確率弾塑性モデルを用いた履歴特性に対する 地盤物性の不確実性の影響評価

羽場 一基¹・堀田 渉²・園部 秀明³・畑 明仁⁴・渡辺 和明⁵・堀 宗朗⁶

¹正会員 大成建設株式会社 原子力本部 (〒 163-0606 東京都新宿区西新宿 1-25-1)
E-mail: hb-kzm00@pub.taisei.co.jp

²正会員 大成建設株式会社 原子力本部 (〒 163-0606 東京都新宿区西新宿 1-25-1)
E-mail: ht-wtr00@pub.taisei.co.jp

³正会員 大成建設株式会社 原子力本部 (〒 163-0606 東京都新宿区西新宿 1-25-1)
E-mail: snbhda00@pub.taisei.co.jp

⁴正会員 大成建設株式会社 技術センター (〒 245-0051 神奈川県横浜市戸塚区名瀬町 344-1)
E-mail: hata@ce.taisei.co.jp

⁵正会員 大成建設株式会社 原子力本部 (〒 163-0606 東京都新宿区西新宿 1-25-1)
E-mail: kwatanab@ce.taisei.co.jp

⁶正会員 東京大学 地震研究所 (〒 113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)
E-mail: hori@eri.u-tokyo.ac.jp

本論文では、スペクトル展開を用いた確率リターンマッピングアルゴリズムによる確率弾塑性モデルを非排水粘土の応力-歪関係に適用し、地盤物性の不確実性が履歴特性に与える影響を評価した。その結果、弾塑性モデルを確率空間へ拡張することで、単純な弾完全塑性 von Mises モデルを用いた場合でも、現実に近い履歴特性を評価できることがわかった。さらに、地盤物性の不確実性が応答場に与える影響を計算することで、動的変形特性の不確実性を評価することができた。

Key Words: *elasto-plasticity, stochastic modeling, soil uncertainty, return mapping algorithm, hysteresis loop, dynamic deformation characteristics*

1. はじめに

国内外の設計基準に対する性能設計法及び信頼性設計法の導入や、国内の原子力発電所を対象とした確率論的リスク評価の義務付け等、設計条件の不確実性を確率論的にモデル化し構造物の安全性やリスクを合理的に評価する取り組みが進んでいる。特に、土木構造物の確率論的耐震安全性評価においては、地盤物性の不確実性の取り扱いが重要な課題となっている。

確率論的な評価に用いられる手法としては、地盤物性等の不確実パラメータを確率的な乱数として与え、多数回の計算を行うことにより解のばらつきを評価するモンテカルロシミュレーション（以下、MCS）が一般的である。MCSは極めて汎用的で解析手法に因らず適用できるが計算負荷が高いという課題がある。その代替手法の候補として、スペクトル確率有限要素法¹⁾（以下、SSFEM）が挙げられる。SSFEMでは、不確実性を考慮する確率変数にスペクトル展開を適用することで、一回の計算で応答場のばらつきを評価することが可能となるため、計算負荷の軽減が期待できる。しかし、材料非線形性の確率論的な取り扱いが容易ではないため、SSFEMを非線形問題へ適用した例は少ない。

非線形SSFEMの例の一つとして、Anders and Horiによる非線形SSFEM^{2),3)}がある。この非線形SSFEMはヤング率の不確実性に対して bounding medium 理論⁴⁾を適用したもので、確率モデルの挙動の上限と下限を効率的に評価できる。しかし、材料の降伏は決定論的な取り扱いがなされており、確率的な降伏に伴う応答場のばらつきを定量的に評価することは難しい。そのため、物性場のばらつきを考慮した確率的な降伏を評価するための確率弾塑性モデルの開発が行われている。

Jeremicらは応力の確率分布を応力確率空間上の移流拡散方程式で与える Fokker-Planck-Kolmogorov 方程式（以下、FPK 方程式）を用いて評価する確率弾塑性モデル^{5)~10)}を提案し、非線形SSFEMに適用した¹¹⁾。このモデルでは詳細な確率分布を計算可能であるが、全積分点上で FPK 方程式を評価する必要があるため、計算コストが非常に大きいという課題がある。さらに、確率分布を確率空間上の移流拡散として評価することから、ヤング率や材料強度等の地盤物性の不確実性が応答場に与える影響を独立に評価することは困難である。

そのような課題を解決するため、筆者らは材料の降伏を確率的に取り扱い、応力の期待値と分散を評価するためのスペクトル確率リターンマッピングアルゴリ

ズム（以下，SSRMA）を提案した^{12),13)}。SSRMA は降伏における応力更新手法であるリターンマッピングアルゴリズムに対して，1次のスペクトル展開を適用した確率弾塑性モデルである。SSRMAでは，降伏に伴う応答場の期待値と分散を効率よく評価することができ，ヤング率や材料強度のばらつきが応答場に与える影響を定量的に評価できる。

近年，確率弾塑性モデルを地盤の非線形特性の評価に適用することが提案されている¹⁴⁾。この評価は，地盤の非線形特性が地盤を構成する様々な土粒子の平均挙動で与えられるという解釈に基づく。地盤は様々な材料強度を持つ土粒子で構成されており，歪が与えられると，土粒子の一部は弾性状態で，一部は降伏し塑性状態となる。その結果，土粒子の平均挙動として与えられる地盤の非線形特性には，小さい歪レベルから大きい歪レベルまでなめらかな非線形特性が現れる。このような解釈に基づけば，確率弾塑性モデルを用いて，土粒子の物性のばらつきを考慮した確率的な降伏を評価することで，簡単な構成則から現実的な地盤の非線形特性が得られる可能性がある。実際，Settらは，FPK方程式による確率弾塑性モデルを非排水粘土の動的変形特性の評価に適用し，土粒子のせん断弾性係数とせん断強度のばらつきを考慮することで，現実に近い剛性や減衰を評価できることを示した¹⁴⁾。しかし，単純なFPK方程式による確率弾塑性モデルでは，せん断弾性係数とせん断強度のばらつきが応答場に与える影響を独立に評価できないため，動的変形特性の不確実性を評価できていない。そこで，本論文では，SSRMAを用いて非排水粘土に対する履歴曲線及び動的変形特性を数値解析的に評価することで，確率弾塑性モデルを用いた地盤の履歴特性評価の有効性と土粒子のせん断弾性係数及びせん断強度のばらつきが履歴特性に与える影響を整理する。

本論文の構成は以下の通りである。2章で，スペクトル展開を用いた確率リターンマッピングアルゴリズムの概要を示す。次に，3章で，履歴特性の評価に用いるせん断弾性係数 G_0 と非排水せん断強度 S_u を既存の標準貫入試験の結果を用いて整理する。その後，動的変形試験を想定した数値実験を実施し，履歴曲線，剛性 $G/G_0 - \gamma$ 関係及び減衰 $h - \gamma$ 関係の評価し，地盤を構成する土粒子のせん断弾性係数とせん断強度のばらつきによる影響を整理する。

