技術資料

複合材強度の一元的信頼性評価

—ベイズ期待信頼度の適用—

伊藤 誠一^{*1}, 杉 本 直^{*2}, 森本 哲也^{*2}, 加藤 久弥^{*2}

(2016年1月18日受付)

Application of Bayesian Method to Determining Reliability Index
on Composite Material StrengthSeiichi ITO,^{*1} Sunao SUGIMOTO,^{*2} Tetsuya MORIMOTO^{*2} and Hisaya KATOH^{*2}

(Received January 18, 2016)

Key words: Composite materials, Safety and reliability, Simulation, Bayesian theory, MIL-B value

1. は じ め に

材料強度の不確定性評価の MIL-A/B 値は信頼度 (A 値: 0.99, B 値: 0.9) と信頼水準 (0.95) の二元評価 (Note 1) で表示される。複合材強度に対しては MIL-B 値が適用される。この二元評価に対し、標本平均値の 85% 強度値を持って MIL-B 値に相当するという簡易評価も存在する。ただし、この評価法では標本数ならびに強度の分散 (あるいは変動係数) が明らかであるという前提条件に留意しなければならない。

ここでは信頼度と信頼水準を統合して、平明な一元的評価を可能にするベイズ理論に基づく信頼性評価モデルを構築する。信頼度と信頼水準の二元評価について荷重-強度 (stress-strength) モデルとして統合し、平均破損確率 (あるいは平均信頼度) という定義を用いて一元的に評価した例¹⁾がある。そこではあらゆる強度レベルに対する破損確率の期待値を定義して一般式を導いているが、MIL 値 (平均値および分散未知) に対応する平均破損確率の具体例は示されていない。

本報告では、標本や未知母数の不確定性に対してベイズ理論²⁾を適用して、ある目的の強度に対する一元評価としてのベイズ期待信頼度を定義する。具体的には未知母数の推定に際して、標本値を得る前に工学者の主観や

判断を定量化し、また標本数に依存する不確定性ならびに追加標本の評価に対する容易性などから、未知母数の推定にベイズ理論を応用して未知母数の事後確率分布を得る。この事後確率を用いて目的の強度に対する信頼度のベイズ期待値を求めて、これを MIL 値に対応する一元評価指標とする。

ベイズ期待信頼度をどのように設定するのか、複合材料強度の MIL-B 値に対する具体的な評価例を示す。

2. MIL-B 値と簡易評価

複合材強度の MIL-B 値では、強度の不確定性を正規分布とした場合に平均値および標準偏差を未知とし、試験標本によってこれらの未知母数を推定する。標本数 n の制限から信頼水準 $1-\gamma$ を定め、未知母数の推定値が真実値に比べて危険側になる確率を定義する。信頼水準 95% はこの危険度 γ を 5% に抑えることを示す。さらに強度のばらつきを考えて、推定した未知母数を基に強度の信頼度を $R=0.9$ とする。試験標本から母集団の平均値と標準偏差が推定されるが、これらの標本推定値を用いると MIL-B 値は次式で求められる。

$$\text{MIL-B 値} = \text{標本平均値} - k(n) \times \text{標本標準偏差} \quad (1)$$

なお、 $k(n)$ は標本数 n に依存する係数であり、自由度 $n-1$ および非心度を有する非心 t 分布から求められる³⁾ (Note 1)。この係数 $k(n)$ を Table 1 に示す。ここで試験標本数を $n=6$ とし、複合材強度の変動係数 (COV: coefficient of variation) を 5% に仮定すると、 $k(6) = 3.006$ であるからこの場合の MIL-B 値に相当する強度

^{*1} 宇宙航空研究開発機構 客員研究員 (181-0015 東京都三鷹市大沢 6-13-1)

^{*2} 宇宙航空研究開発機構

^{*1, *2} Japan Aerospace Exploration Agency, Aeronautical Technical Directorate, Structural and Advanced Composite Research Unit

Table 1 Sample size n and coefficient $k(n)$.

