研究論文

曲率 CFRP 積層板の衝撃損傷後圧縮強度に関する 実験的研究

岩 堀 豊^{*1}, 横関 智弘^{*2}, 佐藤 豊弘^{*3}

(2017 年 8 月 3 日受付)

Experimental Investigation of the Compression after Impact Strength of Curved CFRP Laminates

Yutaka IWAHORI,^{*1} Tomohiro YOKOZEKI^{*2} and Toyohiro SATO^{*3}

(Received August 3, 2017)

Abstract: Impact damage characteristics and compression after impact (CAI) strength of curved CFRP laminates were experimentally investigated. Various curved and flat CFRP laminates were prepared with special impact fixtures and compression loading fixtures. Impact tests with a range of energy levels were executed on the prepared laminates. Damage areas and their shapes after impact on the curved CFRP laminates were measured by an ultrasonic C-scanning machine. It was found that the CFRP curvature affected the impact delamination shapes (aspect ratio: AR). The delamination propagation direction followed the specimen curvature which was increased with increasing AR . After C-scope observations of delamination, compression strength tests were performed. CAI strength degradation was detected on several curvatures of 0.004 and 0.01. To further investigate the relation between CAI strength and delamination shapes, we calculated a shape factor (S) that was considered for a rectangular plate in the buckling equation. Using the actual delamination sizes as the plate size parameters in the rectangular plate buckling equation, S was calculated. The impact energy and curvature as functions of S showed very similar trends when correlated to their CAI strength test results. The results presented herein suggest that the CAI strength of curved specimens is closely related to their delamination sizes and shapes that are determined by the curvatures in the specimens.

Key words: CAI strength, Impact delamination, curved panel, CFRP laminates

1. 結 言

積層した複合材料の衝撃による損傷付与後の圧縮強度 (compression after impact strength: CAI 強度) は、航空機複合材構造設計において、非常に重要な機械的特性であることは言うまでもない。これまでに CAI 強度向

上のため、多くの研究者が樹脂改質やナノファイバー等の添加による層間破壊靱性向上^{1,2)}や、縫合、タフテイング、Z-anchor, 3D 織物, Z-pin 等の層間繊維強化^{3~7)}による層間破壊靱性向上に関する研究を行っている。また、CAI 強度に対する損傷部分の破壊挙動やそのメカニズムの研究は、石川、末益ら^{8~10)}によって進められ、衝撃

^{*1} 宇宙航空研究開発機構 航空技術部門 構造・複合材技術研究ユニット 上席研究開発員

Senior Researcher, Structures and Advanced Composite Research Unit, Aeronautical Technology Directorate, Japan Aerospace Exploration Agency

^{*2} 東京大学 大学院工学系研究科 航空宇宙工学専攻 准教授

Associate Professor, Department of Aeronautics and Astronautics, Graduate School of Engineering, The University of Tokyo

^{*3} 住友精密工業株式会社 航空宇宙技術部 油空圧設計課 課長

Material Engineer, Hydraulic & Pneumatic Design Section, Engineering & Development Department - Aerospace, Sumitomo Precision Products Co., LTD.

損傷部分を円筒形モデルとした有限要素法解析を用いて、積層構造の安定性や剥離進展を実験と比較しながら評価した。

一方、実務的な観点では、CAI強度を取得する試験法として、SACMA SRM 2R-94¹¹⁾、ASTM D7136/7137^{12,13)}、ISO 18352¹⁴⁾、JIS K 7089¹⁵⁾ 等いくつかの規格が存在しており、設計データベース取得^{16,17)} や実験研究¹⁸⁾ 等において使用されている。これらの規格では、衝撃付与治具の形式や寸法、試験片寸法、圧縮試験法はほぼ共通であり、100 mm×150 mmの矩形で、板厚が4~6 mmの板を用いて試験を行う規格となっている。

ところで、前述の研究や試験規格では、試験片は平面を前提としているが、実際の構造物では（特に航空機構造）曲率を有することが多く、これらの曲率に対する衝撃付与後の損傷形状や寸法、またそれらのCAI強度がどのような変化を生ずるのかは定かではない。そのため本論文では、異なる曲率を有するCFRP積層板試験片（単に曲率試験片と呼ぶ）に衝撃損傷を与え、発生した損傷面積や形状の特徴を調べるとともに、損傷を含む曲率試験片のCAI強度特性を明らかにすることを目的とする。曲率に対するCFRP積層板の衝撃損傷剥離の面積・形状や、損傷付与後の圧縮強度特性に平板との違いがあるとすれば、それらは今後の設計や研究に有用な情報となると考えられる。