2. スペクトル展開を用いた確率リターンマッピングアルゴリズムの概要

ここでは，降伏における応力更新手法であるリターンマッピングアルゴリズムを整理した上で，筆者らに

図-1 陰的弾性予測子/リターンマッピングアルゴリズムの評価フロー

より提案されたスペクトル展開を用いた確率リターンマッピングアルゴリズム^{12),13)}の概要を示す。

(1) リターンマッピングアルゴリズムの整理

塑性流れ理論では，材料が降伏する基準として，相当応力 σ_{eq} と降伏応力 σ_Y を用いた降伏関数

$$f(\sigma, \lambda) = \sigma_{eq}(\sigma, \lambda) - \sigma_Y(\lambda) \quad (1)$$

を定義し，以下の制約条件により降伏における応力を更新する。

$$d\lambda \geq 0, \quad f \leq 0, \quad d\lambda f = 0 \quad (2)$$

ここで， σ は応力， λ は塑性乗数である。これらの時間積分を解く手法の一つが，陰的弾性予測子/リターンマッピングアルゴリズムである¹⁵⁾。図-1に陰的弾性予測子/リターンマッピングアルゴリズムの評価フローを示す。陰的弾性予測子/リターンマッピングアルゴリズムでは，各時間ステップで歪増分 $\Delta \epsilon$ が与えられた時，弾性であると仮定して弾性予測応力 σ_{trial} を評価する。

$$\sigma_{trial} = \sigma + D : \Delta \epsilon \quad (3)$$

ここで， D は剛性テンソルである。弾塑性体の場合は，この弾性予測応力が正しい解であるとは限らない。そのため，弾性予測応力による降伏関数 $f_{trial} = f(\sigma_{trial}, \lambda)$ が塑性論的許容条件

$$f_{trial} \leq 0 \quad (4)$$

を満たす場合は弾性予測応力を真の解とし，満たさない場合は降伏したと判断し，塑性整合条件

$$f(\sigma, \lambda) = 0 \quad (5)$$

図-2 降伏関数の値の確率分布に関する変化 ($f_{\text{trial}}(\omega)$ 及び $f(\omega)$)

を満たすように、陰的に塑性乗数 $\Delta\lambda$ を求め、流れ則に基づき応力を更新する。

$$\sigma = \sigma_{\text{trial}} - \Delta\lambda \mathbf{D} : \partial_{\sigma} f(\sigma, \lambda) \quad (6)$$

ここで、 ∂_{σ} は σ による偏微分を表しており、関連流れ則を適用した。

次に、物性場が確率分布を持つ場合を考えると、応答場である歪や応力が確率分布を持つため、降伏関数の値も確率分布を持つ。例えば、弾性予測応力による降伏関数の値 $f_{\text{trial}}(\omega)$ が正規分布をなす場合、 $f_{\text{trial}}(\omega)$ は図-2の赤点線のような分布となる。ここで、 ω は標本点を表す。この時、 $f_{\text{trial}}(\omega)$ の確率分布の一部は $f_{\text{trial}}(\omega) \leq 0$ で弾性域となるが、残りは $f_{\text{trial}}(\omega) > 0$ で塑性域となる。そのため、リターンマッピング後の降伏関数の値 $f(\omega)$ は、 $f_{\text{trial}}(\omega) \leq 0$ の領域はその確率分布を保持するが、 $f_{\text{trial}}(\omega) > 0$ の領域では $f(\omega) = 0$ となるように応力が更新される。その結果、リターンマッピング後の降伏関数の値の確率分布は、図-2の青線のように、 $f(\omega) = 0$ でデルタ関数形状を持つ分布

$$\text{PDF}[f(\omega)] = \begin{cases} \text{PDF}[f_{\text{trial}}(\omega)]|_{f_{\text{trial}}=f} & (f(\omega) < 0) \\ \bar{C}[0, f_{\text{trial}}] & (f(\omega) = 0) \\ 0 & (f(\omega) > 0) \end{cases} \quad (7)$$

となる。PDF[$f_{\text{trial}}(\omega)$] は $f_{\text{trial}}(\omega)$ の確率密度関数、 $\bar{C}[x, f_{\text{trial}}]$ は相補累積分布関数である。

(2) スペクトル確率リターンマッピングアルゴリズム

ここでは、物性場が確率分布を持つ時、応答場に1次のスペクトル展開を適用することで確率的な降伏を評価する SSRMA の概要を示す。

a) スペクトル展開の整理

物性場が確率分布を持つ場合、全ての応答場が確率分布を持つ。MCS では多数のサンプリングによりその確率分布を評価するが、スペクトル展開では確率分布を確

率空間上のスペクトル成分（固有分布）の級数和として表現する。SSFEM では、Karhunen-Loeve 展開^{16),17)}（以下、KL 展開）と Polynomial Chaos 展開^{18),19)}（以下、PC 展開）の二つのスペクトル展開を用いる。ここで、KL 展開は地盤物性の空間的相関を表現するための展開であり、PC 展開は応答場の複雑な確率分布を表現するための展開である。詳細は付録 I 及び付録 II に記載することとし、以下では最低次を例にとりスペクトル展開を説明する。

ヤング率 E と降伏応力 σ_Y が正規分布をなす独立な確率変数である場合を考える。この時、1 次の KL 展開を適用すれば、 $E(\omega)$ 及び $\sigma_Y(\omega)$ は期待値と分散を用いて以下のようにスペクトル展開できる。

$$E(\omega) = \langle E \rangle + \sqrt{\text{VAR}(E)}\xi_1(\omega) \quad (8)$$

$$\sigma_Y(\omega) = \langle \sigma_Y \rangle + \sqrt{\text{VAR}(\sigma_Y)}\xi_2(\omega) \quad (9)$$

ここで、 $\langle X \rangle$ 及び $\text{VAR}(X)$ は確率変数 $X(\omega)$ の期待値及び分散を表す。また、 $\xi_1(\omega)$ 及び $\xi_2(\omega)$ は期待値 0 で分散 1 の独立な正規確率変数であり、確率空間上の固有関数である。0 次のスペクトル展開（第一項）は確率変数の期待値であり決定論的な取り扱いとなるが、1 次以上のスペクトル展開（第二項）を考慮することで確率変数として取り扱うことができる。

一方、変位 $\mathbf{u}(\omega)$ 等の応答場は物性場をパラメータとした行列方程式の解として与えられるため、 $E(\omega)$ 及び $\sigma_Y(\omega)$ 両方の不確実性の影響を受ける。変位 $\mathbf{u}(\omega)$ 等に対して 1 次の PC 展開を適用すると、以下のようにスペクトル展開される。

$$\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)}\xi_1(\omega) + \mathbf{u}^{(2)}\xi_2(\omega) \quad (10)$$

ここで、応答場に 1 次の PC 展開を適用することは、以下の関係を用いて応答場の期待値 $\langle \mathbf{u} \rangle$ と分散 $\text{VAR}(\mathbf{u})$ を評価することに対応する。

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{u}^{(0)}, \quad \text{VAR}(\mathbf{u}) = \left(\mathbf{u}^{(1)} \right)^2 + \left(\mathbf{u}^{(2)} \right)^2 \quad (11)$$