Sample size: n	Coefficient: $k(n)$
3	6.155
4	4.162
5	3.407
6	3.006
8	2.582
10	2.355

レベルが次式で得られる。

$$\begin{aligned} \text{MIL-B 値} &= \text{標本平均値} - 3.006 \times (0.05 \times \text{標本平均値}) \\ &= 0.85 \times \text{標本平均値} \end{aligned} \quad (2)$$

上記の評価から、 $n=6$ 本の試験で得られた標本平均値と事前情報としての複合材強度の変動係数5%を用いると、標本平均値の85%を採用すればB値と同程度となる。しかしながら、(2)式では変動係数や標準偏差が既知であることが必要であり、また強度のばらつきがさらに大きくなれば相応の強度評価へ下げることに注意しなければならない。

3. 信頼度の期待値

標本数や未知母数の不確定性についてベイズ法では未知母数の事後分布で記述し、強度本来の不確定性については未知母数の事後分布を適用した信頼度の期待値を求める。以下では材料強度の不確定性を正規分布と仮定する確率モデルについて取り扱い、ベイズ期待信頼度 (Note 2) を指標にした強度の一元的评价を試みる。なお、正規分布では二つの母数 (平均値および分散: $\theta = (\mu, \sigma^2)$) で変数 x の確率特性が定まる。これは、 $N[x|\mu, \sigma^2]$ と記される。

未知母数ベクトルを θ とすると、許容レベル x_a におけるベイズ期待信頼度 $\underline{R}(x_a) = E[R(x_a)]$ は次式で示される。

$$\underline{R}(x_a) = E[R(x_a)] = \int_{\theta} R(x_a | \theta) h^{(1)}(\theta | \mathbf{x}) d\theta \quad (3)$$

ここで、 $R(x_a | \theta)$ は母数 θ で記述される許容レベル x_a における信頼度を表す。また事後分布 $h^{(1)}(\theta | \mathbf{x})$ は、標本データ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ の生起確率 $P(\mathbf{x} | \theta)$ 、および θ に関する事前の確信の度合いである事前確率分布 $h^{(0)}(\theta)$ を用いて、ベイズの定理から次式で表される。

$$h^{(1)}(\theta | \mathbf{x}) = \frac{P(\mathbf{x} | \theta) h^{(0)}(\theta)}{\int (\text{Numerator}) d\theta} \quad (4)$$

以下では強度の母集団において、1) 平均値未知、2) 平均値および分散未知、の双方について考察する。

3.1 平均値未知、分散既知

3.1.1 片側許容値としての信頼度

標本データから得られた平均値の推定値を $\bar{x}$ とし、また従来の情報や経験から標準偏差 σ を既知とする。この場合の信頼水準 $1 - \gamma = 0.95$ および信頼度 $R = 0.9$ に対応する正規分布の片側許容値を与える係数 k および標本数 n の関係は次式で示される⁴⁾。

$$k = \Phi^{-1}(R) + \Phi^{-1}(1 - \gamma) / \sqrt{n} \quad (5)$$

ここで、 $\Phi^{-1}(\)$ は累積標準正規分布の逆関数を示し、 $t = \Phi^{-1}(1 - \gamma)$ は上側確率 γ に対するパーセント点である。したがって許容値 x_a は上式の k を用いて次式に書ける。

$$x_a = \bar{x} - k\sigma \quad (6)$$

(6)式は、未知である平均値 μ を標本平均値 $\bar{x}$ に置き換えた時、この標本平均値が安全側に信頼水準 $1 - \gamma$ で保障され、許容値 x_a における破損確率が $P = 1 - R = 0.1$ であることを示す。

