複合材料講座

複合材料の衝撃応答と破壊 (II)

武 田 展 雄*

3.2 弾性波の分散

3.2.1 分散とは？

前節で述べたように応力波の代表的長さが複合材料構成要素のサイズに近づくと、不均質性を考慮する必要がある。分散とは波の位相速度 v が波長 λ に依存することであり、パルス波形は伝播にともない変形してくる。ここで分散は応力波のエネルギーが散逸して熱に変わってしまう減衰 (attenuation, 3.3 節参照) とは異なることに注意する。弾性体中の応力波は分散がある場合でも減衰がなければ、エネルギーは保存されその周波数成分が異なってくるだけである^{2,14)}。すなわち一次元弾性波を例にとると、任意の応力波の変位 $u(x, t)$ は円振動数 $\omega (=kv=2\pi v/\lambda)$ の調和振動成分の重ね合わせ積分として次式の形に書ける。

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{x}{v(\omega)} \right) \right] d\omega \quad (38)$$

一般に複合材料中を伝播する応力波の分散は二つに大別できよう。一つは材料分散 (material dispersion) と呼ぶべきもので、既述のように材料中の繊維、粒子などによる不均質性に起因する応力波の多重反射、透過の結果生じるものである。もう一つは棒、板、シェルなどとして複合材料を用いる場合、有限な大きさの構造要素の境界面での応力波の反射の結果生じるもので、構造分散 (structural dispersion) と呼べよう。後者は当然等方性弾性体でも存在する。実際の複合材料構造では、応力波の波長が短い場合には材料分散、構造分散両者を考慮する必要がある。以下材料分散について考えるが、構造分散は波動伝播実験において重要であり (3.4 節)、詳細は文献 5, 20, 28) などを参照されたい。

3.2.2 積層弾性体中の応力波の透過と反射

図 3 に示した積層弾性体を例にとって積層垂直方向 (x_2 軸方向) に伝播する応力波を考えよう。3.1 節で扱

ったような波長が長いと仮定する均質異方性体としての取扱いができる場合、縦波、横波速度 v_L , v_T はおのこの次式で与えられる。

$$v_L^2 = \frac{(d_f + d_m)^2}{[d_f/(\lambda_f + 2\mu_f) + d_m/(\lambda_m + 2\mu_m)](d_f\rho_f + d_m\rho_m)} \quad (39)$$

$$v_T^2 = \frac{(d_f + d_m)^2}{(d_f/\mu_f + d_m/\mu_m)(d_f\rho_f + d_m\rho_m)} \quad (40)$$

一方、もう一つの極端な場合として波長が短く、2 種類の材料中をおのこの弾性波速度で応力波が伝播する場合を考えよう。この場合、当然異種材料境界面では応力波の反射、透過が生じる。いま材料 m と f との境界面に m から f に入射する横波 (応力値 σ_i) を考えると、境界面での力および粒子速度の連続条件から透過波 (σ_t)、反射波 (σ_r) は次式で与えられる¹³⁾。

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_i} = \frac{2\sqrt{\rho_f\mu_f}}{\sqrt{\rho_f\mu_f} + \sqrt{\rho_m\mu_m}} \quad (41)$$

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_i} = \frac{\sqrt{\rho_f\mu_f} - \sqrt{\rho_m\mu_m}}{\sqrt{\rho_f\mu_f} + \sqrt{\rho_m\mu_m}} \quad (42)$$

縦波の場合は μ を $\lambda + 2\mu$ で置き換えればよい。 $\sqrt{\rho\mu}$ ($=\rho v$) はインピーダンスとも呼ばれ、異種材料でもインピーダンスが等しければ入射波は反射せずすべて透過する。インピーダンスが異なることにより応力波の反射が生じる。図 3 のように境界面が多数ある場合には上述の反射、透過が繰り返され、系全体は複雑な応答を示す²⁹⁾。いま、2 種類の材料中の弾性波速度から横波の最高伝播速度を計算する。

$$v_T^M = (d_f + d_m) / \Delta t$$

ここで Δt は各層の弾性波速度から、

$$\Delta t = \frac{d_f}{\sqrt{\mu_f/\rho_f}} + \frac{d_m}{\sqrt{\mu_m/\rho_m}}$$

上 2 式から、

$$v_T^M = \frac{\sqrt{\mu_f\mu_m/\rho_f\rho_m}(d_f + d_m)}{d_f\sqrt{\mu_f/\rho_f} + d_m\sqrt{\mu_m/\rho_m}} \quad (43)$$

となる。縦波についても同様である。(40) 式と (43) 式を

* Nobuo TAKEDA: 九州大学応用力学研究所・九州大学大学院総合理工学研究科高エネルギー物質科学専攻

比較すると, v_T^M が v_T より大きいことが証明できる.