式 (10) からわかるように、スペクトル展開した応答場は各物性場の確率空間上の固有関数 $\xi_i(\omega)$ の重ね合わせとして表現されるため、各物性場の不確実性からの寄与がそれぞれ独立に考慮される。式 (8)～式 (10) のように確率変数に対してスペクトル展開を適用する場合、確率変数の確率的特性は確率空間上の固有関数 $\xi_i(\omega)$ により決定される。また、 $\xi_i(\omega)$ は以下の直交性を持つ。

$$\langle \xi_i(\omega)\xi_j(\omega) \rangle = \delta_{ij} \quad (12)$$

b) スペクトル確率リターンマッピングアルゴリズムの整理

応答場に PC 展開を適用する場合、応力 $\sigma(\omega)$ や降伏関数 $f(\omega)$ も PC 展開される。PC 展開次数を 0 次とした場合は、応力や降伏関数の期待値のみを考慮し、降

伏を決定論的に取り扱うことに対応する．降伏において種々の地盤物性の不確実性を考慮するためには，より高次の PC 展開を考慮する必要がある．SSRMA では，確率空間への最小限の拡張として，降伏に関係する応力，塑性乗数及び降伏関数に 1 次の PC 展開を適用する．すると，応力 $\sigma(\omega)$ ，塑性乗数 $\lambda(\omega)$ 及び降伏関数 $f(\omega)$ は以下のように与えられる．

$$\sigma(\omega) = \sum_{i=0}^M \sigma^{(i)} \xi_i(\omega) \quad (13)$$

$$\lambda(\omega) = \sum_{i=0}^M \lambda^{(i)} \xi_i(\omega) \quad (14)$$

$$f(\omega) = \sum_{i=0}^M f^{(i)} \xi_i(\omega) \quad (15)$$

ここで， M は独立な正規確率変数の数であり， E と σ_Y の KL 展開次数をそれぞれ 1 次とする場合には $M = 2$ となる．また， $\xi_0 = 1$ をダミー変数として定義した．

確率変数をスペクトル展開する場合，リターンマッピングアルゴリズムにおける式 (3) 及び式 (6) は，スペクトル展開係数に対する関係式に拡張される．式 (12) の $\xi_i(\omega)$ の直交性より，式 (3) 及び式 (6) に ξ_i を乗じ期待値を取れば，弾性予測応力の PC 展開係数に対する関係式は

$$\sigma_{\text{trial}}^{(i)} = \sigma^{(i)} + \langle \xi_i(\omega) \mathbf{D}(\omega) : \Delta \epsilon(\omega) \rangle \quad (16)$$

となり，更新する応力の PC 展開係数の関係式は以下で与えられる．

$$\sigma^{(i)} = \sigma_{\text{trial}}^{(i)} - \langle \xi_i(\omega) \Delta \lambda(\omega) \mathbf{D}(\omega) : \partial \sigma f(\omega) \rangle \quad (17)$$

ヤング率や降伏応力等の物性場が正規分布をなす場合の確率的な降伏では，例えば図-2 からわかる通り，降伏関数の値が 0 以上となる確率が常に存在するため，弾塑性体は常に一定の確率で降伏が生じる．従って，確率変数にスペクトル展開を適用する場合，降伏を判断する塑性論的許容条件は常に成立しないため，本条件を設定する必要はない．

一方，塑性整合条件は適切に設定する必要がある．リターンマッピング後の降伏関数の値の確率分布は，図-2 に示す通りに， $f_{\text{trial}}(\omega) > 0$ の領域はすべて $f(\omega) = 0$ にマッピングされるため，図-2 の青線のような分布となる．1 次の PC 展開を適用する事は期待値と分散のみを評価することに対応するため，SSRMA では降伏関数 $f(\omega)$ の期待値と分散を図-2 の青線のそれに等しくなるように応力を更新することになる．その結果，塑性整合条件は式 (11) の PC 展開係数と期待値及び分散の関係より，以下のように拡張される．

$$f^{(0)} - \langle f \rangle = 0 \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^M \left(f^{(i)} \right)^2 - \text{VAR}(f) = 0 \quad (19)$$

図-3 降伏関数の値の確率分布に関する変化 ($f_{\text{trial}}(\omega)$, $f(\omega)$ 及び正規分布で近似した $f(\omega)$)

ここで，リターンマッピング後の降伏関数の期待値 $\langle f \rangle$ と分散 $\text{VAR}(f)$ は，式 (7) より以下で求められる．

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^0 f_{\text{trial}} \text{PDF}[f_{\text{trial}}] df_{\text{trial}} \quad (20)$$

$$\text{VAR}(f) = \int_{-\infty}^0 f_{\text{trial}}^2 \text{PDF}[f_{\text{trial}}] df_{\text{trial}} - \langle f \rangle^2 \quad (21)$$

さらに， $\xi_i(\omega)$ が独立な正規確率変数であり， $f^{(i)}$ と $f_{\text{trial}}^{(i)}$ の関係は任意の値に対して定義されることを考慮すれば，降伏関数 $f(\omega)$ の PC 展開係数は以下で与えられる^{12),13)}．

$$f^{(i)} = \begin{cases} \langle f \rangle & (i = 0) \\ \sqrt{\frac{\text{VAR}(f)}{\text{VAR}(f_{\text{trial}})}} f_{\text{trial}}^{(i)} & (i \neq 0) \end{cases} \quad (22)$$

この確率空間に拡張された塑性整合条件が決定論的なリターンマッピングアルゴリズムと SSRMA で大きく異なる点である．これは確率分布の観点では図-3 のように整理できる．物性場が正規分布をなす場合，SSRMA で降伏関数の期待値と分散を評価することは，リターンマッピング後の降伏関数 $f(\omega)$ (図-3 の青線) を期待値と分散が等しい正規分布 (図-3 の緑線) で近似することに対応する．

図-4 に SSRMA の評価フローを示す．ここで，塑性論的許容条件を点線で示しているが，確率的な降伏では降伏関数の値が 0 以上となる確率が常に存在することから，評価の際に条件判定を行わない．図-4 からわかる通り，SSRMA の評価フローは，式 (16) 及び式 (17) のように PC 展開係数に対する計算が必要であるものの，図-1 の陰的弾性予測子/リターンマッピングアルゴリズムの評価フローと基本的な流れは同じである．唯一異なるのは，塑性論的整合条件において， $f = 0$ ではなく，期待値 $\langle f \rangle$ ，分散 $\text{VAR}(f)$ の正規分布となるように応力を更新する点である．SSRMA はリターンマッピングアルゴリズムを確率空間へ最小限拡張したものであり，SSRMA の PC 展開係数を 0 次とすれば SSRMA は完全に決定論的なリターンマッピングアルゴリズム

