意を表する次第である。しかしながら、論文の中で導出されている式の一部には疑問点がある。今後、多くの研究者が本論文を参考にする可能性があることを考えると、現時点で疑問点を指摘しておくことの意義は大きいと考え、討議を御願ひする次第である。

ここで対象とする式は、本論文の第4章に掲載されている式である。著者は、地震動の位相を表現するための一方法として、以下に示すような確率微分方程式を考えている。

$$d\phi = \{c_1(\omega)\phi + c_2(\omega)\}d\omega + \{\sigma_1(\omega)\phi + \sigma_2(\omega)\}dW \quad (1)$$

ここに $c_1, c_2, \sigma_1, \sigma_2$ は微分方程式の係数であり円振動数 ω の関数である。 dW は本論文の式(7)で定義された平均値0、分散 $d\omega S_\xi^2$ のガウス過程であり、独立増分を表す。また、本論文の第2章で定義されているように、

$$S_\xi = \sigma_\xi \sqrt{d\omega} \quad (2)$$

である。ここに σ_ξ^2 は群遅延時間の分散である。

著者は、式(1)より、位相の平均過程 μ_ϕ と分散過程 σ_ϕ^2 に関して次式を導いている。

$$\begin{aligned} d\mu_\phi &= \{c_1(\omega)\mu_\phi + c_2(\omega)\}d\omega \quad (3) \\ d(\sigma_\phi^2) &= (2c_1(\omega) + \sigma_1^2(\omega))\sigma_\phi^2 d\omega \\ &\quad + \{2(c_2(\omega) + \sigma_1(\omega)\sigma_2(\omega))\mu_\phi + \sigma_2^2(\omega)\}d\omega \quad (4) \end{aligned}$$

このうち式(3)が正しいことには疑問の余地がない。しかしながら、討議者の見解では、式(4)は次式で置き換えられるべきである。

$$d(\sigma_\phi^2) = 2c_1(\omega)\sigma_\phi^2 d\omega \quad (5)$$

式(1)から式(5)の導出は比較的容易であるが、本稿の本質に関わる点であるため、以下に少し詳しく説

明する。一般に

$$d(\phi^2) = (\phi + d\phi)^2 - \phi^2 = 2\phi d\phi + d\phi^2 \quad (6)$$

であるが、ここでは

$$d\phi^2 \ll d\phi \quad (7)$$

とみなすことができるため、 $d\phi^2$ の項を省略すると

$$d(\phi^2) = 2\phi d\phi \quad (8)$$

となる。なお式(7)は本稿の本質に関わる重要な点であるため後段で詳述する。式(1)(8)より

$$\begin{aligned} d(\phi^2) &= 2\phi\{c_1(\omega)\phi + c_2(\omega)\}d\omega \\ &\quad + 2\phi\{\sigma_1(\omega)\phi + \sigma_2(\omega)\}dW \quad (9) \end{aligned}$$

が得られる。ここで、式(9)の両辺の平均をとり、 dW が平均値0の独立増分であることを考慮すると、

$$\begin{aligned} d(\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2) &= 2c_1(\omega)(\sigma_\phi^2 + \mu_\phi^2)d\omega \\ &\quad + 2c_2(\omega)\mu_\phi d\omega \quad (10) \end{aligned}$$

が得られる。一方、式(8)を導いたのと同様に

$$d(\mu_\phi^2) = 2\mu_\phi d\mu_\phi \quad (11)$$

が得られ、これと式(3)より

$$d(\mu_\phi^2) = 2c_1(\omega)\mu_\phi^2 d\omega + 2c_2(\omega)\mu_\phi d\omega \quad (12)$$

が得られる。最後に式(10)から式(12)を引けば式(5)が得られる。

以上の過程で重要な役割を果たしている式(7)について以下に詳しく述べる。

式(7)が成立しない場合、すなわち $d\phi^2$ が $d\phi$ に対して無視できない場合の確率微分方程式に関する公式として伊藤の公式¹⁾がある。伊藤の公式では、確率過程が

$$d\phi = A d\omega + B dW \quad (13)$$

で与えられるとき、任意の関数 $f(\omega, \phi)$ の微分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} d\phi^2 \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial \omega} + \frac{\partial f}{\partial \phi} A + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} B^2 \right\} d\omega + \frac{\partial f}{\partial \phi} B dW \quad (14) \end{aligned}$$

この式は、文献¹⁾の式(9.6.1)と(9.6.4)のノーテーションを本稿に合わせて調整したものである。この式で

$$f(\omega, \phi) = \phi^2 \quad (15)$$

とにおいて変形すれば, もとの論文で著者が示した式(4)が得られる. ただし, 伊藤の公式の前提についてここで少し考えてみたい. 式(14)は本質的にはテイラー展開であるが(文献¹⁾のp.204), 通常のテイラー展開では高次の微少量として無視される $d\phi^2$ が残されているのが特徴である. この項が残されているのは, 伊藤の公式では dW が $\sqrt{d\omega}$ 程度のオーダーであることを前提としているため, dW^2 が(従って $d\phi^2$ も) $d\omega$ のオーダーとなり, $d\omega$ を0に収束させるとき, dW^2 を高次の微少量として無視することができないからである(文献¹⁾のp.205). 以上が伊藤の公式の前提である.

しかしながら, 本論文で対象とする地震動の位相または群遅延時間の場合はどうであろうか. 本論文の dW の分散は先に述べたように $d\omega S_\xi^2$, 標準偏差は $\sqrt{d\omega} S_\xi$ である. これだけを見ると形式的に, dW は $\sqrt{d\omega}$ のオーダーとなり, 伊藤の公式は適用できそうに見える. しかしながら, 上式の S_ξ はもともと

$$S_\xi = \sigma_\xi \sqrt{d\omega} \quad (2) \text{再掲}$$

として定義された量であり, S_ξ 自体が $d\omega$ に依存する. ここで想起すべきなのは, σ_ξ は群遅延時間の標準偏差であり, 地震動の継続時間と対応付けられた物理的な量であるから²⁾³⁾, 人工的に決められたパラメータである $d\omega$ に依存すべきではないという点である. 従って, S_ξ^2 が $d\omega$ の1乗に比例することになり, dW は $d\omega$ 程度のオーダーとなるから, 伊藤の公式の適用の前提から外れることになる.

以上の検討から, 結論として, 本論文の第4章に示された3本の式のうちの第3式(すなわち本稿での式(4))は, 本稿での式(5)に置き換えられるべきである. 同時に, dW は $d\omega$ 程度のオーダーとなるべきであるとの副次的な結論が得られた.

参考文献

- 1) 松原望: 入門確率過程, 東京図書, 2003.
- 2) 和泉正哲, 勝倉裕: 地震動の位相情報に関する基礎的研究, 日本建築学会構造系論文集, 第 327 号, pp.20-26, 1983.
- 3) 佐藤忠信, 室野剛隆, 西村昭彦: 観測波に基づく地震動の位相スペクトルのモデル化, 土木学会論文集, No.640/I-50, pp.119-130, 2000.

(2014. 11. 18 受付, 2015. 3. 3 受理)