研究論文

直交異方性積層材の剛性特性と最適化 (円筒殻への応用)

福 永 久 雄*

(1984年9月20日受付)

Stiffness Characteristics and Optimization of Orthotropic Laminates (Application to Cylindrical Shells)

H. FUKUNAGA*

(Received September 20, 1984)

This paper first treats the relation between in-plane and out-of-plane lamination parameters and the relation between lamination parameters and laminate configurations. Next, on the basis of these relations, the laminate configuration which gives the highest buckling stress of orthotropic laminated cylindrical shells under axial compression or external pressure is examined. It is shown that a special cross-ply laminate is the optimal laminate configuration for the buckling of cylindrical shells under external pressure.

1. 序

CFRPのように異方性の強い一方向繊維強化材料より成る積層材においては、各層の繊維の配向角、積層順序により面内および面外の剛性が著しく変化する。その結果、座屈・振動のような力学的特性も積層構成（各層の繊維の配向角、積層順序）により非常に変わるので複合材料を有効に利用するためには最適な積層構成を選ぶことが重要となってくる。

このような剛性支配の力学的特性は、積層パラメータの導入により理解しやすくなる。三木¹⁾は面内積層パラメータを用いて面内剛性の評価方法を示した。また、著者²⁻⁴⁾は面外積層パラメータを用いて直交異方性積層板の座屈・振動特性を調べ最適設計を行なった。直交異方性積層板では、座屈・振動特性を支配するのが面外積層パラメータだけで面内積層パラメータには依存しないため座屈荷重や基本固有振動数を最大とする最適積層構成が比較的容易に得られた。

一方、積層円筒殻においては一般に面内変形と面外変形とが連成するため、カップリング効果を無視した場合でも、座屈・振動のような力学的特性は面内積層パラメータと面外積層パラメータの両方に依存する。面内積層パラメータと面外積層パラメータとは完全に独立な変数ではないので、まずこの両者の関係を知る必要がある。三木⁵⁾は $0, \pm\theta_1, \pm\theta_2$ の3種類の配向角から成る積層材について、ある面内剛性（面内積層パラメータ）のときに必要な面外剛性を与える積層構成を求める手法を示しているが、積層パラメータを設計変数として用いる最適設計の観点からは、より一般的な面内積層パラメータと面外積層パラメータの関係を求める必要がある。

本論文では、まず初めに、ある面内積層パラメータに対応する面外積層パラメータの許容領域を示し、許容領域内の面内・面外積層パラメータに対応する積層構成の求め方を示す。次に、積層パラメータ間の関係を用いてカップリング効果を無視した直交異方性積層円筒殻について圧縮・外圧座屈荷重を最大とする積層構成を調べる。

2. 積層理論と積層パラメータ

2.1 剛性と積層パラメータの関係

本節では、後述の議論の準備として、剛性と積層パラメータに関する基礎的な事項を述べる^{1),2)}。

Kirchhoffの仮定に基づく積層理論では、カップリング効果を無視すると次の構成関係式が得られる⁶⁾。

* 東京大学工学部境界領域研究施設助手 (153 東京都目黒区駒場 4-6-1)

Research Associate, Inst. of Interdisciplinary Res., Fac. of Eng., University of Tokyo, 4-6-1, Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153, Japan
現在：航空宇宙技術研究所 機体一部 研究員 (182 調布市深大寺東町 7-44-1)
Present address: Researcher, 1st Airframe Div., National Aerospace Laboratory, 7-44-1, Jindaiji-higashi-machi, Chofu 182, Japan

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 N, M は合力、合モーメント、 ϵ_0, κ は中央面歪、曲率変化であり、 A, D は面内および面外剛性を示す。

面内剛性 A は剛性に関する不変量と面内積層パラメータにより次のように表示できる。

$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{22} \\ A_{66} \end{Bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 1 & 0 \\ 1 & -\xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここで、 h は積層材の板厚であり、 $U_i (i=1, 2, \dots, 5)$ は Tsai-Pagano²⁾ と類似の剛性に関する不変量である。

$$\begin{aligned} U_1 &= [Q_{11} + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) + Q_{22}] / 4 \\ U_2 &= [Q_{11} - Q_{22}] / 2 \\ U_3 &= [Q_{11} - 2(Q_{12} + 2Q_{66}) + Q_{22}] / 4 \\ U_4 &= [Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} - 4Q_{66}] / 4 \\ U_5 &= [Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}] / 4 \end{aligned} \quad (3)$$