2. 実 験

2.1 試 験 片

試験片の材料は、TORAYCA®一方向プリプレグ P2352W-19(T800S/3900-2B)（東レ(株)製）を使用した。本プリプレグは、177°C(350°F)硬化である。試験片の内面の曲率半径を、32 mm(R32)、50 mm(R50)、100 mm(R100)、250 mm(R250)、∞(Flat)として、オートクレーブ成形にて試験片を製作した。試験片は、(株)UCHIDAが製作した。試験片の短辺内側の弧の長さは100 mm、長辺の長さは150 mmに設定し、ASTM D7136/7137^{12,13)}の平板試験片の100 mm×150 mmと同長とした。積層配向は、疑似等方積層([45/0/-45/90]4S)とした。板厚は約6 mmである。Fig. 1に試験に用いた曲率の試験片写真を示す。また、Table 1に試験片の曲率半径、曲率及び試験数を示す。

2.2 損傷付与及び圧縮試験

平板試験片に対する損傷付与用の支持治具を参考に、曲率試験片に対する損傷付与用の支持治具を製作した。Fig. 2(a)に損傷付与用試験片支持治具写真の一例(R250

Fig. 1 Test specimens for several curved CFRP laminates.

Table 1 Prepared specimen radius, curvatures, and number of specimens.

Radius* (series)	R32	R50	R100	R250	Flat
Curvature (1/mm)	0.0313	0.020	0.010	0.004	∞
Number	6	12	12	6	12

* "R" is indicated the inside radius of the specimen.

(a) Example of impact fixture for R250 series

Rubber bands

(b) Test set photograph before R250 impact

Fig. 2 Impact fixtures.

Fig. 3 Constraint conditions on a compression loading fixture.

用)を示す。支持治具の素材はアルミニウムとした。これらの治具面は、それぞれの試験片曲率に応じた曲率を有しており、治具の内側に 70 mm×125 mm の試験片と接しない部分を設けた(窓部)。また、落錘衝撃試験機によって損傷を付与する際に、試験片が移動することを防止するため、試験片と損傷付与用治具とをゴムバンドで固定した。Fig. 2 (b)に試験片の設置状況を示す。それぞれの曲率試験片に対して、落錐型衝撃付与装置(Instron 社製 9250 V)によって、3.35 J/mm, 6.7 J/mm, 10.05 J/mm, 13.40 J/mm の 4 種類の衝撃エネルギーによる損傷を与えた。ストライカ先端の半径は、5/8 in である。衝撃損傷付与後、各試験片に対する超音波探傷 C スコープ(以下、C スコープと呼ぶ)画像を超音波探傷装置(日本クラウトクレマー社製高速・広域超音波探傷機 HIS3)によって取得した。

(a) Feature of compression fixture before compression test

(b) R32 fixture

(c) R250 fixture

Fig. 4 Compression after impact test sets for curved specimens.

曲率試験片の衝撃付与後圧縮試験を実施するため、円弧状の短辺を有する試験片を平板規格と同様な拘束条件で圧縮できるよう、特殊な圧縮試験治具を製作した。試験片の短辺(上下)支持条件は、他の CAI 規格試験と同様に固定支持(回転・並進共に拘束)とするため、試験片短辺端から約 8 mm について、表裏両側面から治具で押さえる方式とした。長辺 2 辺については単純支持(回転フリー、並進拘束)とするため、試験片の表裏を先端に R をつけた治具によって線接触で挟むような回転フリーの拘束とした。Fig. 3 (a) (b)に拘束条件の概要図及

Fig. 5 C-scan results after impact.