図-4 SSRMA の評価フロー

に一致する。

SSRMA の妥当性を確認するため、せん断歪 γ を決定論的に増加させたときの応力-歪関係を評価し、MCS の結果と比較する。載荷除荷サイクルを含む SSRMA の詳細な検証については、筆者らによって示されている¹³⁾。ここでは簡単のため、材料の降伏基準は 1 次元弾完全塑性 von Mises 降伏基準を用いる。降伏関数はせん断応力 τ と降伏応力 σ_Y を用いて以下で与えられる。

$$f = \sqrt{3}|\tau| - \sigma_Y \quad (23)$$

この時、決定論的な結果はバイリニア型の応力歪関係となる。解析物性値として、せん断弾性係数と降伏応力を正規分布をなす確率変数とし、せん断弾性係数の期待値及び変動係数を 70MPa 及び 30%，降伏応力の期待値及び変動係数を 0.4MPa 及び 20% とする。また、比較対象とする MCS の計算は、せん断弾性係数と降伏応力の入力値を確率分布に従って 5000 回発生させて計算する。図-5 に SSRMA 及び MCS を用いて評価した応力-歪関係の結果を示す。図-5 には期待値及び期待値 ± 標準偏差に加え、参考のため、せん断弾性係数及び降伏応力の期待値を用いて評価した決定論的な結果を示している。これらの結果から、SSRMA と MCS の期待値及び期待値 ± 標準偏差の結果はよく一致していることがわかる。このように、SSRMA は降伏に関係する応答場の期待値と分散のみを評価するモデルであるが、

 図-5 SSRMA による応力-歪関係の評価結果 ($G_0 = 70\text{MPa}$ (変動係数 30%), $\sigma_Y = 0.4\text{MPa}$ (変動係数 20%))

MCS と比べ期待値と分散を効率よく評価することが可能であることがわかる。

図-5 に示した SSRMA と MCS の期待値の応答は、決定論的な結果と比べて、小さい歪レベルからなめらかな非線形性が現れていることがわかる。もし、せん断弾性係数と降伏応力のばらつきを地盤物性の空間的なばらつきではなく、地盤を構成する土粒子の物性のばらつきとして考えれば、図-5 の結果は土粒子の物性のばらつきによる確率的な降伏を評価したことに対応する。このとき、図-5 の期待値は土粒子の平均挙動を表しており、実験で得られる地盤の非線形特性に対応すると解釈できる。

3. 履歴特性の評価

ここでは、地盤は様々な土粒子から構成され、地盤の挙動はそれらの土粒子の平均挙動として現れるという考えに基づき、SSRMA を用いて非排水粘土の履歴特性を評価する。まず、既存の非排水粘土の試験結果よりせん断弾性係数 G_0 及び非排水せん断強度 S_u を整理し、SSRMA により非排水粘土の履歴曲線及び動的変形特性を評価する。

(1) 数値実験の方法

履歴特性を評価するため、SSRMA を用いて動的変形試験を想定した数値実験を実施する。本数値実験では、地盤を構成する土粒子の物性として、せん断弾性係数とせん断強度のばらつきを考慮し、SSRMA により確率的な降伏を評価する。このとき、応答場の期待値は土粒子の平均挙動を表しており、地盤の挙動に対応すると考えられる。具体的な計算手順としては、せん断歪 γ を最大値 $\gamma = \pm\gamma_{\max}$ の間で決定論的に変化させて繰り返し載荷し、応力-歪関係の履歴曲線を計算する。その後、動的変形試験と同様に、 $\gamma_{\max}$ を段階的に増加させ、それぞれの履歴曲線の結果から動的変形

図-6 せん断弾性係数 G_0 の N 値の関係 (測定値²⁰⁾, 期待値²⁰⁾, 期待値 ± 標準偏差)

図-7 非排水せん断強度 S_u と N 値の関係 (測定値²⁰⁾, 期待値²⁰⁾, 期待値 ± 標準偏差)

特性 (せん断剛性比 G/G_0 及び減衰 h の歪依存性) を評価する. ここで, Sett らと同様¹⁴⁾ に, 試験体の形状は考慮せず, 局所的な数値解析により土粒子の物性のばらつきの影響のみを評価する. また, 評価手法の有効性と土粒子の物性のばらつきが履歴特性に与える影響を評価することを目的とするため, 土粒子の降伏モデルは弾完全塑性 von Mises モデルを用いる. このとき, 弾完全塑性 von Mises モデルの降伏関数は式 (23) で与えられる. 降伏応力 σ_Y は非排水せん断強度 S_u と $\sigma_Y = \sqrt{3}S_u$ の関係にある. 数値解析に必要な物性値はせん断弾性係数 G_0 と非排水せん断強度 S_u の2変数であり, 必要な入力情報はそれらの期待値及び分散または変動係数となる.

(2) 地盤物性の不確実性の評価

ここでは, SSRMA の入力条件であるせん断弾性係数 G_0 及び非排水せん断強度 S_u の期待値と変動係数を整理する. 地盤を構成する土粒子の物性のばらつきを直接評価することは困難であるため, Sett らの評価方法¹⁴⁾ に倣い, 複数の試験体から得られる物性のばらつきが地盤を構成する土粒子の物性のばらつきに等しいとして評価する. 本論文では Hara ら²⁰⁾ によって整理された, 沖積粘土の標準貫入試験の N 値とせん断弾性係数 G_0 及び非排水せん断強度 S_u の関係を用いる.

$$G_0 = 158N^{0.668} \text{ (kg/cm}^2\text{)} \quad (24)$$

$$S_u = 0.297N^{0.720} \text{ (kg/cm}^2\text{)} \quad (25)$$

測定値は不確実性を伴うことが通常であるが, 決定論的解析では工学的判断により, 式 (24) 及び式 (25) の関係式をそのまま用いる. 一方, 確率論的解析では, 式 (24) 及び式 (25) の関係式は期待値として用いられ, それらのばらつきも考慮する必要がある. 図-6 及び図-7 に Hara ら²⁰⁾ によって整理された N 値とせん断弾性係数 G_0 及び非排水せん断強度 S_u の関係の測定値と関係式を示す. ここで, 図-6 及び図-7 には, 測定値から評価

した期待値 ± 標準偏差の結果も記載している. このとき, 関係式に対する分散 $\text{VAR}_e(G_0)$ 及び $\text{VAR}_e(S_u)$ は以下のように評価される.

$$\text{VAR}_e(G_0) = 0.162^2 \quad (26)$$

$$\text{VAR}_e(S_u) = 0.152^2 \quad (27)$$

さらに, 物性場の不確実性には, 上記で評価した関係式の不確かさ δ_e の他に, 実験時の誤差, つまり機材, 手順, 観測者による不確実性 δ_e も大きく影響することが知られている^{21)~23)}. Phoon and Kulhawy はこれらの不確実性を考慮するため, 確率論的な形式の関係式

$$G_0 = 158(N + \delta_e(G_0))^{0.668} 10^{\delta_e(G_0)} \quad (28)$$

$$S_u = 0.297(N + \delta_e(S_u))^{0.720} 10^{\delta_e(S_u)} \quad (29)$$

を提案し, 各物性場の変動係数を以下のように評価している²¹⁾.

$$\text{COV}^2(G_0) = 0.668^2 \text{COV}_e^2(G_0) + (\log 10)^2 \text{VAR}_e(G_0) \quad (30)$$

$$\text{COV}^2(S_u) = 0.720^2 \text{COV}_e^2(S_u) + (\log 10)^2 \text{VAR}_e(S_u) \quad (31)$$