また、 ξ_1, ξ_2 は面内積層パラメータで、積層材が中央面に対称であるとして次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta(z) dz = \int_0^1 \cos 2\theta(u) du \\ \xi_2 &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \cos^2 2\theta(z) dz = \int_0^1 \cos^2 2\theta(u) du \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\theta(u)$ は繊維の配向角で板厚方向の座標の関数である。

面外剛性 D に関しても同様に (2) 式で

$$\begin{aligned} A_{ij} &\rightarrow D_{ij}, \quad h \rightarrow h^3/12 \\ \xi_1 &\rightarrow \xi_3, \quad \xi_2 \rightarrow \xi_4 \end{aligned} \quad (5)$$

として得られる。 ξ_3, ξ_4 は面外積層パラメータで次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \cos 2\theta(z) \cdot z^2 dz = 3 \int_0^1 u^2 \cos 2\theta(u) du \\ \xi_4 &= \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \cos^2 2\theta(z) \cdot z^2 dz = 3 \int_0^1 u^2 \cos^2 2\theta(u) du \end{aligned} \quad (6)$$

(4), (6) 式で示される積層パラメータには次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} -1 \leq \xi_1 \leq 1, \quad \xi_1^2 \leq \xi_2 \leq 1 \\ -1 \leq \xi_3 \leq 1, \quad \xi_3^2 \leq \xi_4 \leq 1 \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式で示されるように、 ξ_1 と ξ_2 は $\xi_1 - \xi_2$ 座標上で $\xi_2 = \xi_1^2$ の放物線と $\xi_2 = 1$ の直線に囲まれた領域にある。 ξ_3 と ξ_4 についても同様である。また、 (ξ_1, ξ_2) と積層構成の関係や (ξ_3, ξ_4) と積層構成の関係はすでに知られており^{1,2)}、たとえば、 $\xi_2 = \xi_1^2$ は $\theta = (1/2) \cos^{-1} \xi_1$

のアングルブライ積層を示し、このとき $\xi_3 = \xi_1, \xi_4 = \xi_2$ となる。また、 $\xi_2 = 1$ は $0^\circ, 90^\circ$ 層から成る一般的なクロスブライ積層を示し、このとき $\xi_4 = 1$ となる。面内剛性 A_{ij} は ξ_1, ξ_2 の線形関数であり、面外剛性 D_{ij} は ξ_3, ξ_4 の線形関数であるので、それらの特性は積層パラメータにより理解が容易となる。

2.2 積層パラメータの特性と積層構成との関係

繊維の配向角 $\theta(z)$ を板厚方向に積分して得られた面内積層パラメータと面外積層パラメータとは独立な変数ではなくある制約関係がある。本節では、ある面内積層パラメータ (ξ_1, ξ_2) に対する面外積層パラメータ (ξ_3, ξ_4) の許容領域を調べ、許容領域内の $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ に対応する積層構成を求めることにする。このために、まず面内積層パラメータに対応する積層構成を2種類の配向角から成る積層材で表示し、それに対応する面外積層パラメータの許容領域を求める。次に、このようにして得られた面外積層パラメータの許容領域が配向角の種類を増加させても拡大しないことを示す。

Fig.1 に示すようにある面内積層パラメータ (ξ_1, ξ_2) を有する点Pが与えられたときの面外積層パラメータ (ξ_3, ξ_4) の許容領域を求める。A $(-1, 1)$, B $(1, 1)$ とPを結ぶ直線と放物線との交点をそれぞれ C (ξ_c, ξ_c^2) , D (ξ_D, ξ_D^2) とすると、

$$\xi_c = (\xi_1 + \xi_2) / (1 + \xi_1), \quad \xi_D = (\xi_1 - \xi_2) / (1 - \xi_1) \quad (8)$$

で与えられる。いま、点Pの面内積層パラメータに対応する積層構成を、点Pを通る直線と境界 $(\xi_4 = \xi_3^2, \xi_4 = 1)$ との交点である2点E, Fの配向角を用いて表わし、点Eが点Aから点Cまで放物線上を 180° 動くときの面外積層パラメータの許容領域を求める。 $\angle APE = \alpha$ とし

Fig.1 Relation between in-plane and out-of-plane lamination parameters.