3.1.2 ベイズ期待信頼度の適用

上記の許容値の設定では、試験結果の標本データを基にして、本来は定数である確率分布の母数 μ についてある幅を持って推定した。したがって信頼度の推定にも信頼水準という幅が与えられ、これを基準として不確定性を評価した。これに対してベイズ法では、試験結果が確率変数であると同時に、母数 μ 自身も確率変数という立場に従う。(4)式のベイズの定理から明らかのように、 μ に関する事前情報を適切に活用できることがベイズ法の有用な特徴である。

ここで許容値 x_a の設定にベイズ法を適用する。未知母数 μ の事前分布には、事前の情報は何もない状況を想定して一様分布を選択する (Note 3)。強度データ $\mathbf{x}$ が得られた後、未知母数 μ の事後分布は正規分布の再生性を用いると、(4)式のベイズの定理によって次式の $N[\mu | \bar{x}, \sigma^2/n]$ に書ける。

$$\begin{aligned} h^{(1)}(\mu | \bar{x}) &= \frac{\left[\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \right] \cdot h^{(0)}(\mu)}{\int_{\mu} (\text{Numerator}) d\mu} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{n(\mu - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $\bar{x}$ は次式に示す標本平均である。

Fig. 1 Sample size n and coefficient $k(n)$.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (8)$$

(7)式の事後分布から求めるベイズ期待信頼度(3)式は、許容値を x_a とすると次式の期待値で得られる。

$$\begin{aligned} \bar{R}(x_a) &= E[R(x_a)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{x_a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \right] \\ &\quad \cdot h^{(1)}(\mu|x) d\mu \end{aligned} \quad (9)$$

また強度 x の分布 $f(x)$ も事後分布 $h^{(1)}(\mu|x)$ を用いた期待値として同様に計算され、この $f(x)$ は次式に示す $N[\bar{x}, \sigma^2(n+1)/n]$ に従う正規分布となる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x|\mu) h^{(1)}(\mu|x) d\mu \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{n+1}} \exp\left\{-\frac{n(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2(n+1)}\right\} \end{aligned} \quad (10)$$

3.1.3 計算例

(5)式に示した従来の手法に基づく許容値を求めるために、信頼度 $R=0.9$ を満たす係数 k と必要な標本数 n の関係を Fig. 1 に示す。標本数の増加とともに係数 k の値は小さくなり、許容レベル x_a は緩和される。これに対して許容値に対するベイズ期待信頼度の計算例を Fig. 2 に示す。点線は(9)式を標本数 n の関数としてベイズ期待信頼度 $R(n)$ を表したものである。標本数 n の増加とともに、ベイズ期待信頼度は3.1節の許容値の信頼度0.9に近づく。ベイズ期待信頼度がこのように高い信頼度を示す理由は、従来の二元手法では未知母数の平均値の信頼水準が95%であるのに対し、ベイズ法では平均値の取る可能性を一様に捉えているからである。事前分布の設定については厳密な評価モデルが提案されている (Note 3) が、ここでは工学的応用を目的に情報が事前に得られない状況を想定して、代表的な無情報事前分布である一

Fig. 2 Bayesian expected reliability.

様分布を採択している。他方、未知母数 θ に関する事前情報が得られていれば、これらを確率密度 $h^{(0)}(\theta)$ として形成して(4)式の前分布に導入することも可能である。

ベイズ期待信頼度を定めるために、標本数 $n=6$ を例にとると、二元評価による信頼度 $R=0.9$ および信頼水準 $1-\gamma=0.95$ と同等な信頼性評価に相当するベイズ期待信頼度は、Fig. 2 から $\bar{R}=0.965$ になる。

3.2 平均値および分散未知

3.2.1 MIL-B 値

平均値および分散が未知である場合の正規分布の許容値 x_a は、(6)式と同様に、次式の係数 k を用いて、前述の(1)式から得られる (Note 1)。

$$k = \frac{t'_{\gamma}(n-1, \sqrt{n} a_p)}{\sqrt{n}} \quad (11)$$

ここで、 $t'_{\gamma}(n-1, n^{1/2} a_p)$ は、自由度 $n-1$ 、非心度 $n^{1/2} a_p$ の非心 t 分布の上側確率 γ に対するパーセント点を表し、また a_p は $a_p = \Phi^{-1}(1-P)$ の標準正規分布の上側確率 P に対するパーセント点である。MIL-B 値を構成する Table 1 の係数 $k(n)$ は、上式において $1-\gamma=0.95$ 、 $P=0.1$ を代入した非心 t 分布³⁾ から求められる。