以上二つの極端な場合について応力波の位相速度を求め, その値が異なることがわかった. この二つの場合の間に埋めるべく波長の関数としての位相速度すなわち分散関係が存在する.

3.2.3 分散関係の厳密解

前項と同じく図3を例にとって x_2 軸方向 (簡単のため以下 x_2 を x で表わす) に伝播する平面調和振動波の分散関係に対する弾性論による厳密解を求めよう^{13,30,31)}. まず運動方程式は,

$$C_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = \rho_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}, \quad n = m, f \quad (44)$$

である. ここで縦波では $C_n = \lambda_n + 2\mu_n$, 横波では $C_n = \mu_n$ であり, 変位 u_n は縦波では伝播方向, 横波ではそれに垂直方向のものである. さて次式で与えられる解を考えよう.

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= U_n(x) \exp \left[i\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) \right] \\ &= U_n(x) \exp [i(\omega t + kx)] \end{aligned} \quad (45)$$

ここで $U_n(x)$ は周期性から次のように仮定する.

$$U_n(x + d_m + d_f) = U_n(x) \quad (46)$$

ところで(44)式の解は, 2種類の材料の弾性波速度 v_n ($=\sqrt{C_n/\rho}$) を用いて次の形で与えられるから,

$$\exp \left[i\omega \left(t \pm \frac{x}{v_n} \right) \right]$$

$U_n(x)$ の一般解は A_n, B_n を複素定数として,

$$U_n(x) = A_n \exp(i\alpha_1 x) + B_n \exp(i\alpha_2 x) \quad (47)$$

$$\alpha_1 = -\omega/v + \omega/v_n, \quad \alpha_2 = -\omega/v - \omega/v_n \quad (48)$$

となる. 次に(47)式の周期性より次式が成立しなければならない.

$$U_m(x) |_{x=d_m} = U_f(x) |_{x=-d_f} \quad (49)$$

また応力の周期性より,

$$C_m \frac{\partial u_m}{\partial x} \bigg|_{x=d_m} = C_f \frac{\partial u_f}{\partial x} \bigg|_{x=-d_f} \quad (50)$$

$x=0$ における変位, 応力の連続性より

$$U_m(x) |_{x=0} = U_f(x) |_{x=0} \quad (51)$$

$$C_m \frac{\partial u_m}{\partial x} \bigg|_{x=0} = C_f \frac{\partial u_f}{\partial x} \bigg|_{x=0} \quad (52)$$

(49)~(52)式は四つの未定定数 A_m, B_m, A_f, B_f に関する四つの条件式を与える. 係数行列式を0とおくことにより次の分散関係式が得られる.

$$\cos \frac{\omega(d_f + d_m)}{v} = \cos \frac{\omega d_m}{v_m} \cos \frac{\omega d_f}{v_f}$$

$$-\chi \sin \frac{\omega d_m}{v_m} \sin \frac{\omega d_f}{v_f} \quad (53)$$

ここで,

$$\chi = (\rho_m C_m + \rho_f C_f) / 2\sqrt{\rho_m \rho_f C_m C_f} \quad (54)$$

さて(53)式で与えられる位相速度 v が, 波長が大すなわち $\omega \approx 0$ で(39), (40)式の有効弾性率を用いた均質弾性体中の弾性波速度に等しくなることを示そう. まず v を ω で級数展開して,

$$v = v_0 + \frac{\alpha}{2} \omega^2 + \dots \quad (55)$$

とし, (53)式を ω で級数展開して $O(\omega^2)$ の項までとると,

$$\frac{\omega^2(d_f + d_m)^2}{v_0^2} = \frac{\omega^2 d_m^2}{v_m^2} + \frac{\omega^2 d_f^2}{v_f^2} + 2\chi \frac{\omega^2 d_m d_f}{v_m v_f} \quad (56)$$