て、 $0 \leq \alpha \leq \alpha_D$ (ただし $\alpha_D = \angle APD$) と $\alpha_D \leq \alpha \leq \pi$ の 2 通りの場合を考える。なお、点 P が放物線上にあるときは $\theta = (1/2) \cos^{-1} \xi_1$ のアングルブライ積層を示し、そのときの面外積層パラメータ (ξ_3, ξ_4) は (ξ_1, ξ_2) と等しくなるので、 $\xi_2 > \xi_1^2$ の場合を考える。

(1) $0 \leq \alpha \leq \alpha_D$ のとき

点 E の座標 (ξ_E, ξ_E^2) に対して点 F の座標 (ξ_F, ξ_F^2) の ξ_F は次のようになる。

$$\xi_F = (\xi_2 - \xi_1 \xi_E) / (\xi_1 - \xi_E) \quad (9)$$

2 点 E, F に対応する 2 種類の配向角によって点 P の面内積層パラメータ (ξ_1, ξ_2) に対応する積層構成を表示する。そのとき、E, F の配向角 θ_E, θ_F および板厚 h_E, h_F は次の値をとる。

$$\begin{aligned} \theta_E &= (1/2) \cos^{-1} \xi_E, \quad \theta_F = (1/2) \cos^{-1} \xi_F \\ h_E &= (\xi_F - \xi_1) / (\xi_F - \xi_E), \quad h_F = 1 - h_E \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、幾何学的関係から h_E, h_F はそれぞれ PF/EF および PE/EF に対応している。

上記のように面内積層パラメータ (ξ_1, ξ_2) に対応する積層構成を 2 種類の配向角で表示すると、各配向角を有する層の板厚は (10) 式に示すように一義的に決定される。このとき面外積層パラメータ (ξ_3, ξ_4) は 2 種類の配向角から成る積層材の積層順序が指定されれば定まることになる。点 P を 2 点 E, F の配向角で表示したとき、対応する面外積層パラメータ (ξ_3, ξ_4) を点 Q とすると、点 Q は直線 EF にあることは明らかでありその座標は次のようになる。

$$\begin{aligned} (\xi_3, \xi_4) &= (\xi_E, \xi_E^2) + \lambda(\xi_F - \xi_E, \xi_F^2 - \xi_E^2) \\ h_F^3 \leq \lambda \leq 1 - h_E^3 \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $\lambda = h_F^3$ となる点 G は θ_E 層が外層、 θ_F 層が内層となる $[\pm \theta_E / \pm \theta_F]$ 材に対応し、 $\lambda = 1 - h_E^3$ となる点 H は θ_F 層が外層、 θ_E 層が内層となる $[\pm \theta_F / \pm \theta_E]$ 材に対応する。 θ_E 層と θ_F 層とを交互に適当に積層することにより、点 Q は GH 上を G から H まで動くことになる。

次は逆に、面内積層パラメータ (ξ_1, ξ_2) に対応する点 P、および許容領域内にある面外積層パラメータ (ξ_3, ξ_4) に対応する点 Q が与えられたときに、積層構成を直線 PQ と放物線との交点 E, F の配向角 θ_E, θ_F を用いて表わすことにする。点 E (ξ_E, ξ_E^2) 、点 F (ξ_F, ξ_F^2) の座標は直線 PQ と放物線との交点を示す次の方程式

$$\xi^2 - \frac{\xi_4 - \xi_2}{\xi_3 - \xi_1} \xi + \frac{\xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3}{\xi_3 - \xi_1} = 0 \quad (12)$$

の 2 根 ξ_E, ξ_F (ただし $\xi_E \leq \xi_F$ とする) より得られる。点 E, F に対応する配向角および点 P の面内積層パラメ

ータを満足する板厚は (10) 式で与えられる。また (12) 式は点 P, Q が一致する場合には使えないが、そのときは、点 E を放物線上 $\widehat{AD}$ の任意の点とし直線 EP と放物線 $\widehat{CB}$ との交点を F として (9) 式より ξ_F が求まる。

点 Q の面外積層パラメータを満足する積層構成は 2 種類の配向角であっても積層順序は無数にあるので無数に存在するが、Fig. 2 に示す $[\pm \theta_E / \pm \theta_F / \pm \theta_E]$ 材によっても表示できることを以下に示す。各層の板厚を h_{E1}, h_F, h_{E2} (ただし $h_{E1} + h_{E2} = h_E$) とする。

$$(\xi_3, \xi_4) = (\xi_E, \xi_E^2) + \lambda_0(\xi_F - \xi_E, \xi_F^2 - \xi_E^2) \quad (13)$$