3.2.2 ベイズ期待信頼度の適用

平均値 μ および分散 σ^2 が未知である正規母集団のベイズ母数推定において、事前情報が期待できない状況では双方ともに無情報事前分布が用いられる。ここではジェフリーズ (Jeffreys) の無情報事前分布⁵⁾ (Note 3, 4) を適用し、平均値に対しては一様分布、そして分散については精度 (分散の逆数) に比例する関数を扱う⁶⁾。この結合事前分布を次式に示す。

$$h^{(0)}(\mu, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \quad (12)$$

標本平均 $\bar{x}$ とベイズの定理から、平均値 μ および分散 σ^2 の事後分布 $h^{(1)}(\mu, \sigma^2)$ が正規分布と逆カイ二乗分布

Table 2 Example data of composite material strength (Sample size $n=6$).

Composite material: T800H/EP : # 3633	Mechanical strength property	Sample mean: $\bar{x}$	Coefficient of variation: COV	MIL-B value: x_a	Expected reliability: $\underline{R}(x_a)$
A: Quasi-isotropic	Open hole tension (MPa), 26°C	438	1.6%	416	0.997
B: Quasi-isotropic	Tension (MPa), 25°C	875	5.24%	737	0.996
C: Satin fabric[90] _{7s}	Interlaminar fracture toughness Mode I (kJ/m), 25°C	0.613	11.3%	0.405	0.997
D: [0] ₃₂	Interlaminar fracture toughness Mode I (kJ/m), 23°C	0.200	17%	0.0975	0.996

の比として示される。具体的に、分散 σ^2 の条件下における平均値 μ の事後分布は $N(\mu | \bar{x}, \sigma^2/n)$ であり、一方、 χ^2_{n-1} を自由度 $n-1$ の逆カイ二乗分布と記すと、分散 σ^2 の事後分布形は χ^2_{n-1} 分布に比例する。以上から、事後分布 $h^{(1)}(\mu, \sigma^2)$ は次式に書ける。

$$h^{(1)}(\mu, \sigma^2) \propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\{S+n(\mu-\bar{x})^2\}\right] \quad (13)$$

上式において $S=\sum(x_i-\bar{x})^2$ である。

ベイズ期待信頼度は、平均値未知の場合と同様に、(9) 式に事後分布 (13) 式を適用して次式で計算される。

$$\begin{aligned} \underline{R}(x_a) &= E[\underline{R}(x_a)] \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[\int_{x_a}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \right] \\ &\quad \cdot h^{(1)}(\mu, \sigma^2) d\mu d\sigma^2 \end{aligned} \quad (14)$$

3.2.3 具体例

(14) 式を用いて MIL-B 値の許容値に対してベイズ期待信頼度 $\underline{R}(x_a)$ を求める。複合材強度の具体例として、Table 2 に示す四種の強度データ⁷⁾ (A, B, C, D) を取り上げ、これらの標本に対する MIL-B 値とベイズ期待信頼度を求めて比較検討する。

ベイズ期待信頼度 (14) 式の計算では、モンテカルロ (Monte Carlo) 法によるシミュレーションで数値積分を評価する⁸⁾。この時のシミュレーション回数 m と、その計算の標準誤差 (Note 5) を標本データ B に関して Table 3 にまとめる。また、事後分布 $h^{(1)}(\mu, \sigma^2)$ のシミュレーション結果の一例を Fig. 3 に示す (確率密度の対数を取り、その最大値で基準化⁹⁾ したもの)。ベイズ期待信頼度 $\underline{R}(x_a)$ のシミュレーションにおける標準誤差はほぼ $1.0 \times 10^{-5} \sim 1.3 \times 10^{-5}$ 程度であり、シミュレーション回数 m は期待信頼度 $\underline{R}(x_a)$ の結果に大きな影響を与えないと考えられる。

次に、データ (A, B, C, D) のベイズ期待信頼度に

Table 3 Simulation iteration m and Bayesian expected reliability $\underline{R}(x_a)$ to data B.

