研究論文

曲げ荷重を受ける CFRTP 梁の最適板厚徐変構造の
理論解析と面外せん断弾性率の影響志田 龍亮^{*1}, 高橋 淳^{*2}

(2016 年 12 月 26 日受付)

Theoretical Analysis of CFRTP Optimal Variable Thickness Beam Subjected
to Bending Load and the Influence of Out-of-plane Shear ModulusRyusuke SHIDA^{*1} and Jun TAKAHASHI^{*2}

(Received December 26, 2016)

Abstract: Carbon-fiber-reinforced thermoplastics (CFRTP) are highly expected to find application in mass-production vehicles due to their high-productivity, thermal bonding characteristics, and recycle performance. In addition, discontinuous CFRTP adopts a ‘variable thickness structure’, which enables a wide range of practical applications including large structural parts. In this study, the optimum variable thickness of a simple supported beam was theoretically obtained by solving the Euler-Lagrange equation. In addition, the robustness of the variable thickness structure was evaluated through parametric study. Due to the low shear modulus of thermoplastic resin, the ratio of in-plane Young’s modulus (E_1) to out-of-plane shear modulus (G_{13}) of CFRTP is larger than that of other materials. To examine its effect, Timoshenko assumption was applied and was compared with the Euler-Bernoulli assumption. Consequently, it was shown that the Timoshenko-based variable thickness structure required minimum thickness on the edge, which was affected by the length of the beam and the E_1 -to- G_{13} ratio. The theoretical weight reduction rate was obtained by applying both material substitution and optimum variable thickness structure. Those values of carbon-fiber-tape-reinforced thermoplastics (CTT) and carbon-fiber-mat-reinforced thermoplastics (CMT) are 70.1% and 67.9%, respectively.

Key words: CFRTP, Theoretical optimization, FEM, Out-of-plane shear modulus

1. 緒 言

近年、炭素繊維強化熱可塑性プラスチック (CFRTP) の研究開発に注目が集まっており、我が国においては 2008 年度から 2012 年度にかけて「サステナブルハイパーコンポジット技術の開発」、2013 年度からは「革新的新構造材料等技術開発」といった国家プロジェクトが進められている。同プロジェクトでは従来の炭素繊維強化熱硬化性プラスチック (CFRTS) と同等の力学特性を有しながら、高速成形、簡便・高強度な接合、リサイクル

ル性を実現する CFRTP の開発が進められており、特に量産用自動車部材への適用が期待されている。

実際の構造物への適用にあたっては材料の特性を踏まえた効率的な設計が重要となる。これまで CFRTS の最適設計に関する先行研究は数多く^{1~4)}、体積含有率や繊維配向を設計変数としたトポロジー最適化や、積層構成も踏まえた多段階の最適化等が実施されている^{5,6)}。しかしながら、移動体のボディ構造への実際の適用にあたっては、空力特性や意匠性から外形が先に決まってしまうという制約から、鋼板や積層型 FRP の構造最適化はスティフナの配置や穴の開け方等の検討に限定されていた。

他方、CFRTP は、ハイスサイクル圧縮 (流動) 成形による板厚徐変構造の実現が容易であり、構造最適化設計の結果を現実の多くの部材・構造に反映しやすいという特徴を有している。板厚徐変構造は特に床面など曲げ荷重

^{*1,*2} 東京大学大学院工学系研究科システム創成学専攻 (113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

School of Engineering, Department of Systems Innovation, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656, Japan

^{*1} 大学院生 Graduate Student, ^{*2} 教授 Professor

を支える部材に適していると考えられ、こうした部材は比較的大型であることから車体重量減少への寄与も期待される。

構造物の最適設計にあたっては適用する材料の特性を考慮することが重要となるが、CFRTPにおける特質のひとつに、母材となる樹脂のせん断弾性率が低いことに起因する「 E_1/G_{13} 比 (面内縦弾性率/面外せん断弾性率) の大きさ」が挙げられる。先行研究においては CFRTP の E_1/G_{13} 比は繊維形態や環境温度により大きく変化することが指摘されている^{7,8)}他、 E_1/G_{13} 比が大きい材料は、現行の試験規格では曲げ弾性率が過少評価されることも報告されており⁹⁾、この値が最適構造にどのように影響するかを知ることは重要となる。構造最適化ソフトウェアは近年多くの成果を上げているが、上記のような検討をパラメトリックに行うためには理論解析が望ましい。

以上の背景から、本研究では曲げ荷重を受ける CFRTP 部材を対象として、理論解析により最適な板厚徐変構造を導出する。加えて、CFRTP の材料特性の一つである E_1/G_{13} 比に着目し、同パラメータが最適構造に与える影響を分析すると共に、それらの結果を踏まえ板厚徐変構造の軽量化ポテンシャルを求める。