と表示すると、Fig. 2 の積層順序に対しては

$$\lambda_0 = h_F[h_F^2 + 3h_F h_{E2} + 3h_{E2}^2] \quad (14)$$

となり、また幾何学的関係 ($\lambda_0 = EQ/EF$) より

$$\lambda_0 = (\xi_3 - \xi_E) / (\xi_F - \xi_E) \quad (15)$$

となる。(14) 式の λ_0 は h_{E2} が $0 \rightarrow h_E$ まで変化する間に $h_F^3 \rightarrow 1 - h_E^3$ と動き、Fig. 2 の積層構成により線分 GH 上の任意の点 Q を表示できることがわかる。また、(14) (15) 式より h_{E2} は次式で与えられる。

$$h_{E2} = \sqrt{12(\xi_3 - \xi_E) / (\xi_1 - \xi_E) - 3h_F^2 / 6 - h_F / 2} \quad (16)$$

ここで、 h_F は (10) 式で与えられ、 $h_{E1} = h_E - h_{E2}$ である。

(2) $\alpha_D \leq \alpha \leq \pi$ のとき

点 E (ξ_E, ξ_E^2) に対して点 F $(\xi_F, 1)$ の ξ_F は次のようになる。

$$\xi_F = \xi_1 + (1 - \xi_2) (\xi_1 - \xi_E) / (\xi_2 - \xi_E^2) \quad (17)$$

点 E の配向角および板厚 (Fig. 1 の PF/EF) は次式で与えられる。

$$\theta_E = (1/2) \cos^{-1} \xi_E, \quad h_E = (1 - \xi_2) / (1 - \xi_E^2) \quad (18)$$

また、点 F に対応する積層構成は $0^\circ, 90^\circ$ 材から成る一般的なクロスプライ積層であり、 $0^\circ, 90^\circ$ 材の板厚は幾何学的関係より、それぞれ $h_F \cdot AF/AB, h_F \cdot BF/AB$ によって与えられる。

$$\begin{aligned} h_0 &= (1/2) (1 + \xi_F) h_F, \quad h_{90} = (1/2) (1 - \xi_F) h_F \\ h_F &= 1 - h_E \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 h_F はクロスプライ積層の板厚を示す。

Fig. 2 $[\pm \theta_E / \pm \theta_F / \pm \theta_E]$ laminate.

点Fは 0° , 90° の2種類の配向角から成る一般的なクロスプライ材に対応しているが, (19)式の関係を満たすように 0° 層と 90° 層の非常に薄い層が交互に積層された場合 (これをクロスプライ層と呼ぶことにする) には, 点Fに対応する配向角を1種類の配向角とみなすことができる. このとき, 面外積層パラメータの許容領域は(11)式と同様に,

$$(\xi_3, \xi_4) = (\xi_E, \xi_E^2) + \lambda(\xi_F - \xi_E, 1 - \xi_E^2) \quad (20)$$

$$h_F^3 \leq \lambda \leq 1 - h_E^3$$

で与えられる. $\lambda = h_F^3$ は点Gに対応し, θ_E 層が外層, クロスプライ層が内層となる積層構成を示し, $\lambda = 1 - h_E^3$ は点Hに対応し, クロスプライ層が外層, θ_E 層が内層となる積層構成を示す.

次に, 面内積層パラメータ (ξ_1, ξ_2) に対応する点P, 面外積層パラメータ (ξ_3, ξ_4) に対応する点Qが与えられたとき, それに対応する積層構成は次のようにして求まる. 直線 PQ と放物線との交点を (ξ_E, ξ_E^2) , 直線 AB との交点を $(\xi_F, 1)$ とする. 直線 PQ と放物線との交点は(12)式より求まり, ξ_E は

$$\xi_E = \bar{\xi}_2 \quad ((\xi_4 - \xi_2)/(\xi_3 - \xi_1) < 0 \text{ のとき}),$$

$$\xi_E = \bar{\xi}_1 \quad ((\xi_4 - \xi_2)/(\xi_3 - \xi_1) > 0 \text{ のとき}) \quad (21)$$

$$\xi_E = \bar{\xi}_1 \quad (\xi_3 = \xi_1, \xi_4 \neq \xi_2 \text{ のとき})$$

で与えられる. ここで, $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ は(12)式の根で $\bar{\xi}_1 < \bar{\xi}_2$ とする. また, ξ_F は

$$\xi_F = \xi_1 + (1 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_1)/(\xi_4 - \xi_2) \quad (22)$$

で与えられる. 点Eに対応する層の配向角, 板厚は(18)式, 点Fに対応するクロスプライ層の板厚は(19)式, Fig.2の積層構成 (ただし θ_F はクロスプライ層を示す) のときの h_{E2} は(16)式で与えられる.