Simulation iteration: m	Bayesian expected reliability: $\underline{R}(x_a)$	Simulation standard error: e_r
100	0.9960	1.01E-05
1,000	0.9964	1.29E-05
5,000	0.9968	1.10E-05

Fig. 3 Contour plot of posterior of μ and σ^2 . The points represent a simulated random sample from this distribution.

について、 $m=1,000$ の計算例を Table 4 にまとめる。変動係数 COV の大きさがベイズ期待信頼度にどのような影響を及ぼすか比較したものである。この結果から、本例題の範囲 (COV : 1.6~17% 程度) では、変動係数がベイズ期待信頼度に与える影響はほとんどないことがわかる。これらから、ベイズ期待信頼度は $\underline{R}(x_a)=0.996 \sim 0.997$ という結果が示され、従来の二元評価と比較してほぼ二ケタほど高い信頼度指標が MIL-B 値 (信頼度 $R=0.9$, 信頼水準 $1-\gamma=0.95$) に相当する。

3.2.4 標本数とベイズ期待信頼度

Table 2 のデータ B を例として、平均値および分散が未知である場合の標本数 n がベイズ期待信頼度 $\underline{R}(x_a)$

Table 4 Sampling results based on data B.

Sample size: n	Sample mean: $\bar{x}$ (MPa)	COV	MIL-B value (MPa): x_a	Bayesian expected reliability: $\underline{R}(x_a)$
4	884	7.1%	621	0.999
6	875	5.2%	737	0.996
8	881	4.1%	787	0.993
10	888	4.2%	788	0.988
50	869	3.9%	804	0.950
100	879	4.7%	808	0.936

に与える影響を調べる。 $n=6$ 以外の各 n に対する実標本がないため、データ B を基本（平均値、変動係数）としてモンテカルロ法により疑似標本データを作成した。これらの標本データとベイズ期待信頼度を Table 4 にまとめる。また、Fig. 2 の実線に $\underline{R}(x_a)$ を図示する。本図から明らかなように、MIL-B 値に対するベイズ期待信頼度 $\underline{R}(x_a)$ は、平均値のみ未知の期待信頼度と同様に、標本数 n の増加とともに $R=0.9$ に近づく。ベイズ期待信頼度を用いた一元化指標の簡明さを表す例である。

4. お わ り に

複合材強度の評価例を通じて、試験標本数および材料強度の変動に対応する一元評価としてのベイズ期待信頼度を求めた。本手法はベイズ期待信頼度を一つの指標として材料強度の不確定性を端的に把握できる。正規系データ、標本数 $n=6$ 、変動係数 $\text{COV}=17\%$ 内の限られた例であるが、下記の結論が得られた。

- (1) 正規系データの平均値が未知である標本に対して、信頼度 $R=0.9$ および信頼水準 $1-\gamma=0.95$ を満たすベイズ期待信頼度は、標本数 $n=6$ では約一桁ほど高い信頼度指標 $\underline{R}=0.965$ が相当する。
- (2) 平均値および分散が未知である状況下で、MIL-B 値に相応する片側許容値において同等の信頼性を有するためには、標本データの変動係数にかかわらず、ベイズ法では大略二桁程度の高い信頼度目標、 $\underline{R}=0.997$ を考慮すれば適合する。

また標本数 n がベイズ期待信頼度 $\underline{R}(x_a)$ に与える影響は、平均値のみ未知と平均値および分散が未知である場合の双方ともに同様の傾向にあり、標本数の増加にしたがって期待信頼度が緩和される。