ここで, $\text{VAR}_e(G_0)$ 及び $\text{VAR}_e(S_u)$ は式 (26) 及び式 (27) で評価した関係式に対する分散であり, COV_e は観測誤差の変動係数である. Phoon and Kulhawy によれば, 観測誤差の変動係数 COV_e は標準貫入試験の場合 15% ~ 45% であると整理されている^{22),23)}. また, Sett らは, せん断強度試験は多くの不確定要素を含むことから, 確率弾塑性モデルを用いた履歴特性の評価において, G_0 及び S_u のばらつきをそれぞれ 15% 及び 45% に設定している¹⁴⁾. 本論文でも Sett ら¹⁴⁾ に倣い, G_0 及び S_u のばらつきとして, それぞれ 15% 及び 45% を用いる. すると, G_0 及び S_u の変動係数は以下のように評価できる.

$$\text{COV}(G_0) = 0.386 \quad (32)$$

$$\text{COV}(S_u) = 0.484 \quad (33)$$

表-1 解析物性値

Parameter	Mean [MPa]	COV [%]
Elastic shear modulus G_0	133	38.6%
Yield stress σ_Y	0.512	48.4%

a) 期待値及び決定論の結果

 b) 期待値及び期待値 ± 0.5 標準偏差

 図-8 荷重除荷サイクルにおける応力-歪関係の比較 ($\gamma = \pm 0.5\%$)

(3) 履歴曲線の評価

ここでは、繰り返し荷重により評価した履歴曲線を整理する。解析物性値は標準貫入試験の N 値 $N = 25$ の場合の物性値とし、その値は表-1 の通りである。

図-8 にせん断歪を $\gamma = \pm 0.5\%$ で繰り返し荷重した場合の履歴曲線の結果を示す。ここで、図-8 a) には SSRMA の期待値と決定論的な結果を示している。決定論的な結果はせん断弾性係数 G_0 とせん断強度 S_u の期待値を用いて評価した結果である。また、図-8 b) には SSRMA の期待値と期待値 ± 0.5 標準偏差の結果を示している。図-8 a) からわかる通り、決定論的な結果はバイリニア型の履歴曲線を示す。一方、SSRMA の期待値応答は、せん断弾性係数及び非排水せん断強度の二つのパラメータのばらつきを考慮した弾完全塑性モデルであるにもかかわらず、小さい歪レベルから非線形特性が現れている。さらに、図-8 b) に示す通り、

 図-9 履歴曲線の評価結果 ($\gamma = \pm 0.5\%$)

図-10 履歴曲線の評価結果 (非対称荷重除荷サイクル)

SSRMA を用いることで期待値だけでなくそのばらつきも評価できる。これらの非線形特性は、地盤を構成する土粒子のせん断強度とせん断弾性係数のばらつきの影響である。地盤を構成する土粒子の物性のばらつきを考慮すると、常に応力状態の一部が降伏し、残りは弾性状態となるため、小さい歪レベルから大きい歪レベルまでなめらかな非線形特性が現れる。図-8 のようななめらかな非線形特性は、FPK 方程式を用いた場合¹⁴⁾と同様の結果である。

次に、図-9 にせん断歪 γ を $\pm 0.5\%$ まで段階的に変化させた場合の履歴曲線を示す。さらに、図-10 にせん断歪を非対称に変化させた場合の履歴曲線を示す。これらの結果からわかるように、弾塑性モデルを確率空間へ拡張することで、土粒子の降伏モデルに単純な弾完全塑性モデルを用いた場合であっても、骨格曲線(赤点線)に沿ったなめらかな履歴曲線が得られることがわかる。また、連続的な応力状態の変化に対して応力-歪曲線の勾配が連続的に変化しており、下荷重面モデル^{24),25)}等で実現される滑らか条件^{26)~29)}を自動的に満たしている。本検討は 1 次元降伏関数を用いた検討であるが、塑性論に基づいた評価であるため、3 次元問題への適用も容易である。

 図-11 割線剛性 G の γ 依存性

 図-13 $G/G_0 - \gamma$ 関係

 図-12 割線剛性 G の変動係数と地盤物性のばらつきの影響

 図-14 $h - \gamma$ 関係

(4) 動的変形特性の評価

上記の応力-歪関係より、動的変形特性 ($G/G_0 - \gamma$ 関係及び $h - \gamma$ 関係) を評価する。

まず、図-11に割線剛性 G の γ 依存性の評価結果を示す。ここで、青線が期待値及び期待値 $\pm$ 標準偏差の結果である。また、参考のため赤点線でせん断弾性係数 G_0 とせん断強度 S_u の期待値から得られた決定論的な結果を示している。決定論的な履歴曲線はバイリニア型であり、弾性状態と塑性状態が完全に区別される。そのため、決定論的な結果は降伏点となるせん断歪 $\gamma_Y = \langle \sigma_Y \rangle / \sqrt{3} \langle G_0 \rangle = 0.22\%$ までは G_0 に等しく、降伏後はせん断歪に反比例して急激に減少していく。一方、確率弾塑性モデルの期待値は小さい歪レベルから緩やかに減少する。さらに、図-12に G の変動係数 $\text{COV}(G)$ とそれに対するせん断弾性係数 G_0 及び非排水せん断強度 S_u のばらつきからの寄与 $C_{G_0}(G)$ 及び $C_{S_u}(G)$ を示す。ここで、 G の変動係数 $\text{COV}(G)$ はそれぞれの物性場からの寄与 $C_{G_0}(G)$ 及び $C_{S_u}(G)$ の二乗和平方根で与えられる。

$$\text{COV}(G) = \sqrt{C_{G_0}^2(G) + C_{S_u}^2(G)} \quad (34)$$

図-12から、小さい歪レベルでは G の変動係数 $\text{COV}(G)$ は39%程度であり、歪の増大とともに50%程度に変化

していく。この変化は、各物性場からの寄与の変化により理解できる。小さい歪レベルでは全体の分布の多くが弾性域にあり、せん断弾性係数の寄与 $C_{G_0}(G)$ が支配的であるため、 $\text{COV}(G)$ はせん断弾性係数 G_0 の変動係数程度となっている。歪が増加し降伏が進むにつれ、せん断強度の寄与 $C_{S_u}(G)$ が増大し、せん断弾性係数の寄与 $C_{G_0}(G)$ が減少していき、最終的にはせん断強度の寄与 $C_{S_u}(G)$ が支配的となる。その結果、 $\text{COV}(G)$ はせん断強度 S_u の変動係数程度の値となる。このような地盤物性のばらつきの影響は、FPK方程式を用いた確率弾塑性モデルでは評価することができず、応答場にスペクトル展開を適用するSSRMAを用いることで初めて可能となった。

次に、 $G/G_0 - \gamma$ 関係及び $h - \gamma$ 関係を評価する。ここで、繰り返し载荷時のせん断歪の最大値を $\gamma_{\max}$ とするとき、 h は履歴吸収エネルギー $\int \tau(\gamma) d\gamma$ と割線剛性による弾性歪エネルギー $\tau(\gamma_{\max})\gamma_{\max}/2$ の比を 4π で除して計算される。図-13及び図-14に $G/G_0 - \gamma$ 関係及び $h - \gamma$ 関係の評価結果を示す。ここで、青線は期待値及び期待値 $\pm$ 標準偏差の結果である。また、参考のため、決定論的な結果 (赤点線) と Vucetic and Dobry により整理された高塑性粘土の実験値³⁰⁾ (黒破線) を示している。決定論的な履歴曲線はバイリニア型であり、