次に, 2種類の配向角をもつ積層材によって得られた面外積層パラメータの許容領域は, 配向角の種類が多い場合でも拡大しないことを示す.

いま, 点Pの面内積層パラメータに対応する積層構成を n 種類の配向角 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ (対応する点を $A_1, A_2, \dots, A_n$ とし $a_1, a_2, \dots, a_n$ で示す) によって表示したとき, 点Pは $A_1 A_2 \dots A_n$ の凸 n 角形の内部あるいは周囲上に存在し点P (p) は次のようになる (Fig.3 参照).

$$p = \sum_{i=1}^n h_i a_i \quad (23)$$

ここで, h_i は θ_i の板厚で次の関係を満たす.

$$\sum_{i=1}^n h_i = 1, h_i \geq 0 \quad (24)$$

p を a_i と q で次のように表示する.

$$p = h_i a_i + (1 - h_i) q \quad (25)$$

ここで, q は

Fig.3 Out-of-plane lamination parameter q on the line $A_i B$.

$$q = \frac{1}{1 - h_i} \sum_{j \neq i} h_j a_j \quad (26)$$

であり, (26)式より q は A_i 点を除いた凸 $(n-1)$ 角形の内部あるいは周囲上に存在し, また, (25)式より直線 AB 上に存在することがわかる. さらに, (25)式の $h_i \geq 0, 1 - h_i \geq 0$ より, q は線分 PC 上に存在することになる. 点Pが A_i , B点の2種類の配向角で表わされたとき面外積層パラメータのとりうる領域は(11)式で示されるのに対し, 点Pが A_i , Q点で与えられたときには直線 $A_i B$ 上での面外積層パラメータの許容領域は(11)式で示される領域より狭くなることは明らかである. よって, 点Pを2種類の配向角で表示して求めた面外積層パラメータの許容領域が最大の許容領域となる.

2.3 数値例

2.2 節で面内積層パラメータPが与えられたときの面外積層パラメータの許容領域は(11)(20)式で示された. 数値例として, P (0, 0.5) および P (0.2, 0.4) のときの面外積層パラメータの許容領域を Fig.4 に示す.

また, 面内積層パラメータ P (0, 0.5), 面外積層パラメータ Q (0.3, 0.4) のときの積層構成は(12)(10)(16)式を用いて次のように求められる.

$$[\pm 76.6^\circ_{0.049} / \pm 30.0^\circ_{0.615} / \pm 76.6^\circ_{0.336}]_s$$

ここで, 下添字は各層の板厚を示す.

P (0, 0.5), Q (0.1, 0.7) のときは, (21)(22)(18)(16)(19)式より

$$[\pm 51.5^\circ_{0.083} / (0^\circ/90^\circ)_{0.473} / \pm 51.5^\circ_{0.444}]_s$$

となり, $(0^\circ/90^\circ)$ は薄い $0^\circ, 90^\circ$ 層が交互に多数積層されたクロスプライ層で, $0^\circ, 90^\circ$ 層の板厚は

$$h_0 = 0.296, h_{90} = 0.177$$

である.

Fig.4 Maximum allowable region of out-of-plane lamination parameters.

3. 直交異方性積層円筒殻の座屈荷重を最大とする積層構成

カップリング効果を見放した直交異方性積層円筒殻について座屈荷重を最大とする積層構成を求める。

軸方向圧縮荷重 N_x 、周方向圧縮荷重 N_y を受けるときの Donnell 型の座屈方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & D_{11}w_{,xxxx} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxyy} + D_{22}w_{,yyyy} \\ & + (1/R)U_{,xx} + N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} = 0 \\ & a_{22}U_{,xxxx} + (2a_{12} + a_{66})U_{,xxyy} + a_{11}U_{,yyyy} \\ & - (1/R)w_{,xx} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、 D_{ij} 、 a_{ij} はそれぞれ面外剛性、面内コンプライアンス、 w は面外撓み、 U は応力関数を示す。また、円筒の板厚 h 、軸長 L 、半径 R とする。S2 単純支持境界条件を満足する次の変位関数、応力関数を仮定して、

$$\begin{aligned} w &= \bar{w} \sin(\lambda/R)x \cos n\theta, \\ U &= \bar{U} \sin(\lambda/R)x \cos n\theta \\ (\lambda &= m\pi R/L) \end{aligned} \quad (28)$$