2. 曲げ荷重を伴う梁の最適構造の導出

一般に、連続体の構造最適化は、寸法最適化、形状最適化、位相最適化の三つに大別される¹⁰⁾。寸法最適化は梁の長さや高さといった設計変数を最適化するもので、構造の抜本的な変更には至らないものの、取り扱いが容易であり、かつ高い収束性が期待される^{11,12)}。形状最適化は構造物の外形形状そのものを最適化する手法である。例えば、外形形状をスプライン関数などの補間関数を用いて表現し、補間関数のコントロールポイントの位置を設計変数とする super curve method、予め形状モードを用意しておき、その重ね合わせで最適構造を得るベシスベクトル法などが存在する^{13,14)}。位相最適化は孔の数などの構造のトポロジーを含めた、自由度の高い最適化を可能とする手法である。従来のデザインに捉われない大幅な効率化が望める一方、設計空間を緩和する SIMP (solid isotropic material with penalization) 法ではメッシュ依存性やグレイスケールなどの問題点が明らかになっており、近年では物体境界が明確に導出されるレベルセット法の適用が進んでいる^{15~17)}。

本研究では、板厚徐変構造を前提として、板厚分布を設計変数とした剛性一定下での重量最小化問題を Euler-

Lagrange の制約付き変分法により解析的に求める。特定の設計変数の最適化という意味では寸法最適化となるが、連続的な分布形状を求めることから実際に得られる解は有限要素法モデルにおける形状最適化に相当する。

尚、手法としては空隙を許す位相最適化の方がより大幅な重量減少が見込めることになり、Olhoff らによる先行研究^{18,19)}においても、平均コンプライアンス最小化 (剛性最大化) 問題では、滑らかさを仮定して得られた最適板厚分布よりも、リブで補強した不連続な板厚分布の方が優れていることが指摘されている。しかしながら、位相最適化では問題の設定によっては実際の成形が難しい複雑な位相が最適解として導出されるケースが散見される^{20~22)}ことや、CFRTP のワンショットでのリブ成形では繊維配向の乱れが観察され、簡易的なモデリングでは実測と FEM の整合性が得られないとの実験結果も報告されている²³⁾。よって、本研究では CFRTP の実際の成形条件も加味し、最適構造の基礎検討としてここでは連続的な板厚分布を仮定した板厚徐変構造を前提とする。

2.1 Euler-Bernoulli 仮定における理論解の導出

解析モデルは両端単純支持梁とし、まずはせん断変形を考慮しない Euler-Bernoulli 梁を仮定する。荷重条件としては、荷重の総和 (荷重分布の積分値) が一定である際に変位が最大となるよう、中央部への集中荷重とする。また、梁と板の曲げについては構成方程式が異なるが、板厚徐変構造の平板曲げの場合は変数係数の偏微分方程式となり解析的なアプローチが困難となるため、本節では基本的な式として梁 (円筒曲げ) を想定する。ここで Fig. 1 に示すように式展開の簡略化のために片持梁問題に置き換える。

片持梁における剛性一定下での重量最小化問題は、変位 δ が一定下にて最も軽量となる厚さ $t(x)$ の分布形状を求めることに等しい。同問題の解析解の導出に当たっては、制約付き変分問題として Euler-Lagrange 方程式を適用することが有効である。

材料の比重を ρ 、梁の幅を b 、梁の長さを l 、厚さ分布を $t(x)$ とすると、構造重量 W は式 (1) に与えられる。

Fig. 1 Schematics of analytical model.

また、梁の最大変位 $\delta_{\max}$ を仮想仕事の原理を用いて重積分とならない形で表現すると式(2)にて与えられる。ただし、 M は曲げモーメント、 P は集中荷重、 E は縦弾性率、 I は断面二次モーメントとなる。ここで、剛性一定下における重量最小化問題は、式(3)の汎関数 F の停留条件を求めることに相当する。尚、 λ は変位制約条件から求められるスカラー値である。

$$W = \rho b \int_0^l t(x) dx \quad (1)$$

$$\delta_{\max} = \int_0^l \frac{M \bar{M}}{EI} dx = \frac{12P}{Eb} \int_0^l \frac{(l-x)^2}{t(x)^3} dx \quad (2)$$

$$F = W + \lambda \delta_{\max} = \int_0^l \left(\rho b t(x) + \lambda \frac{12P}{Eb} \frac{(l-x)^2}{t(x)^3} \right) dx \quad (3)$$