び写真を示す。試験片の曲率に合わせて、平板を含む5種類（シリーズ）の曲率試験片に対する圧縮治具を使用する。Fig. 4(a)にR50の試験片をセットした状態の圧縮試験治具の外観を示す。本写真は治具外観を見やすくするため、圧縮時に試験片上部を固定支持し荷重を導入する金具を外した状態である。また、Fig. 4(b) (c)には、R32及びR250の試験片がセットされ、強度試験装置内に配置した圧縮試験前の写真を示す。圧縮試験機は電動ボールねじ式万能試験機 (Instron 5589, 250 kN 容量) を使用した。試験速度は、0.5 mm/min とした。試験片の歪量については、荷重負荷に伴う試験機の剛性を補正したクロスヘッド変位量を用いた。

3. 試験結果

3.1 衝撃付与後の超音波探傷結果

Fig. 5に各曲率と衝撃エネルギーに対するCスコープ画像を示す。曲率試験片に対しては試験片を曲率半径の中心付近で回転させながらCスコープ画像を取得し、その画像情報を100 mm×150 mmの平面となるように展開して、損傷寸法を比較できるようにした。曲率試験片の短辺は平板の短辺と同寸法に平面画像に展開されている。

同衝撃エネルギー付与の損傷の外観を比較すると、R100シリーズの試験片が最も大きかった。また、R100, R50,

Fig. 6 Relationship between impact energy and delamination area.

R32シリーズについては、衝撃エネルギーが増加するに従い、損傷が試験片の長手方向（荷重負荷方向）に拡大していく様子が見て取れる。これらの取得したCスコープ画像から損傷面積を画像解析によって求め、衝撃エネルギーとの関係をFig. 6に示す。この図からは、衝撃エネルギーが増加するに伴い、損傷面積が増加していくことがわかる。また、R100シリーズについては、特にインパクトエネルギーに対する損傷面積の増加割合が高く、R250, Flatシリーズは増加割合が低いことがわかる。

(a) 6.7 J/mm

(b) 13.4 J/mm

Fig. 7 Stress-strain plots for various curvature of CAI strength tests.

3.2 CAI 強度試験結果

圧縮強度試験用治具は前述の各曲率試験片に合わせた負荷治具を使用した。Fig. 7 に曲率の異なる CAI 試験の圧縮応力-歪線図の例を示す。衝撃付与エネルギーは、(a) 6.7 J/mm 及び、(b) 13.4 J/mm である。Fig. 7(a) では、曲率の大きい R32, R50 及び Flat (平板) がほとんど同じ強度を示している。一方、R100 及び R250 の強度が低い。R100, R250 はともに 4,000 μst 付近から応力-歪線図の上昇が鈍化している様子がわかる。Fig. 7(b) では曲率の大きい R32 が最大強度を発現しており、R50, Flat, R100, R250 の順に低下している。R100, R250 については、3,500 μst 付近から応力-歪線図の上昇が鈍化し破壊に至っていた。

Fig. 8 に衝撃エネルギーと CAI 強度との関係を示す。衝撃エネルギー 0 でのプロット値は、無損傷の平板 CAI 供試体の破壊強度であり、試験片負荷端部が破壊したときの

Fig. 8 Impact energy and CAI strength plots.
* Load end edge failure.

Fig. 9 Relationships between curvature and CAI strength for various impact levels.

値である。よって、通常の無孔圧縮試験強度とは異なることに注意されたい。同材料の無孔圧縮強度¹⁷⁾は 698 MPa でさらに高い。一般的に衝撃エネルギーの増加に伴い、CAI 強度は低下した。曲率の大きい R32, R50 シリーズでは、衝撃エネルギーの増加に伴う CAI 強度が他のシリーズよりも極端に低下せず、6.7 J/mm 以降も残存強度が維持されていた。

次に、試験片曲率と CAI 強度との関係を Fig. 9 に示す。本図から、衝撃エネルギーが 6.7 J/mm 以上の条件で、試験片曲率が 0.004 (R250) 及び 0.01 (R100) では、他の曲率よりも CAI 強度が低下する傾向にあることがわかった。

4. 考 察

4.1 試験片曲率と衝撃損傷形状

各曲率試験片に対する損傷の形状を調べるため、試験

Fig. 10 Delamination shapes (width “ d ” and height “ h ”).

Fig. 11 Relationship between aspect ratio (AR) and curvature.