(27)式に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{R^2(k_x\lambda^2 + k_y n^2)} \\ &\times [D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2 n^2 + D_{22}n^4] \\ &+ \frac{\lambda^4}{k_x\lambda^2 + k_y n^2} \frac{1}{a_{22}\lambda^4 + (2a_{12} + a_{66})\lambda^2 n^2 + a_{11}n^4} \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、 $k_x = N_x/P$ 、 $k_y = N_y/P$ である。

(29)式において右辺第1項は面外剛性、第2項は面内コンプライアンスから成る項であり、座屈荷重は円筒の形状（半径、板厚、軸長）および積層構成（各層の繊維の配向角、積層順序）が決まれば求めることができる。ここでは、座屈荷重を最大とする積層構成を剛性に関する不変量と面内および面外積層パラメータを用いて求めることにする。まず、面内コンプライアンス a_{ij} は面内剛性 A_{ij} によって次のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}^{-1} \quad (30)$$

(2)式と(30)式より、面内コンプライアンス a_{ij} は剛性に関する不変量と面内積層パラメータを用いて表わすと次のようになる。

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &\equiv ha_{11} = (U_1 - \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3) / \text{分母} \\ \varphi_{12} &\equiv ha_{12} = -(U_4 - \xi_2 U_3) / \text{分母} \\ \varphi_{22} &\equiv ha_{22} = (U_1 + \xi_1 U_2 + \xi_2 U_3) / \text{分母} \\ \varphi_{66} &\equiv ha_{66} = 1 / (U_5 - \xi_2 U_3) \\ \text{分母} &= (U_1 + U_4)(U_1 + 2\xi_2 U_3 - U_4) - \xi_1^2 U_2^2 \end{aligned} \quad (31)$$

また、 U_i に関して次の関係が成り立つ。

$$U_4 + 2U_5 = U_1 + 2U_3 \quad (32)$$

D_{ij} を剛性に関する不変量と面外積層パラメータで表わし、同じように、 a_{ij} を剛性に関する不変量と面内積層パラメータで表示して、(29)式に代入する。このとき、(32)式を考慮すると、座屈応力に関する次式が得られる。

$$\begin{aligned} \sigma &\equiv \frac{P}{h} = \frac{h^2}{12R^2} \frac{\Phi_1}{k_x\lambda^2 + k_y n^2} \\ &+ \frac{\lambda^4}{k_x\lambda^2 + k_y n^2} \frac{1}{\Phi_2} \end{aligned} \quad (33)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= (U_1 + \xi_3 U_2 + \xi_4 U_3)\lambda^4 \\ &+ 2(U_1 + 2U_3 - 3\xi_4 U_3)\lambda^2 n^2 \\ &+ (U_1 - \xi_3 U_2 + \xi_4 U_3)n^4 \\ \Phi_2 &= \varphi_{22}\lambda^4 + (2\varphi_{12} + \varphi_{66})\lambda^2 n^2 \\ &+ \varphi_{11}n^4 \end{aligned} \quad (34)$$

ただし、 φ_{ij} は(31)式で示される量である。

Table 1 Elastic constants of CFRP.

$$E_L=142 \text{ GPa}, E_T=10.8 \text{ GPa}, G_{LT}=5.49 \text{ GPa}, \nu_L=0.3 \\ U_1=45.6, U_2=66.1, U_3=31.3, U_4=34.6, U_5=36.8 \text{ (GPa)}$$

積層構成を支配する $\xi_1 \sim \xi_4$ が与えられたとき、座屈応力 σ は m, n に関する最小値として与えられる。また、座屈応力を最大とする積層構成は、 $h/R, L/R$ が与えられたとき、 $\xi_1 \sim \xi_4$ を設計変数とし σ を目的関数とする最適化問題として定式化されるが、ここでは比較的容易に解が求まり興味ある特性を示す $k_x=1$ ($k_y=0$) の軸圧縮座屈と $k_x=1$ ($k_y=0$) の外圧座屈の場合をとりあげる。

3.1 圧縮座屈 ($k_x=1, k_y=0$)