式(3)の積分項の中身を f とおくと、オイラー方程式から汎関数の停留条件は式(4)を満たす。同条件を満たす $t(x)$ は式(5)で与えられ、同時に $\delta_{\max}$ は式(2)に式(5)を代入し式(6)で与えられる。ここで変位制約条件として、一定板厚 t_1 を持つ梁が同荷重を受ける際の最大変位 δ_1 と等しいとする。 δ_1 は式(7)で与えられる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial t'} \right) = 0 \quad (4)$$

$$t(x) = \left(\lambda \frac{36P}{\rho E b^2} \right)^{\frac{1}{4}} (l-x)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$\delta_{\max} = \frac{8Pl^{\frac{3}{2}}}{Eb} \left(\lambda \frac{36P}{\rho E b^2} \right)^{-\frac{3}{4}} \quad (6)$$

$$\delta_1 = \frac{4Pl^{\frac{3}{2}}}{Ebt_1^3} \quad (7)$$

$\delta_{\max} = \delta_1$ の条件からこれを解くと、 $t(x)$ は式(8)にて表され、等板厚梁と剛性が等しくなる最適板厚分布 $t(x)$ は等板厚 t_1 と梁の長さ l だけで決定されることが分かる。また、本結果に基づく軽量化率は、等板厚梁の重量を W_1 とすると式(9)で与えられ、等剛性の板厚徐変構造は一定板厚と比較して約 16.0%の軽量化となる。

$$t(x) = 2^{\frac{1}{3}} t_1 \left(\frac{l-x}{l} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$$\frac{W}{W_1} = \frac{\rho b \int_0^l t(x) dx}{\rho b t_1 l} = \frac{2}{3} (2)^{\frac{1}{3}} = 0.8398 \dots \quad (9)$$

Fig. 2 は $l=100$ mm, $t_1=10$ mm とした際の等厚梁と、同剛性となる板厚徐変構造の外形を比較したものである。変厚梁の厚さの最大値は、片持梁の拘束点（両端支持梁における荷重点）での 12.6 mm となり、最小値は逆側の自由端（両端支持梁における支持点）で 0 となる。

Fig. 2 Comparison of flat and variable thickness cantilever with same maximum deflection under concentrated load.

Fig. 3 Comparison of flat and variable thickness cantilever with same maximum deflection under uniformly distributed load.

尚、等分布荷重の場合も同様の式展開にて最適形状が導出される。単位長さあたりの等分布荷重の大きさを w とすると汎関数 F は式(10)で表され、同様にオイラー方程式による停留条件と等板厚梁の最大変位に等しいという制約条件から最適な板厚分布 $t(x)$ は式(11)で与えられる。このときの板厚徐変構造は一定板厚と比較して約 24.7%の軽量化となる。Fig. 3 は同様に等板厚梁との比較を示している。

$$F = W + \lambda \delta_{\max} = \int_0^l \left(\rho b t(x) + \lambda \frac{6w}{Eb} \frac{(l-x)^3}{t(x)^3} \right) dx \quad (10)$$

$$t(x) = \left(\frac{16}{7} \right)^{\frac{1}{3}} t_1 \left(\frac{l-x}{l} \right)^{\frac{3}{4}} \quad (11)$$

$$\frac{W}{W_1} = \frac{\rho b \int_0^l t(x) dx}{\rho b t_1 l} = \frac{4}{7} \left(\frac{16}{7} \right)^{\frac{1}{3}} = 0.7527 \dots \quad (12)$$

2.2 FEM（有限要素法）解析との比較

前節で求めた理論解との比較を行うため、有限要素モデルを作成し形状最適化を行った。Fig. 4 に解析モデルの概観を示す。シェル要素での寸法最適化では要素ごとに不連続な面が生じることから、3D ソリッド要素でのフリー形状最適化を行った。解析モデルの幾何条件としては長さ $l=100$ mm, 幅 $b=10$ mm, 初期厚さ $t=10$ mm としており、境界条件としては集中荷重 $P=100$ N を端

Fig. 4 FE model of cantilever optimization.

Fig. 5 Optimization result with contour plot.

部に与え、もう片方の端部は解析解との比較のため以下のように設定した。すなわち、 x 軸方向(長手方向)、 y 軸方向(幅方向)は拘束、 z 軸方向(厚さ方向)は荷重面にある節点は拘束し、その他の節点は y 軸方向の厚さを一定に保ちながら移動可能とした。最適化にあたっては等厚 $t_1=10$ の際の端部の最大変位の理論値である $\delta_1=0.19$ を超えないことを制約条件として、体積変化率が $10e-6$ 以下に収束するまで繰替計算を行った。ソルバーには Altair 社の OptiStruct を使用した。尚、実際には CFRTP のポアソン比は後述するように 0.3 前後の値をとるが、ここでは解析解との比較を目的として幅方向への変化を無視するため、ポアソン比 ν は設定していない。

最適化結果の概観を Fig. 5 に示す。コンターは z 軸方向への形状変化を表しており、片持梁における荷重点は初期板厚より薄くなり支持点は厚くなっている。Fig. 6 は前節の理論解と FEM による形状最適化結果の板厚を比較した図であるが、端部以外の点では誤差は 2.1% 以内となっており概形はよく一致している。

FEM での最適化結果では端部の板厚は 0 にはならないが、Fig. 7 に示すように解析モデルのメッシュをより細かくし収束条件を厳しくすることで端部の厚さは理論解に近づくことが確認される。

2.3 ロバスト性に対する考察

前述では、変位が最も大きくなる条件として中央部の集中荷重を荷重条件として設定し、最適な板厚分布を導出したが、実際の構造物の適用にあたっては他の荷重条

Fig. 6 Comparison between FEM and theoretical solution.