 図-15 G/G_0 の変動係数と地盤物性のばらつきの影響

 図-16 h の標準偏差と地盤物性のばらつきの影響

弾性状態と塑性状態が完全に区別される。そのため、決定論的な結果は降伏点となるせん断歪 $\gamma_Y = 0.22\%$ までは G/G_0 及び h は変化せず、降伏後、 G/G_0 はせん断歪 γ に反比例して急激に減少し、 h は $2(1 - \gamma_Y/\gamma)/\pi$ で急激に増加する。一方、確率弾塑性モデルの期待値は小さい歪レベルから緩やかな変化が見られ、より現実に近い結果を示していることがわかる。このように、弾塑性モデルを確率空間に拡張することで、単純な弾完全塑性モデルを用いた場合でも、現実に近い $G/G_0 - \gamma$ 関係及び $h - \gamma$ 関係が得られることがわかる。ただし、より定量的に実験値に近い動的変形特性を求めるには、土粒子に対してより適切な降伏モデルを設定することや物性値により適切な分布を用いること等を検討する必要があると考えられる。

最後に、 $G/G_0 - \gamma$ 関係及び $h - \gamma$ 関係の不確実性を評価する。確率弾塑性モデルにおいて動的変形特性は直接計算されるものではなく、応答場である応力-歪関係を求め、その応答場の関数として導出される。せん断弾性係数とせん断強度に相関がない場合でも、各応答場の不確実性は独立ではない。そのため、応答場間の不確実性の相関を評価できなければ動的変形特性の不確実性を正しく評価することはできない。FPK 方程式を用いた確率弾塑性モデルでは物性場のばらつきの影響を分離できないため、動的変形特性の不確実性を評価できない。一方、SSRMA ではスペクトル展開を用いることで各物性場の不確実性からの寄与を計算できるため、動的変形特性の不確実性の評価が可能となる。

図-15 に $G/G_0 - \gamma$ 関係の変動係数 $\text{COV}(G/G_0)$ とそれに対するせん断弾性係数 G_0 及び非排水せん断強度 S_u からの寄与 $C_{G_0}(G/G_0)$ 及び $C_{S_u}(G/G_0)$ を示す。ここで、 $\text{COV}(G/G_0)$ 、 $C_{G_0}(G/G_0)$ 及び $C_{S_u}(G/G_0)$ は、 $\xi_i(\omega)$ の直交性を用いることで、以下の関係式により評

価できる。

$$\text{COV}(G/G_0) = \sqrt{C_{G_0}^2(G/G_0) + C_{S_u}^2(G/G_0)} \quad (35)$$

$$C_{G_0}(G/G_0) = \frac{C_{G_0}(G)}{\langle G \rangle} - \frac{\sqrt{\text{VAR}(G_0)}}{\langle G_0 \rangle} \quad (36)$$

$$C_{S_u}(G/G_0) = \frac{C_{S_u}(G)}{\langle G \rangle} \quad (37)$$

ここで、式 (36) 及び式 (37) の第一項は割線剛性 G の不確実性、式 (36) の第二項はせん断弾性係数 G_0 の不確実性に対応する。また、図-16 に $h - \gamma$ 関係の標準偏差 $\sqrt{\text{VAR}(h)}$ とそれに対するせん断弾性係数 G_0 及び非排水せん断強度 S_u からの寄与 $C'_{G_0}(h)$ 及び $C'_{S_u}(h)$ を示す。変動係数は標準偏差を期待値で除したものであるため、期待値 $\langle h \rangle$ が 0 になると変動係数は発散する。そのため、ここでは変動係数ではなく標準偏差を示している。 $\sqrt{\text{VAR}(h)}$ 、 $C'_{G_0}(h)$ 及び $C'_{S_u}(h)$ は以下の関係式により評価できる。

$$\sqrt{\text{VAR}(h)} = \sqrt{C_{G_0}^2(h) + C_{S_u}^2(h)} \quad (38)$$

$$C'_{G_0}(h) = \langle h \rangle \left(\frac{\int \langle \tau \rangle C_{G_0}(\tau) d\gamma}{\int \langle \tau \rangle d\gamma} - C_{G_0}(\tau) |_{\gamma=\gamma_{\max}} \right) \quad (39)$$

$$C'_{G_0}(h) = \langle h \rangle \left(\frac{\int \langle \tau \rangle C_{S_u}(\tau) d\gamma}{\int \langle \tau \rangle d\gamma} - C_{S_u}(\tau) |_{\gamma=\gamma_{\max}} \right) \quad (40)$$

ここで、 $C_{G_0}(\tau(\gamma))$ 及び $C_{S_u}(\tau(\gamma))$ は応力の変動係数に対する各物性場からの寄与である。また、式 (39) 及び式 (40) の第一項は履歴吸収エネルギー $\int \tau(\gamma) d\gamma$ の不確実性、第二項は割線剛性による弾性歪エネルギー $\tau(\gamma_{\max})\gamma_{\max}/2$ の不確実性に対応する。

図-15 及び図-16 からわかる通り、 G/G_0 及び h の不確実性は歪 γ に依存して変化する。 $\text{COV}(G/G_0)$ はせん断強度からの寄与が支配的であり、歪 γ とともに増大し、一定の値へ漸近する。一方、 h の標準偏差 $\sqrt{\text{VAR}(h)}$ は小さい歪領域ではせん断強度からの影響が支配的であり、歪とともに増大するが、大きい歪領域で減少する。この大きい歪領域における $\sqrt{\text{VAR}(h)}$ の減少は、

h の定義から定性的に理解できる. h は履歴吸収エネルギー $\int \tau(\gamma) d\gamma$ と割線剛性による弾性歪エネルギー $\tau(\gamma_{\max})\gamma_{\max}/2$ の比から求められる. これらはいずれもせん断強度に関係する量であり, 降伏が進み応力状態の大部分がせん断強度になると, 分子と分母で不確実性が相殺する. その結果, $\sqrt{\text{VAR}(h)}$ は大きい歪領域で減少すると考えられる. 一方, 割線剛性 G をせん断弾性係数 G_0 で除した G/G_0 は, G_0 が弾性状態の変数であるため, そのような不確実性の相殺は起こらない.

このような動的変形特性の不確実性は, 等価線形解析や逐次非線形解析により確率論的評価を実施する場合に重要な情報となる. 等価線形解析ではせん断弾性係数 G_0 に加え, G/G_0 及び h 等に不確実性を直接設定する事になる³¹⁾. しかし, 図-15 及び図-16 に示した通り, G/G_0 及び h の不確実性は歪 γ に対して一定の値を取らないと考えられる. そのため, G/G_0 及び h の不確実性の与え方によっては非保守的な評価になり得るため, 設定の方法に注意する必要がある.