圧縮荷重を受ける積層円筒殻の座屈特性、圧縮座屈荷重を最大とする積層構成に関する研究は多数の研究者により行なわれてきた⁸⁻¹³⁾。平野¹¹⁾は、各層の配向角を設計変数とする最適化問題として数値計画法による解析を行ない、圧縮荷重を最大とする積層構成は多数存在すること、また最適点では座屈荷重が座屈波数比 n/λ に依存しないという結果を得た。また、最近、小野田¹³⁾はあらゆる積層パラメータ (すべてのカップリング項を考慮すると 12 の積層パラメータがある) を設計変数とする最適化計算を行ない、最適構成に関する陽な関係式を得た。その関係式では、カップリング効果のないときには、等方性積層材が最適であるという興味深い結論になる。このように圧縮座屈の最適積層を求める研究は、ほとんど完成されているが、ここでは外圧座屈の場合の比較のために、この問題をとりあげる。

圧縮座屈の場合には、比較的円筒が長ければ λ を連続変数とみなすことができ、 λ, n の代りに $\lambda, \mu (=n/\lambda)$ を連続変数として $\partial\sigma/\partial\lambda^2=0$ より、

$$\sigma = (h/\sqrt{3} R) \{ [(U_1 - \xi_3 U_2 + \xi_4 U_3) \mu^4 + 2(U_1 + 2U_3 - 3\xi_4 U_3) \mu^2 + (U_1 + \xi_3 U_2 + \xi_4 U_3)] / \{ \varphi_{11} \mu^4 + (2\varphi_{12} + \varphi_{66}) \mu^2 + \varphi_{22} \} \}^{1/2} \quad (35)$$

が得られる。座屈応力は $\min_{0 \leq \mu^2 \leq \infty} \sigma$ によって与えられ、

座屈応力を最大とする $\xi_1 \sim \xi_4$ は σ が μ^2 に依存しないという次の条件から得られる (σ が μ^2 に依存しないときの $\xi_1 \sim \xi_4$ が最大の座屈応力を与えるという解析的証明はまだされていないが、小野田¹³⁾は数値計算によりこの結論を得ている)。

$$\frac{U_1 - \xi_3 U_2 + \xi_4 U_3}{\varphi_{11}} = \frac{U_1 + 2U_3 - 3\xi_4 U_3}{\varphi_{12} + \varphi_{66}/2} \quad (36) \\ = \frac{U_1 + \xi_3 U_2 + \xi_4 U_3}{\varphi_{22}}$$

(36)式を満たす $\xi_1 \sim \xi_4$ は唯一つ存在し、

$$\xi_1 = \xi_3 = 0, \xi_2 = \xi_4 = 1/2 \quad (37)$$

となる。 $(\xi_1, \xi_2) = (0, 1/2)$ は $a_{11} = a_{22}, a_{66} = a_{11}/2(1 - a_{12}/a_{11})$ と等価で面内等方性を意味する。同様に $(\xi_3, \xi_4) = (0, 1/2)$ は面外等方性を意味する。面内等方性、面外等方性を満足する積層構成は 2 節での議論により 2 種類の配向角でも無数に存在することがわかる。

3.2 外圧座屈 ($k_x=0, k_y=1$)

外圧座屈荷重を最大とする積層構成を求める研究は、Nshanian ら¹⁰⁾により各層の配向角を設計変数とする最適化問題として行なわれている。また、積層構成、カップリング効果の外圧座屈に及ぼす影響については、最近、粕谷ら¹⁴⁾による研究がある。

本論文では、外圧座屈荷重を最大とする積層構成を単純な仮定¹⁵⁾のもとで求める。外圧座屈の場合には、(33)式で $\partial\sigma/\partial\lambda^2 > 0$ より $m=1$ のときに σ は最小となる。 $\mu = n/\lambda \gg 1$ と仮定して Φ_1, Φ_2 のなかのいちばん大きな項だけを残して $\partial\sigma/\partial n^2 = 0$ とすると¹⁵⁾、

$$\sigma = \frac{2\pi}{3\sqrt{6}} \frac{h\sqrt{h}}{L\sqrt{R}} \sqrt{\frac{(U_1 - \xi_3 U_2 + \xi_4 U_3)^3}{\varphi_{11}}} \quad (38)$$