Fig. 7 Thickness difference at the edge by FE model.

件に対してもロバストネスを確保する必要がある。構造系の非確率論的な不確定性解析については様々な数値手法が提案されているが^{24,25)}、本構造では板厚分布の関数形が明らかになっていることから、Fig. 8 に示されるように上面の任意の点における鉛直荷重に対する変位分布、応力分布を直接的に導出しロバスト性に対する考察を行う。

まず、変位分布については、Fig. 8 の左端を $x=0$ とした際の曲げモーメントは式(13)で与えられ、各式を二回積分すれば各点での変位が求められる。その際には6つの積分定数が現れるが、端部境界条件および変位角と変位の連続性から式(14)のように解析的に求められる。

$$\begin{cases} \frac{Ebt_1^3}{6} \left(\frac{x}{l} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Pd_2 x}{l} & (0 \leq x \leq l) \\ \frac{Ebt_1^3}{6} \left(\frac{2l-x}{l} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Pd_2 x}{l} & (l \leq x \leq d_1) \\ \frac{Ebt_1^3}{6} \left(\frac{2l-x}{l} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Pd_1(2l-x)}{l} & (d_1 \leq x \leq 2l) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \frac{4}{3} Ax^{\frac{3}{2}} + C_1 x + C_2 & (0 \leq x \leq l) \\ -4A \left\{ \frac{(2l-x)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2l}{(2l-x)^{\frac{1}{2}}} \right\} + C_3 x + C_4 & (l \leq x \leq d_1) \\ \frac{4}{3} B(2l-x)^{\frac{3}{2}} + C_5 x + C_6 & (d_1 \leq x \leq 2l) \end{cases} \quad (13)$$

Fig. 8 Schematic of robust analysis model.

Fig. 9 Deflection distribution of optimized and flat beam at different concentrated load.

Fig. 10 Maximum deflection of optimized and flat beam at different concentrated load.

Fig. 11 Stress distribution of optimized and flat beam at different concentrated load.

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{6Pd_1 l^{\frac{1}{2}}}{Ebt_1^3}, \quad B = -\frac{6Pd_2 l^{\frac{1}{2}}}{Ebt_1^3} = \frac{d_2}{d_1} A \\
 C_1 &= \frac{l \left(4d_1 B - 2A \left(d_1 + 5l^{\frac{1}{2}}(2l - d_1)^{\frac{1}{2}} \right) \right) + 4l^2(2A - B) - d_1^2(A + B)}{3l(2l - d_1)^{\frac{1}{2}}} \\
 C_2 &= 0 \\
 C_3 &= \frac{l \left(4d_1 B - 2A \left(d_1 + 11l^{\frac{1}{2}}(2l - d_1)^{\frac{1}{2}} \right) \right) + 4l^2(2A - B) - d_1^2(A + B)}{3l(2l - d_1)^{\frac{1}{2}}} \\
 C_4 &= \frac{44l^{\frac{3}{2}}A}{3} \\
 C_5 &= \frac{-l \left(8d_1 + 22Al^{\frac{1}{2}}(2l - d_1)^{\frac{1}{2}} + 2d_1 B \right) + l^2(8B + 32A) - d_1^2(A + B)}{3l(2l - d_1)^{\frac{1}{2}}} \\
 C_6 &= (6l - 2d_1)^{-1} \left(l \left(4(2l - d_1)^{\frac{1}{2}} d_1 B + A \left(16(2l - d_1)^{\frac{1}{2}} d_1 - 44l^{\frac{1}{2}} d_1 \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + l^2 \left(A \left(88l^{\frac{1}{2}} - 64(2l - d_1)^{\frac{1}{2}} \right) - 16B(2l - d_1)^{\frac{1}{2}} \right) + 2B(2l - d_1)^{\frac{1}{2}} d_1^2 + 2A(2l - d_1)^{\frac{1}{2}} d_1^2 \right)
 \end{aligned} \tag{14}$$

上記の結果をもとに、複数の荷重点にて変位分布の比較を行った。Fig. 9 は $l=100$ mm, $b=10$ mm, $t_1=10$ mm, $P=100$ N とした際の各荷重位置 ($d_1=100$ mm, 130 mm, 160 mm, 190 mm) における、板厚徐変梁と等板厚梁との変位分布を比較したものである。図中の垂直な破線は荷重点 d_1 の位置を、黒いプロットは最大変位の位置を表している。中央への集中荷重 ($d_1=100$ mm) につい