片長手方向の損傷長さを h 、幅方向の損傷長さを d としてそれらの関係をプロットした結果を Fig. 10 に示す。図中の破線は、 h と d が同量の場合を示している。円形等縦横長さが等しい損傷形状が観察された場合は、この破線上にプロットされることになる。プロットの分布を見ると、曲率が大きい試験片 (R32, R50, R100 シリーズ) は破線の上方、すなわち長手方向に損傷が進展している様子がわかる。一方、曲率が少ない試験片 (R250, Flat シリーズ) では破線上近く、もしくは下方にプロットされている。よって、試験片曲率によって衝撃損傷の進展方向が変化し、曲率が増加すると試験片の長手方向に損傷が進む傾向にあることがわかる。ここで衝撃損傷の h と d との比をとり、縦横比 ($AR: h/d$) とする。この AR と曲率半径との関係を Fig. 11 に示す。曲率半径の増加によって AR は増加する傾向にあることが見て取れる。また、多少のばらつきはあるものの、衝撃エネルギー量による AR 変化は比較的少ないことがわかる。以上の結果から、曲率試験片に衝撃損傷を与えた場合、曲

率が小さい場合は、 AR はほぼ 1.0 近く縦横比が同程度で進展し、曲率が増加すると AR が増加し損傷は長手方向に多く進展する傾向となることがわかった。試験片曲率増加に伴う AR の変化は、試験片の曲率が主に関係すると推定できる。

4.2 曲率試験片損傷形状と CAI 強度

CAI 強度は、CFRP 積層板内に存在する層間剥離や繊維破断、あるいは樹脂亀裂等の衝撃損傷弱部分が応力増加によって局部座屈や破壊が開始し、さらに破壊が進展して板幅全体破壊に至るものと考えられ、複雑な現象が重なり精度良く CAI 強度を予測することは非常に難しい。ここでは現象を単純化し、CAI 強度が損傷部分の局所的な座屈強度に関係すると仮定し、損傷部分の座屈強度と形状について考察する。曲率を有する板に対する座屈強度は文献^{19,20)}等に述べられている通り、曲率が座屈強度に影響することは明らかではあるが、CFRP 積層板内損傷剥離部分の座屈に有効な板厚や物性値の設定が非常に複雑になるため、ここでは損傷部分を平板と仮定し考察を進める。

CFRP 積層板内の損傷域を四辺周辺固定支持、一方向負荷状態の矩形平板と仮定し、この部分の座屈強度を考える。四辺周辺固定支持、一方向負荷状態の矩形板に対する一般的な座屈応力式を式 (1) に示す²¹⁾。

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 \cdot D}{t \cdot b^2} k_c \quad (1)$$

σ_c : Buckling stress

b : width of clamped support loaded edge

D : $Et^3/12(1-\nu^2)$

E : Modulus of elasticity of material of plate

t : thickness of the plate

ν : Poisson's ratio

k_c : Buckling coefficient: a coefficient depending on the ratio of length to width of the plate (a/b)

a : length of clamped support unloaded edge

式 (1) の平板の縦横寸法 (a , b) を C スコープで計測した衝撃損傷域の縦横寸法 (h , d) とし、損傷部の部分的な座屈強度に置き換えて式 (2) に書き直す。

$$\sigma_d = \frac{D_d \cdot \pi^2}{d^2 \cdot t_d} k_c \quad (2)$$

σ_d : Delamination local buckling stress,

d : Delamination width by C-scope value

h : Delamination height by C-scope value

t_d : Delamination laminate effective thickness

Fig. 12 Relationships between curvature and S, CAI strength for Fig. 7's specimens.

k_c : Buckling coefficient: a coefficient depending on the ratio of length to width of the plate (h/d)
 D_d : $Et^3/12(1-\nu^2)$ for delaminated part

ここで、式(2)右辺の損傷幅 d^2 及び h/d によって決まる座屈係数 k_c をまとめて、式(3)とし、shape factor (S) と呼ぶことにする。

$$S = \frac{k_c}{d^2} \quad (3)$$

S: Shape factor,

さらに式(3)を式(2)に代入すると、式(4)のように記すことができる。

$$\sigma_d = \frac{D_d \pi^2}{t_d} \cdot S \quad (4)$$

式(4)は、損傷部の形状寸法に対する座屈係数と損傷幅に関するパラメータの部分(S)と、曲げ剛性や座屈に関与する板厚に関するパラメータの部分とに分けられる。以降、この S について衝撃損傷形状計測結果を使用して算出し、CAI 強度との関係を考える。なお、座屈係数は、損傷形状 (h/d) を用いて参考文献 21) の周辺固定支持の場合の曲線を用いて算出した。

Fig. 13 Relationships between impact energy and S, CAI strength.