が得られる。

Table 1 に CFRP 材の U_i の値を示すが、このとき (38)式より、 (ξ_1, ξ_2) と (ξ_3, ξ_4) が独立な量であるならば、 $(\xi_1, \xi_2) = (1, 1)$ 、 $(\xi_3, \xi_4) = (-1, 1)$ のときに σ は最大となる。すなわち、面内剛性としては 0° 材、面外剛性としては 90° 材の特性を有するときが外圧座屈荷重は最大となる。しかし、このような積層構成は存在しない。ある ξ_1, ξ_3 に対し、 ξ_2, ξ_4 は 1 のときに σ は最大となるので σ の最大値は一般的なクロスプライ積層のなかに存在することがわかる。そこで $\xi_2 = \xi_4 = 1$ とおき、 ξ_1, ξ_3 について一方向探索により σ を最大とする ξ_1, ξ_3 を求める。ただし、(11)式で $\xi_E = -1, \xi_F = 1$ とすると、 ξ_3 には次の制約条件があることがわかる。

$$-1 + (1 + \xi_1)^3/4 \leq \xi_3 \leq 1 - (1 - \xi_1)^3/4 \quad (39)$$

数値例として、Table 1 に示す CFRP の場合には、外

圧座屈荷重を最大とする $\xi_1 \sim \xi_4$ は次の値をとる。

$$\xi_1 = -0.09, \xi_2 = 1, \xi_3 = -0.81, \xi_4 = 1 \quad (40)$$

ξ_1 に対し ξ_3 は(39)式の下限值で、この積層パラメータに対応する積層構成は1種類だけ存在し、(10)(12)(16)式より、

$$[90^\circ_{0.55}/0^\circ_{0.45}]_s \quad (41)$$

となる。また、このときの外圧座屈応力 σ_{cr} は、等方性 ($\xi_1 = \xi_3 = 0, \xi_2 = \xi_4 = 1/2$) の座屈応力 σ_0 に対し

$$\sigma_{cr}/\sigma_0 = 1.88 \quad (42)$$

となる。

軸圧縮座屈と外圧座屈とは、座屈モードの違いからそれぞれ(35)式、(38)式のように近似的な支配方程式が得られる。その結果、軸圧縮座屈では、(35)式の σ が座屈波数比 μ に依存しないという条件から等方性積層が最適の積層構成を与えた。一方、外圧座屈では、(38)式より 0° 材に近い面内剛性と 90° 材に近い面外剛性を有する積層構成が最適の積層構成を与えることがわかり、(41)式で示す積層構成が得られた。

4. 結 論

積層円筒殻のように面内変形と面外変形とが連成する問題の積層構成の最適化を行なうために、まず、面内積層パラメータと面外積層パラメータの関係を求め、許容領域内の積層パラメータに対応する積層構成を求めた。この結果を用いて、積層円筒殻の圧縮、外圧座屈荷重を最大とする積層構成の問題を考察し、外圧の場合には(41)式で示されるクロスプライ積層が最適の積層構成を与えることを示した。

本論文では、カップリング効果を無視したが、カップリング効果のあるときの積層パラメータ間の関係、積層パラメータと積層構成との関係を求めることが次の課題

である。

最後に、本研究に対し貴重なご助言、ご討論をいただいた東京大学工学部平野陽一助教授に厚く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 三木光範：日本機械学会論文集，48 (1982)，1407-1414.
- 2) 福永久雄：日本航空宇宙学会誌，30 (1982)，482-489.
- 3) H. Fukunaga & Y. Hirano: *Proc. ICCM IV* (1982)，pp. 565-572.
- 4) 福永久雄，平野陽一：材料システム，3 (1984)，135-141.
- 5) 三木光範：材料システム，3 (1984)，83-98.
- 6) R.M. Jones: *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill Co., New York (1975).
- 7) S.W. Tsai & H.T. Hahn: *Introduction to Composite Materials*, Technomic Publ. Co., Westport (1980).
- 8) J. Tasi: *AIAA J.*, 4 (1966)，1058-1062.
- 9) 粕谷平和，植村益次：日本航空宇宙学会誌，30 (1982)，664-675.
- 10) Y.S. Nshanian & M. Pappas: *AIAA J.*, 21 (1983)，430-437.
- 11) 平野陽一：日本航空宇宙学会誌，32 (1984)，46-51.
- 12) 小林繁夫，世古博己，広瀬一美：日本航空宇宙学会誌，32 (1984)，180-186.
- 13) 小野田淳次郎：第26回構造強度に関する講演会講演集 (1984)，pp. 372-375.
- 14) 粕谷平和，植村益次：第26回構造強度に関する講演会講演集 (1984)，pp. 364-367.
- 15) 林 毅編：複合材料工学，日科技連 (1971)，pp. 821-822.