ては、制約条件である両方の最大変位は等しくなっているが、 $x=50, 150$ の近くでは板厚徐変梁の方がより大きく変位している。集中荷重が端部に近づくほど板厚徐変梁と等板厚梁の変位分布のずれは大きくなり、板厚徐変梁の最大変位点はより端部に近づく。

Fig. 10 は荷重位置とその際の最大変位の関係を示したものである。中央と両端部を除き板厚徐変梁の変位は

等板厚梁を上回るが、中央部の最大変位を超えることはなく、変位基準での剛性は保たれていることが分かる。

次に同様に応力分布を導出する。最大応力は表面部に現れ、曲げモーメントと断面係数の除によって、板厚徐変構造では式(15)にて表される。Fig. 11はFig. 9と同じ荷重条件での梁の長さ方向の最大応力分布を示したものである。中央集中荷重の場合($d_1=100$ mm)は、板厚徐変梁は平等強さの梁として最大応力が長さ方向に均一となり、等板厚梁の中央部での最大応力よりも小さな値となっている。他方、荷重点が端部に近づくにつれ板厚徐変梁の最大応力は増加し、等板厚梁の最大応力を超えることになる。板厚徐変梁、等板厚梁のそれぞれの $\sigma_{\max}$ の最大値は式(16)にて表されることから、板厚徐変梁は等板厚梁と比べて、最大 $\sqrt[3]{2} \approx 1.27$ 倍の応力が生じる可能性がある。よってロバスト性を考慮すると、剛性基準で最適化した板厚徐変梁については同剛性の等板厚梁よりも、より大きな強度が必要となると言える。

$$\sigma_{\max} = \begin{cases} -\frac{6Pd_2}{2^{\frac{2}{3}}bt_1^2} & (0 \leq x \leq l) \\ -\frac{6Pd_2}{2^{\frac{2}{3}}bt_1^2} \frac{x}{2l-x} & (l \leq x \leq d_1) \\ -\frac{6Pd_1}{2^{\frac{2}{3}}bt_1^2} & (d_1 \leq x \leq 2l) \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{Optimized: Max}(\sigma_{\max}) = \frac{12Pl}{2^{\frac{2}{3}}bt_1^2} \quad (d_1 \rightarrow 0, 2l) \quad (16)$$

$$\text{Flat: Max}(\sigma_{\max}) = \frac{6Pl}{bt_1^2} \quad (d_1 = l)$$

3. E_1/G_{13} 比の最適構造に与える影響

前章では単純化したモデルとして Euler-Bernoulli 仮定で理論解を導出したが、先に述べたように CFRTP では面外せん断弾性率 G_{13} が小さく、せん断変形の影響が無視できない。本章ではせん断変形を考慮した Timoshenko 仮定のもと改めて理論解を導出し、 E_1/G_{13} 比が最適な板厚徐変構造に与える影響について明らかにする。

3.1 Timoshenko 仮定における理論解の導出

せん断変形を考慮した際の梁の最大変位 $\delta_{\max}$ は式(17)で与えられる。ここで k_T は形状係数、 G は面外せん断弾性率 G_{13} を表している。ただし、 k_T は Cowper の文献²⁶⁾ をもとに、矩形断面の場合はポアソン比 ν によって式(18)にて表されるものとする。

$$\delta_{\max} = \frac{12P}{Eb} \int_0^l \frac{(l-x)^2}{t(x)^3} dx + \frac{P}{k_T G b} \int_0^l \frac{1}{t(x)} dx \quad (17)$$

(16)

Fig. 12 Comparison of flat and variable thickness cantilever with same maximum deflection considering shear stress.

$$k_T = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \quad (18)$$

汎関数 F は式(19)で表されるが、右辺第一項について $\rho bt(x)$ の最小化 (最大化) は $t(x)$ の最小化 (最大化) に等しく、 $\lambda' = \lambda P/b$ と置き換えた上で同様にオイラー方程式を解くと板厚分布 $t(x)$ は式(20)のように表される。等厚 t_1 での変位と等しいという制約条件を整理すると式(21)が導かれ、ここに式(20)を代入することで λ' が求められる。ただし、式(21)の右辺の積分項についての厳密解は求められないため、本研究では数値積分を実施して近似値を計算し、左辺と等しくなる λ' を逆問題にて求め、式(20)に代入することで目的とする $t(x)$ の分布を得た。

$$F = W + \lambda \delta_{\max} = \int_0^l \left(\rho bt(x) + \lambda \frac{12P}{Eb} \frac{(l-x)^2}{t(x)^3} + \lambda \frac{P}{k_T G b} \frac{1}{t(x)} \right) dx \quad (19)$$

$$t(x) = \sqrt{\frac{\lambda'}{2Gk_T}} + \sqrt{\frac{\lambda'^2}{4G^2k_T^2} + \frac{36\lambda'}{E}} (l-x)^2 \quad (20)$$

$$\frac{4l^3}{Et_1^3} + \frac{l}{Gk_T t_1} = \frac{12}{E} \int_0^l \frac{(l-x)^2}{t(x)^3} dx + \frac{1}{k_T G} \int_0^l \frac{1}{t(x)} dx \quad (21)$$