前出の Fig. 7(a) (b) に示した曲率の異なる試験片に対する応力-歪線図では、R100 や R250 に破壊前の剛性低下が発生し、損傷部における座屈が発端となり、試験片全体の最終破壊に至ったものと考えられる。Fig. 12(a) (b) に、Fig. 7(a) (b) の衝撃エネルギーに対応した S と CAI 強度との関係を示す。これらのグラフから、各試験片の CAI 強度の高低と S の変化傾向が一致していることがわかった。

R250 及び R32 シリーズについて、衝撃エネルギーと S との関係を示す。本図には、Fig. 8 に示した各衝撃エネルギーに対する CAI 強度とともに、 S の平均値とその近似曲線とを同時に示した。その結果、R250 の場合(a)の衝撃エネルギー増加に伴う CAI 強度低下や、R32 の場合(b)の強度維持傾向が、 S の推移と一致しており、曲率の大小にかかわらず衝撃エネルギー増加に伴う CAI 強度値の変化と S の変化傾向とが一致していることが明らかとなった。他のシリーズの CAI 強度低下と S の推移との関係もよく一致していた。

また、試験片曲率と S 及び CAI 強度との関係を、6.7 J/mm, 10.05 J/mm の衝撃エネルギー付与のケースについて Fig. 14(a) (b) に示す。本図には、各試験片曲率に対する CAI 強度と各曲率における S の平均値の近似曲線を同時に示した。その結果、試験片曲率と S との関係は、

Fig. 14 Relationships between curvature and S , CAI strength.

Fig. 15 Relationships between CAI strength and shape factor.

CAI 強度が試験片曲率 0.004 (R250) 及び 0.01 (R100) で低くなる傾向と類似していることが明らかとなった。

Fig. 15 に全 CAI 強度とその強度に対応する S との関係を示す。全体的なばらつきは大きいものの、 S の減少に従い、CAI 強度が低下する傾向が見て取れる。

以上、曲率の異なる同衝撃エネルギー付与試験片に対する CAI 強度の変化、衝撃エネルギーと CAI 強度との変化、及び試験片曲率と CAI 強度の変化の傾向について、 S との関係調べたところ、何れの場合も CAI 強度と S が連動して変化していることがわかり、 S の基となる衝撃後損傷形状寸法が CAI 強度に関与していることが示唆

された。

本研究では曲率の変化に対する CFRP 積層板の衝撃損傷の形状変化を計測し、これらの損傷部分の形状寸法から算出した S に着目して CAI 強度との関係を考察した。その結果、試験片曲率が衝撃付与時の損傷形状寸法に影響すること、さらにその後の衝撃後損傷形状寸法が CAI 強度に関与している可能性が高いことを示した。ここで設定した S は C スコープ計測による平面損傷形状の縦横寸法を用い、曲率の影響は含めていない。また、曲率を有する積層板内の損傷に関する構造や剛性に対する考察までには及んでいない。今後、さらに曲率を有する損傷部の破壊特性を解明するためには、衝撃エネルギー付与に伴う曲率 CFRP 積層板の衝撃損傷進展メカニズム及び衝撃損傷形状寸法の推定、その後の CAI 強度に対する試験片曲率の影響とその強度推定、さらに積層配向に関する衝撃損傷形状寸法及び強度影響等を明らかにしていく必要がある。衝撃付与時及び荷重負荷時の損傷部の座屈発生状況や破壊挙動をより詳細に観察し、構造解析と比較しながら丁寧に調べていく必要があると考えられる。