Note 1 MIL-B 値の導出

片側許容値 x_a を標本 $(x_1, \dots, x_n)$ の平均値 $\bar{x}$ 、標本標準偏差 s' を用い、 $x_a = \bar{x} - ks'$ と設定する。ここで真の母数を μ 、 σ とすると、真の許容値 $\mu - u_p \sigma$ よりも高く x_a を

設定する危険性を考える。なお、 u_p は標準正規分布における累積確率 P のパーセント点である。以上から、 $x_a > \mu - u_p \sigma$ である確率を微少な γ に抑えるためには次式が成立しなければならない。

$$\Pr[\bar{x} - ks' > \mu - u_p \sigma] = \gamma \quad (\text{A1})$$

また (A1) 式は次式のように展開できる。

$$\begin{aligned} & \Pr \left[\frac{\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \sqrt{n} u_p}{\sqrt{\frac{(n-1)s'^2/\sigma^2}{n-1}}} > \sqrt{nk} \right] \\ &= \Pr \left[t = \frac{u + \sqrt{n} u_p}{\sqrt{\frac{v}{n-1}}} > \sqrt{nk} \right] = \gamma \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

ここで、(A2) 式の変数 u は、以下に示すように標準正規分布に従い、また v は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従う確率変数である。

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = u \rightarrow N(u|0, 1^2) \quad (\text{A3})$$

$$(n-1)s'^2/\sigma^2 = v \rightarrow \chi_{n-1}^2 \quad (\text{A4})$$

これらから、 u 、 v で示される (A2) 式の確率変数 t は、自由度 $n-1$ 、非心度 $n^{1/2} u_p$ の非心 t 分布を形成する。これより、 $t', (n-1, n^{1/2} u_p)$ は非心 t 分布の上側確率の $\gamma\%$ 点となる。MIL-B 値の標本数 n に対応する係数 $k(n)$ は、信頼度 $R=1-P=0.9$ 、信頼水準 $1-\gamma=0.95$ を本文 (11) 式に代入することによって得られる。

Note 2 ベイズ期待信頼度

本文 (3) 式は、信頼度 $R(x_a|\theta)$ に対して未知母数ベクトル θ の事後分布 $h^{(1)}(\theta|\mathbf{x})$ の重みづけで平均化している。この積分値はベイズ予測と呼ばれている。これに対して事後分布の最大値を示す推定母数ベクトル $\theta_{\max}$ を選択する例のように、ある特定の推定母数値を評価信頼

度に代入した $R(x_a | \theta_{\max})$ をプラグイン予測と呼ぶ。プラグイン予測と比較して、ベイズ予測は標本数が少ない時に優れた予測を行えることが示されている⁹⁾。このように本文(3)式は信頼度の確率モデルに関して推定母数による期待値 $R(x_a)$ を採ることから、 $\underline{R}(x_a)$ をベイズ期待信頼度として定義する。

Note 3 ベイズ解析における事前分布

ベイズの定理では未知母数 (あるいは要因) の事後分布は、本文(4)式のように、生起事象確率の尤度と未知母数に対する事前分布の積に比例する。事前分布のモデル化では、予め情報が得られていれば未知母数の確率分布が多様な手法で形成され、他方、情報が無い場合には無情報事前分布として一様分布が選択される。尤度関数形にも依存するが、事後分布計算の複雑さを避けるために、事前分布と事後分布を同形の確率分布に仮定した自然共役分布も応用される。また共役分布で対応できない状況では、複雑に形成された事後分布はマルコフチェーン・モンテカルロ (MCMC: Markov chain Monte Carlo) 法などの計算統計の手法で評価される。

事前分布に対する数学的考察が論じられている^{5,6)}が、ここではベイズの定理の工学的応用を目的に、適用しやすい確率分布や計算手法などを考慮して事前分布を設定している。