Fig. 12 は等板厚梁と板厚徐変構造の外形を比較した図である。ただし、 $l=100$ mm、 $t_1=10$ mm とし、材料には CFRTP の1つの形態である CTT (chopped carbon fiber tape reinforced thermoplastics) を想定し、先行研究で得られた実測値^{27~29)} をもとに PP を母材として $E_1=34000$ MPa、 $G_{13}=1340$ MPa、 $\nu=0.33$ とし、面内方向へは擬似等方性を有するものとする。また、面外方向については、CTT では E_1/E_3 が5~6程度であることから、Euler-Bernoulli や Timoshenko の仮定と同様に板厚方向の圧縮変形が梁の変形に及ぼす影響は無視できるものとしている。板厚の最大値は片持梁の拘束点 (両端

Fig. 13 Sensitivity analysis on minimum thickness.

支持梁における荷重点)での 12.7 mm となり Euler-Bernoulli 仮定での結果とほぼ同じとなるが、最小値は逆側の端部(両端支持梁における支持点)の 1.45 mm となり、最低板厚が存在することになる。これは当該荷重条件では端部においてせん断力が働くことに起因する。この最低板厚の存在によって、Timoshenko 仮定での軽量化率は 15.0%と Euler-Bernoulli 仮定に比べて小さくなる。

3.2 最低板厚の感度解析

Timoshenko 梁の最低板厚は式(20)に $x=l$ を代入することで表されるが、上述のように λ' は解析的には求まらない。よって、感度解析として式(20)の構成パラメータである E , G , l , および k_T の変数である ν を変化させ、最低板厚 $t(l)$ に与える影響を確認した。

Fig. 13 はそれぞれの結果を示したものである。 E は増加、 G , l , ν は減少するにつれ、最低板厚が増加することが示されている。ただし、 ν は取りうる範囲が小さいため他のパラメータよりも感度は低い。なお、板厚分布 $t(x)$ を λ' ではなく $t(l)$ を用いて表すと式(22)にて与えられる。 $E \rightarrow \infty$, $G \rightarrow 0$, $l \rightarrow 0$ のいずれの場合においても $t(x) \rightarrow t(l)$ の一定板厚に収束していくが、その際の $t(l)$ は式(21)の制約から $t(l)=t_1$ となることは自明である。

また、ここで式(22)に $x=0$ を代入し、 $t(0)$ を用いて $t(l)$ を表すと式(23)にて与えられる。同式より最低板厚 $t(l)$ は E/G が増加するほど $t(0)$ に近づき、 l が $t(0)$ より十分大きい場合、 E_1/G_{13} 比の 1/2 乗に概ね比例する。

$$t(x) = \sqrt{\frac{1}{2} t(l)^2 + \sqrt{\frac{1}{4} t(l)^4 + 36 \frac{G}{E} k_T t(l)^2 (l-x)^2}} \quad (22)$$

$$t(l) = t(0) \sqrt{\frac{1}{36 \frac{G}{E} k_T \left(\frac{l}{t(0)}\right)^2 + 1}} \quad (23)$$

Fig. 14 は E_1/G_{13} 比の 1/2 乗と最低板厚の関係性を示

Fig. 14 Sensitivity analysis on minimum thickness.

Table 1 Mechanical properties of referenced material.

Properties	Steel	Al	CTT	CMT
Young's modulus [GPa]	205,000	70,000	34	14
Shear modulus [GPa]	79,000	26,000	1.34	1
Poisson's ratio	0.3	0.33	0.33	0.3
Density [g/cm ³]	7.8	2.7	1.35	1.08

 Fig. 15 The temperature influence on E_1 and G_{13} of CMT (PP).

したものである。図中の縦線は、Table 1 に示される鉄鋼、アルミ、CTT、CMT (carbon fiber mat reinforced thermoplastics) の E_1/G_{13} 比の 1/2 乗を表している。CMT の物性パラメータも前述の先行研究^{27~29)} をもとにしており、母材は同様に PP で、CMT は面内等方性を有し、 $E_1/E_3 \approx 3$ であることから CTT と同様に板厚方向の圧縮変形が梁の変形に及ぼす影響は無視できるものとしている。鉄鋼、アルミといった金属材料に比べ CTT、CMT は E_1/G_{13} 比が高いため、最適な板厚徐変構造における端部の最低板厚はより大きく確保する必要がある。例えば $l=100$ mm の場合、鉄鋼で必要となる最低板厚は 0.45 mm であるのに対し、CTT では前節で示した通