4. まとめ

本論文では, スペクトル確率リターンマッピングアルゴリズムによる確率弾塑性モデルを用いて非排水粘土の履歴特性を評価した. その結果, 弾塑性モデルを確率空間へ拡張することで, 単純な弾完全塑性モデルを用いた場合でも, より現実に近い履歴特性を評価することができた. これらの結果は, 原位置試験から得られる地盤物性値を用いて, 履歴特性を数値解析的に評価できる可能性を示唆しており, 地盤工学分野において重要であると考えられる. また, スペクトル確率リターンマッピングアルゴリズムでは地盤を構成する土粒子の物性のばらつきが応答場に与える影響を独立に評価できることから, 動的変形特性 $G/G_0 - \gamma$ 関係及び $h - \gamma$ 関係の不確実性を評価することができた. その結果, 動的変形特性の不確実性は歪と共に変化することがわかった. これらの結果は, 等価線形解析等において動的変形特性の不確実性を直接設定する際に有用な情報となると考えられる.

本検討では物性場のばらつきに対して正規分布を仮定したが, 今後, より現実的な対数正規分布を対象とした検討も必要となると考えられる. また, 地盤の試験体の形状等も含めたより詳細な履歴特性の評価には, スペクトル確率リターンマッピングアルゴリズムをスペクトル確率有限要素法に組み込み, 非線形スペクトル確率有限要素法を構築することが必要となる.

付録 I 物性場の KL 展開^{16),17)}

KL 展開は空間的相関を表現するためのスペクトル展開であり, SSFEM では物性場に適用される. ヤング率 E を空間的相関を持った確率変数とする場合, $E(\mathbf{x}, \omega)$ は期待値 $\langle E(\mathbf{x}) \rangle$ と確率成分 $\alpha(\mathbf{x}, \omega)$ に分けることができる.

$$E(\mathbf{x}, \omega) = \langle E(\mathbf{x}) \rangle (1 + \alpha(\mathbf{x}, \omega)) \quad (\text{I.1})$$

ここで, $\mathbf{x}$ は空間座標, ω は標本空間の標本点である. $E(\mathbf{x}, \omega)$ に KL 展開を用いると, 確率成分 $\alpha(\mathbf{x}, \omega)$ は以下のように展開される.

$$\alpha(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \phi_i(\mathbf{x}) \bar{\xi}_i(\omega) \quad (\text{I.2})$$

ここで, λ_i 及び ϕ_i は E の共分散関数 $C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle \alpha(\mathbf{x}_1, \omega) \alpha(\mathbf{x}_2, \omega) \rangle$ の固有値及び固有関数である.

$$\int C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \phi_i(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2 = \lambda_i \phi_i(\mathbf{x}_1) \quad (\text{I.3})$$

また, $\bar{\xi}_i(\omega)$ は期待値 0 で分散 1 の正規確率変数であり, 以下の直交性を持つ.

$$\langle \bar{\xi}_i(\omega) \bar{\xi}_j(\omega) \rangle = \delta_{ij} \quad (\text{I.4})$$

簡便のため, KL 展開次数を $\bar{M}$ とした場合の $E(\mathbf{x}, \omega)$ の KL 展開式を以下のように記載する.

$$E(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{i=0}^{\bar{M}} E^{(i)}(\mathbf{x}) \bar{\xi}_i(\omega) \quad (\text{I.5})$$

ここで, $\bar{\xi}_0 = 1$ はダミー変数であり, $E^{(0)}(\mathbf{x}) = \langle E \rangle$ 及び $E^{(i)}(\mathbf{x}) = \sqrt{\lambda_i} \phi_i(\mathbf{x}) \langle E \rangle$ とした. すると, $E(\mathbf{x}, \omega)$ の分散 $\text{VAR}(E)$ は同位置の共分散関数 $C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ を用いて,

$$\text{VAR}(E) = \langle E \rangle^2 C(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (\text{I.6})$$

で与えるため, 式 (I.4) の $\bar{\xi}_i(\omega)$ の直交性より, $\text{VAR}(E)$ とスペクトル展開係数の間には以下の関係がある.

$$\text{VAR}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(E^{(i)}(\mathbf{x}) \right)^2 \quad (\text{I.7})$$

また, 降伏関数 σ_Y がヤング率 E と独立な確率変数である場合, σ_Y は以下のように KL 展開できる.

$$\sigma_Y(\mathbf{x}, \tilde{\omega}) = \sum_{i=0}^{\tilde{M}} \sigma_Y^{(i)}(\mathbf{x}) \tilde{\xi}_i(\omega) \quad (\text{I.8})$$

ここで, $\tilde{M}$ は KL 展開次数であり, $\tilde{\xi}$ は $\bar{\xi}$ とは独立な正規確率変数である.

付録 II 応答場の PC 展開^{18),19)}

PC 展開は複雑な確率分布を表現するための展開であり, SSFEM では変位 $\mathbf{u}$ 等の応答場に適用する. 変位

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$ を PC 展開すると, KL 展開の独立な確率変数 $\xi_i(\omega)$ を用いて以下のように展開される.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = & \mathbf{a}_0(\mathbf{x})\Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} \mathbf{a}_{i_1}(\mathbf{x})\Gamma_1(\xi_{i_1}(\omega)) \\ & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \mathbf{a}_{i_1 i_2}(\mathbf{x})\Gamma_2(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega)) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

ここで, Γ_p は p 次の Polynomial Chaos (PC) であり,

$$\begin{aligned} \Gamma_p(\boldsymbol{\xi}) = & (-1)^p \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi}\right) \\ & \times \frac{\partial^p}{\partial \xi_{m_1} \dots \partial \xi_{m_p}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

で与えられる. また, $\boldsymbol{\xi}(\omega)$ は任意の $\xi_i(\omega)$ を成分とするベクトルである. 1 次の PC は $\Gamma_1(\xi_i(\omega)) = \xi_i(\omega)$ であるが, 2 次以上の PC は $\boldsymbol{\xi}$ の多項式で表されるため, PC 展開を用いることで複雑な確率変数を表現することができる. また, 簡便のため, 式 (II.1) を以下のように表記する.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{n=0}^{P-1} \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x}) \Psi_n(\{\xi(\omega)\}) \quad (\text{II.3})$$

ここで, P は独立な KL 展開の確率変数の数 M , PC 展開次数 p により以下で求められる.

$$P = 1 + \sum_{s=1}^p \frac{1}{s!} \prod_{k=0}^{s-1} (M + k) \quad (\text{II.4})$$

また, $\Psi_n(\{\xi(\omega)\})$ は, 以下の直交性を持つ.

$$\langle \Psi_n(\{\xi(\omega)\}) \Psi_m(\{\xi(\omega)\}) \rangle = \delta_{nm} \quad (\text{II.5})$$

例えば, ヤング率 $E(\mathbf{x}, \omega)$ 及び降伏応力 σ_Y が独立な確率変数として式 (I.5) 及び式 (I.8) のように KL 展開する場合, $\xi(\omega)$ は以下のように定義する.

$$\xi_i(\omega) = \begin{cases} 1 & (i = 0) \\ \bar{\xi}_i(\omega) & (1 \leq i \leq \bar{M}) \\ \tilde{\xi}_i(\omega) & (\bar{M} + 1 \leq i \leq \bar{M} + \tilde{M}) \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

ここで, $\bar{M}$ 及び $\tilde{M}$ はヤング率及び降伏応力の KL 展開次数であり, $M = \bar{M} + \tilde{M}$ で与えられる. もし, KL 展開次数及び PC 展開次数を 1 次 ($\bar{M} = \tilde{M} = 1, p = 1$) とすれば, 式 (10) が得られる.