5. 結 論

曲率を有する試験片について、衝撃後圧縮試験を行い、衝撃損傷部分の形状寸法、CAI 強度を取得し考察した。以下に結論を示す。

1. 試験片の曲率によって、損傷の形状 (AR) が変化し、曲率が大きいほど AR は増加する (縦長形状となる)。また、この AR は主に試験片曲率に関係する。
2. 特定の試験片曲率 (0.004 及び 0.01) において CAI 強度が低下する傾向がある。
3. 損傷部分を矩形平板と仮定し、形状寸法と座屈係数に関する S を設定し、C スコープ画像により取得した損傷部分の形状寸法を使って S と CAI 強度との関係を調べた。その結果、曲率の異なる試験片に対する同衝撃エネルギー付与試験片の CAI 強度の高低、衝撃エネルギー増加による CAI 強度の推移、特定の試験片曲率 (0.004 及び 0.01) で CAI 強度が低下する傾向について、 S が連動して変化していることを示した。また、全 CAI 強度と対応する S の関係から、 S の減少によって CAI 強度が低下する傾向を示した。
4. 以上から曲率を有する CFRP 積層板の衝撃損傷の形状寸法はその曲率によって影響され、その後の損傷部の座屈特性が変わり CAI 強度に影響を与えると考えられる。

本研究の実験実施にあたっては、IHI ジェットサービスの青木淳子氏、滝口良氏、小塚雄一郎氏、蓮見理雄氏に多大なる支援を頂きました。ここに感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) L. Pilato & M. Michno : *Advanced Composite Materials*, Springer, Berlin, Heidelberg (1994), pp. 138-141.
- 2) K. Scobbie, P. Tsotra, J. Hoge, P. Chistour, C. Knipprath, A.A. Skordos, S. Nilsson, L.E. Asp & A.K. Pickett : Development of high toughness epoxy resins for liquid composite moulding, *Proc. ICCM-17* (2009).
- 3) Y. Iwahori, K. Nakane & N. Watanabe : *Compos. Sci. Technol.*, **69**, 14 (2009), 2315-2322.
- 4) G. Farley : *J. Compos. Mater.*, **26**, 12 (1992), 1784-1795.
- 5) 岩堀 豊, 山田 健, 石橋正康, 福岡俊康, 石川隆司, 邊 吾一 : 第 33 回 FRP シンポジウム講演論文集 (2004), pp. 213-215.
- 6) E. Archer, S. King, J.P. Quinn, S. Buchanan & A. T. McIlhagger : Compact damage analysis of 3d woven carbon fibre composites using computed tomography, 18th International Conference on Composite Materials (2011).
- 7) S.M. Ahn, C.H. Yeom, I.H. Hwang & D.S. Lee : New manufacturing method of Z-pinned composite laminates, 51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference 18th (2010).
- 8) T. Ishikawa, M. Matsushima, Y. Hayashi & M.L. Scott : *Adv. Compos. Mater.*, **14**, 3 (2012), 239-261.
- 9) H. Suematsu, T. Kumagai & K. Gozu : AIAA Meeting Papers on Disc (1996), pp. 2552-2559.
- 10) 末益博志, 中村賢治, 石川隆司 : 日本航空宇宙学会論文集, **51**, 595 (2003), 61-62.
- 11) SACMA SRM 2R-94 Compression After Impact Properties of Oriented Fiber-Resin Composites.
- 12) ASTM D7136/D7136M-15, Standard Test Method for Measuring the Damage Resistance of a Fiber-Reinforced Polymer Matrix Composite to a Drop-Weight Impact Event, ASTM International.
- 13) ASTM D7137/D7137M-12, Standard Test Method for Compressive Residual Strength Properties of Damaged Polymer Matrix Composite Plates, ASTM International.
- 14) ISO 18352, Carbon fiber reinforced plastics—Determination of compression-after-impact properties at a specified impact-energy level.
- 15) JIS K 7089, 炭素繊維強化プラスチックの衝撃後圧縮試験方法.
- 16) SAE/ASTM, The Composite Materials Handbook-17 (CMH-17).
- 17) 森本哲也, 杉本 直, 加藤久弥, 原 栄一, 安岡哲夫, 岩堀 豊, 小笠原俊夫, 伊藤誠一 : JAXA 先進複合材料力学特性データベース, JAXA-RM-14-004 (2015).
- 18) 田中 潔, 平松幹雄, 辻井泰孝 : 日本機械学会論文集 (A 編), **61**, 586 (1995), 1265-1272.
- 19) M. Schildcrout & M. Stein : NACA-TN-1928 (1949).
- 20) 小林繁夫 : 航空機構造力学 (4 版), 丸善株式会社 (1999), p. 171.
- 21) G. Gerard & H. Becker : Hand book of structural stability plate-buckling of flat plates, NACA TN 371 (1957).