り 1.45 mm と 3 倍程度の違いが生じる。

また, CTT, CMT の特徴の一つに弾性率の温度依存性がある。Fig. 15 は PP を母材とする CMT における, 先行研究⁸⁾ のデータを元に作成した, 温度と弾性率の関係を示した図である。温度が上昇するにつれ E_1 , G_{13} ともに減少していくが, G_{13} の方が急速に減少していくため, 結果として E_1/G_{13} 比が大きくなることが分かる。よって高温環境下ではより大きな最低板厚を持つ必要がある。加えて, CTT ではテープ厚さが一定の場合, 板厚が薄すぎると力学特性のばらつきが大きくなることも報告されており³⁰⁾, さらには接合, 特にボルト接合を考えた際にはより注意が必要となる。こうした特徴からも実際に CFRTP 梁にて最適板厚徐変構造を適用する際には, 端部の最低板厚は計算値よりも十分な安全率を確保する必要がある。

4. 構造変更と材料代替による軽量化ポテンシャル

本研究で検討した板厚徐変構造と材料代替を組み合わせることで, 曲げ剛性一定下での CFRTP の軽量化ポテンシャルを算出する。縦弾性係数 E_a の等板厚梁と最大変位が等しくなる縦弾性係数 E_b の板厚徐変梁の板厚分布は, Euler-Bernoulli 仮定では式(24)のように表される。重量比は式(25)にて表され, $\sqrt[3]{2} \cdot (2/3)$ が構造最適化による寄与, 縦弾性係数と比重で表される項が材料代替による寄与となり, それぞれの積で最終的な重量減少率が導出される。Timoshenko 仮定の場合は Euler-Bernoulli 仮定での定式化はできないが, 数値計算により重量減少率が算出される。

$$t(x) = 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{E_a}{E_b} \right)^{\frac{1}{3}} t_1 \left(\frac{l-x}{l} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

$$\frac{W_b}{W_a} = \frac{\rho_b b \int_0^l t(x) dx}{\rho_a b h_1 l} = 2^{\frac{1}{3}} \frac{2}{3} \left(\frac{E_a}{E_b} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\rho_b}{\rho_a} \quad (25)$$

Table 2 は Table 1 で示した鉄鋼, アルミ, CTT,

Table 2 Comparison of weight reduction potential (Steel, flat beam=1).

	Steel	Al	CTT	CMT
Material change only	—	0.495	0.315	0.338
Material change + thickness optimization (Euler-Bernoulli)	—	—	0.264	0.285
Material change + thickness optimization (Timoshenko)	—	—	0.299	0.321

CMT の物性値をもとに, 材料代替と板厚徐変構造の適用による理論的な軽量化ポテンシャルを算出したものである。鉄鋼の等板厚梁を基準 (重量 1) とした際のそれぞれの重量を相対的に示したものであり, 板厚徐変構造は CMT, CTT のみに適用可能としている。せん断力を考慮しない Euler-Bernoulli 仮定の場合, 構造変更と材料代替により CTT では 73.5%, CMT では 71.5% の軽量化ポテンシャルとなる。Timoshenko 仮定の場合では, 最低板厚の関係から Euler-Bernoulli 仮定よりも値は小さくなるが, それでも CTT では 70.1%, CMT では 67.9% と大きな軽量化ポテンシャルを有する。

5. 結 言

本研究では CFRTP にて成形が可能な板厚徐変構造に着目し, 理論解析を通じてその最適構造の特徴, 材料物性が与える影響, 軽量化ポテンシャルを明らかにした。得られた結論は以下の通りである。

- せん断力を考慮しない Euler 梁の場合は, 集中荷重・等分布荷重ともに解析的に板厚徐変構造の最適形状を導出することが可能となり, 理論的な軽量化率は等厚梁との比較でそれぞれ 16.0%, 24.7% となる。
- ロバスト性の観点から板厚徐変構造を評価すると, 剛性 (最大変位) 基準では, 任意の荷重位置において等板厚梁の最大変位を下回るが, 強度基準では端部近辺で等板厚梁の最大応力を上回る部分がある。等板厚梁と比べて最大で $\sqrt[3]{2} \approx 1.27$ 倍の応力が生じるため, 板厚徐変構造の設計時には強度面では若干の裕度を持つ必要がある。
- せん断力を考慮する Timoshenko 梁かつ集中荷重の場合は, せん断力がかかることから最低板厚が存在する。端部の最低板厚は縦弾性率 E_1 , 面外せん断弾性率 G_{13} , 長さ l の影響を受け, E_1/G_{13} 比の 1/2 乗に概ね比例する。CFRTP は母材となるマトリックスの関係から E_1/G_{13} 比が高い傾向にあることに加え, 高温環境下ではさらに E_1/G_{13} 比が高まる傾向にあること, また, 板厚の薄さによる力学特性のばらつきの増加等からも, 板厚徐変構造を実際に適用する際には端部での最低板厚は計算値よりも十分に確保する必要がある。
- 最適な板厚徐変構造の適用と材料代替の両方の効果によって理論的な軽量化率が導出される。鉄鋼の等厚梁との比較の場合, Timoshenko 仮定にて CTT では 70.1%, CMT では 67.9% の軽量化ポテンシャルを持つことになる。ただし, せん断力を仮定しない Euler 梁に比べると, 端部での最低板厚の関係から, 軽量化ポテ