Note 4 ジェフリーズ (Jeffreys) の無情報事前分布

ベイズ解析において、情報が皆無であることはその変数 α の変数変換についても無知と考えられる。しかし、一様分布を仮定した α に対して $\beta = \ln \alpha$ なる変数変換を行うと、明らかに β は一様ではなくなる。これは、同一の確率モデルについて変数変換を施すと異なる推論になり得ることを示している。ジェフリーズ⁵⁾ はこれに対して一貫した無情報の数学的モデルを定義し、未知母数の事前分布にフィッシャー (Fisher) 情報量 $I(\alpha)$ の平方根に比例する事前密度の形式を見出した。これを次式に示すが、この事前分布は変換に対して不変となる。

$$p(\alpha) \propto \sqrt{I(\alpha)} \quad (\text{A5})$$

フィッシャー情報量は対数尤度の一次微分であるスコア関数の分散であり、標本値が尤度の変化に与える影響を測る。

ここで正規分布 $N[x | \mu, \sigma^2]$ の未知母数推定に対してジェフリーズの事前分布を求める。平均値 μ については無情報事前分布として一様分布が定義されるが(本文(7)

式参照)、他方、標準偏差 σ の事前分布はジェフリーズの定義(A5)式から $1/\sigma$ に比例する関数で表される。

$$p(\sigma) \propto \frac{1}{\sigma} \quad (\text{A6})$$

この事前分布とベイズの定理から、標本数 n 、標本平均を $\underline{x}$ とすると事後分布 $h^{(1)}(\mu, \sigma)$ は次式に書ける。

$$h^{(1)}(\mu, \sigma) \propto \frac{1}{(\sigma)^{n+1}} \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu - \underline{x})^2\right] \quad (\text{A7})$$

ここで(A6)式から、分散 σ^2 に対する事前分布 $q(\sigma^2)$ を変数変換 $z = u(\sigma) = \sigma^2$ により求めると、

$$q(z) = p(\sigma) \left| \frac{d\sigma}{dz} \right|_{\sigma=u^{-1}(z)} = p(\sqrt{z}) \frac{1}{2\sqrt{z}} \propto \frac{1}{\sigma^2} \quad (\text{A8})$$

で表される。本文(12)式ではこのベイズモデルを用いており、対応する事後分布が本文(13)式である。このように、ジェフリーズの方法は変数変換後のパラメタの分布が一様になるような無情報事前分布を構成する手法である。

Note 5 確率シミュレーションの誤差

本文(9)式や(14)式の積分計算ではモンテカルロ法が適用されるが、この場合、 m 回のシミュレーションにおける標準誤差 e_r は次式で与えられる⁶⁾。

$$e_r = \frac{\sum_{j=1}^m \{R_j(x_a) - \underline{R}(x_a)\}^2}{m(m-1)} \quad (\text{A9})$$

ここで $R_j(x_a)$ は、 j 番目の信頼度シミュレーション結果を示す。

参考文献

- 市川昌弘：日本機械学会論文集 (A 編), 58, 549 (1991), 765-768.
- 岡村弘之, 板垣 浩：強度の統計的取扱, 破壊力学と材料強度講座-6, 培風館 (1979).
- 山内二郎編：統計数値表 JSA-1972, (財)日本規格協会 (1972).
- 上山忠夫：構造信頼性, 日科技連 (1984).
- A. Gelman, J. Carlin & H. Stern: *Bayesian Data Analysis* (3rd Ed.), Chapman & Hall/CRC (2013).
- J. Albert: *Bayesian Computation with R* (2nd Ed.), Springer (2009).
- 森本哲也, 杉本 直, 加藤久弥, 原 栄一, 安岡哲夫, 岩堀 豊, 小笠原俊夫, 伊藤誠一: JAXA 先進複合材料力学特性データベース, JAXA-RM-14-004 (2015).
- 船尾暢男: The R Tips 第2版, オーム社 (2009).
- 尾形良彦: 総合研究大学院大学葉山彙報, 2 (2013), 17-38.