参考文献

- Ghanem, R. G. and Spanos, P. D.: *Stochastic Finite Elements - A Spectral Approach*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- Anders, M. and Hori, M.: Stochastic finite element method for elasto-plastic body, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.46, No.11, pp.1897-1916, 1999.
- Anders, M. and Hori, M.: Three-dimensional stochastic finite element method for elasto-plastic bodies, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.51, No.4, pp.449-478, 2001.
- Hori, M. and Munasinghe, S.: Generalized Hashin-Shtrikman variational principle for boundary-value problem of linear and non-linear heterogeneous body, *Mechanics of Materials*, Vol.31, No.7, pp.471-486, 1999.
- Jeremic, B., Sett, K. and Kavvas, M. L.: Probabilistic elasto-plasticity: Formulation in 1D, *Acta Geotech.*, Vol.2, No.3, pp.197-210, 2007.
- Jeremic, B., Sett, K. and Kavvas, M. L.: Probabilistic elasto-plasticity: solution and verification in 1D, *Acta Geotech.*, Vol.2, No.3, pp.211-220, 2007.
- Jeremic, B. and Sett, K.: On probabilistic yielding of materials, *Commun. Numer. Methods Eng.*, Vol.25, No.3, pp.291-300, 2009.
- Sett, K., Jeremic, B. and Kavvas, M. L.: The role of nonlinear hardening/softening in probabilistic elasto-plasticity, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.31, No.7, pp.953-975, 2007.
- Sett, K. and Jeremic, B.: Forward and backward probabilistic simulations in geotechnical engineering, *Contemporary topics in in-situ testing, analysis, and reliability of foundations*, Geotechnical Special Publications No. 186, ASCE, New York, pp.111, 2009.
- Sett, K. and Jeremic, B.: Probabilistic yielding and cyclic behavior of geomaterials, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.34, No.15, pp.1541-1559, 2010.
- Sett, K. and Jeremic, B.: Stochastic elastic-plastic finite elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.200, No.9-12, pp.997-1007, 2011.
- 羽場一基, 堀田渉, 畑明仁, 渡辺和明: 非線形スペクトル確率有限要素法に用いるリターンマッピングアルゴリズムの基礎的検討, 土木学会第 71 回年次学術講演会, pp.56, 2016.
- 羽場一基, 堀田渉, 畑明仁, 渡辺和明, 堀宗朗: スペクトル展開を用いた確率リターンマッピングアルゴリズムの基礎的検討, 土木学会論文集 (投稿中)
- Sett, K., Unutmaz, B., Cetin, K., Koprivica, S. and Jeremic, B.: Soil uncertainty and its influence on simulated $G/G_{\max}$ and damping behavior, *ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol.137, No.3, pp.218-226, 2011.
- Simo, J. C. and Hughes, T. J. R.: *Computational Inelasticity*, Springer, New York, 1998.
- Karhunen, K.: Über lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A, I. Mathematica-Physica.*, Vol.37, pp.1-79, 1947.
- Loeve, M.: Fonctions aleatoires du second ordre, Supplement to P. Levy, *Processus Stochastic et Mouvement Brownien*, 1948.
- Wiener, N.: The homogeneous chaos, *American Journal of Mathematics*, Vol.60, pp.897-936, 1938.
- Cameron, R. H. and Martin, W. T.: The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier-Hermite functionals, *Annals of Mathematics*, Vol.48, pp.385-392, 1947.
- Hara, A., Ohta, T., Niwa, M., Tanaka, S. and Banno, T.: Shear modulus and shear strength of cohesive soils, *Soils and Foundations*, Vol.14, No.3, pp.1-12, 1974.
- Phoon, K. K. and Kulhawy, F. H.: Evaluation of geotechnical property variability, *Can. Geotech. J.*, Vol.36, No.4, pp.625-639, 1999.
- Phoon, K. K., Kulhawy, F. H. and Grigoriu, M. D.: Reliability-based design of foundations for transmis-

- sion line structures, *Electric Power Research Institute, Palo Alto*, Report TR-105000, 1995.
- 23) Phoon, K. K. and Kulhawy, F. H.: Characterization of geotechnical variability, *Can. Geotech. J.*, Vol.36, No.4, pp.612-624, 1999.
 - 24) Hashiguchi, K.: Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.47, No.2, pp.266-272, 1980.
 - 25) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.25, No.8, pp.917-945, 1989.
 - 26) Hashiguchi, K.: Fundamental requirements and formulation of elastoplastic constitutive equations with tangential plasticity, *International Journal of Plasticity*, Vol.9, No.5, pp.525-549, 1993.
 - 27) Hashiguchi, K.: Mechanical requirements and structures of cyclic plasticity models, *International Journal of Plasticity*, Vol.9, No.6, pp.721-748, 1993.
 - 28) Hashiguchi, K.: The extended flow rule in plasticity, *International Journal of Plasticity*, Vol.13, No.1, pp.37-58, 1997.
 - 29) 橋口公一: Fundamentals in Constitutive Equation, Continuity and Smoothness Conditions and Loading Criterion, 地盤工学会論文報告集, Vol.40, No.4, pp.155-161, 2000.
 - 30) Vucetic, M. and Dobry, R.: Effect of soil plasticity on cyclic response, *J. Geotech. Eng.*, Vol.117, No.1, pp.89-107, 1991.
 - 31) 畑明仁, 志波由紀夫: モンテカルロシミュレーションによる地盤物性のばらつきが地震応答に与える影響に関するケーススタディ, 土木学会論文集 A1 (構造・地震工学), Vol.65, No.1 (地震工学論文集第 30 巻), pp.202-213, 2009.
- (2016.11.4 受付, 2017.1.9 修正, 2017.2.18 受理)

APPLYING A STOCHASTIC ELASTO-PLASTICITY APPROACH TO EVALUATE INFLUENCE OF SOIL UNCERTAINTY ON HYSTERESIS CHARACTERISTICS

Kazumoto HABA, Wataru HOTTA, Hideaki SONOBE, Akihito HATA,
Kazuaki WATANABE and Muneo HORI

In this paper, the influence of soil uncertainty on hysteresis characteristics is evaluated by applying a stochastic elasto-plastic model to simulate the stress-strain relation of undrained clay. The stochastic model is based on stochastic return mapping algorithm which is expanded by spectral expansion. It is shown that the stochastic approach can evaluate more realistic hysteresis characteristics, even with elastic-perfectly plastic von Mises model. The uncertainty of dynamic deformation characteristics is estimated by calculating the influence of soil uncertainty on the response fields.