ンシャルは低くなる。

本研究の一部は経済産業省—NEDO プロジェクト「革新的新構造材料等技術開発」(平成 25～平成 28 年)の一環として行われたものであり、開発中の試料並びに評価データの提供等、関係各位のご協力に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) J.P. Blasques : *Compos. Struct.*, **111**, 1 (2014), 45-55.
- 2) O. Sigmund & S. Torquato : *Smart Mater. Struct.*, **8**, 3 (1999), 365-379.
- 3) X. Yan, X. Huang, Y. Zha, & Y.M. Xie : *Comput. Struct.*, **133** (2014), 103-110.
- 4) J. Brauns & K. Rocens : 3rd International Conference CIVIL ENGINEERING (2011), pp. 103-108.
- 5) M. Zhou, R. Fleury & M. Kemp : 7th altair CAE technology conference (2011).
- 6) D.R. Tobergte & S. Curtis : 8th Wolrd Congr. Struct. Multidiscip. Optim. (2009).
- 7) W. Nagatsuka, T. Matsuo, T. Murakami & J. Takahashi : 17th European Conference on Composite Materials (2016).
- 8) 長塚 渉, 松尾 剛, 村上 岳, 平野啓之 : 日本複合材料学会誌, **41**, 3 (2015), 75-84.
- 9) 山下慎一郎, 大澤 勇, 松尾 剛, 張 昕, 高橋 淳 : 日本複合材料学会誌, **39**, 6 (2013), 221-230.
- 10) 西脇眞二, 泉井一浩, 菊池 昇 : トポロジー最適化, 丸善出版 (2013).
- 11) W. Prage : *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **3**, 3 (1974), 349-355.
- 12) K. Svanberg : *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **28**, 1 (1981), 63-80.
- 13) O.C. ZienJdewicz & J.S. Campbell : *Optimum Structural Design*, John Wiley & Sons (1973).
- 14) 畔上秀幸 : 計算工学, **2**, 4 (1997), 239-247.
- 15) M.P. Bendsøe & O. Sigmund : *Arch. Appl. Mech.*, **69**, 9-10 (1999), 635-654.
- 16) T. Yamada, K. Izui, S. Nishiwaki, & A. Takezawa : *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **199**, 45 (2010), 2876-2891.
- 17) M. Otomori, T. Yamada, K. Izui & S. Nishiwaki : *Trans. JAPAN Soc. Mech. Eng. Ser. C*, **77**, 783 (2011), 4001-4014.
- 18) N. Olhoff : *Int. J. Solids Struct.*, **10**, 1 (1974), 93-109.
- 19) N. Olhoff : *Optimization in Structural Design*, Springer, Berlin (1975), pp. 82-103.
- 20) 藤井大地, 菊池 昇 : 日本建築学会構造系論文集, **535** (2000), 79-86.
- 21) 加藤準治 : 土木学会論文集, **68**, 2 (2013), 1-4.
- 22) 萩原一朗, Tenek H. Lazarus : 日本機械学会論文集, **61**, 587 (1995), 33-40.
- 23) 大堀敏郎, 李 漢哲, 大澤 勇, 高橋 淳 : 日本複合材料学会誌, **43**, 2 (2017), 65-73.
- 24) Y. Ben-Haim : *Info-Gap Decision Theory: Decisions Under Severe Uncertainty*. Academic (2006).
- 25) D. Moens & D. Vandepitte : *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **194**, 12 (2005), 1527-1555.
- 26) G.R. Cowper : *J. Appl. Mech.*, **33**, 2 (1966), 335.
- 27) 後藤壮滋 : コーナー部を有する熱可塑性 CFRP 構造物の強度設計に関する研究, 平成 25 年度東京大学修士論文 (2012).
- 28) 松尾 剛, 村上 岳, 管 満春, 住山琢哉, 坂口圭祐 : 第 40 回複合材料シンポジウム (2015), C2-4.
- 29) 上瀧浩邦 : 熱可塑性 CFRP 部材の曲げ荷重下での力学特性に及ぼす接合方法の影響, 平成 27 年度東京大学修士論文 (2015).
- 30) S. Yamashita, Y. Nakashima, J. Takahashi, K. Kawabe, & T. Murakami : *Composites Part A: Appl. S.*, **90** (2016), 598-605.