となり, v_0 は縦波, 横波に対しておのの(39), (40)式と同じであることがわかる. 次に(53)式の級数展開を $O(\omega^4)$ の項までとり, (56)式の結果を用いると(55)式中の α は

$$\alpha = \frac{v_0^3 d_m^2 d_f^2}{3(d_m + d_f)^2 v_m^2 v_f^2} (1 - \chi^2) \quad (57)$$

と求まる. (54)式から $\chi \geq 1$ であるから(55), (57)式より ω が小さい範囲では ω が増すにしたがい位相速度 v は減少してくることがわかる.

また積層方向 (図3の x_1 軸方向) に伝播する縦波, 粒子運動方向が x_3 軸, x_2 軸方向である水平偏向, 垂直偏向の横波 (おのの SH 波, SV 波とも呼ぶ) についても同様な厳密解が求められている^{13,30,31)}.

3.2.4 有効剛性理論による分散関係

分散関係の厳密解は図3のような積層体については求められているが, 図2のような繊維強化複合材料のモデルについて求めるのは困難である. このため何らかの近似理論が必要となり, いくつかの理論が提案されている(3.2.5項参照). その代表例として最も研究が進んでいる Achenbach, Herrmann, Sun らによって提唱された有効剛性理論 (effective stiffness theory) を紹介しよう^{8,11,31,32)}. 全体を均質異方性弾性体と考える有効弾性率理論とは異なり, 2種類の弾性体の弾性率と幾何学的形状を組み合わせて, 弾性波の分散挙動も記述できる近似的な有効剛性を導いている.

厳密解と比較するため, ここでも図3の積層体を考えよう (図2に示すような一方繊維強化複合材料についても有効剛性理論による分散関係が求められている⁸⁾).

図 11 積層体中の繰返しユニットと局所座標系³¹⁾

まず板の近似理論でよく用いられるように、積層体中の k 番目の f, m の組 (図 11) に対する二つの局所座標系 $(x_1, \bar{x}_2^f, x_3)$, $(x_1, \bar{x}_2^m, x_3)$ を用いて、おのおの変位 u_i^{fk} , u_i^{mk} ($i=1, 2, 3$) をルジャンドル多項式で展開する。すなわち k 番目の f 層については (m 層も同様)、

$$u_i^{fk} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\bar{x}_2^f/d_f) u_{ni}^{fk}(x_1, x_2^{fk}, x_3, t) \quad (58)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} P_0(\bar{x}_2^f/d_f) &= 1, \quad P_1(\bar{x}_2^f/d_f) = \bar{x}_2^f/d_f \\ P_2(\bar{x}_2^f/d_f) &= [3(\bar{x}_2^f/d_f)^2 - 1]/2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

いま各層の厚さ d_f , d_m は積層体全体の寸法 (厚さなど) や波長に比べ小さく、(58)式において線形項までとする (高次項までとった改良はたとえば文献 12, 33) を参照) と、

$$u_i^{fk} = u_{0i}^{fk}(x_1, x_2^{fk}, x_3, t) + \bar{x}_2^f \psi_{2i}^{fk}(x_1, x_2^{fk}, x_3, t) \quad (60)$$

$$u_i^{mk} = u_{0i}^{mk}(x_1, x_2^{mk}, x_3, t) + \bar{x}_2^m \psi_{2i}^{mk}(x_1, x_2^{mk}, x_3, t) \quad (61)$$

が得られる。(60)式で u_{0i}^{fk} は k 番目の f 層中央面における変位を表わし、 ψ_{21}^{fk} , ψ_{23}^{fk} は厚さ方向の反対称剪断変形を、 ψ_{22}^{fk} は厚さ方向の対称伸縮変形を表わす。 f 層と m 層との境界面での変位の連続性より

$$\begin{aligned} u_{0i}^{mk}(x_1, x_2^{mk}, x_3, t) - u_{0i}^{fk}(x_1, x_2^{fk}, x_3, t) \\ = \frac{1}{2} d_f \psi_{2i}^{fk}(x_1, x_2^{fk}, x_3, t) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} d_m \psi_{2i}^{mk}(x_1, x_2^{mk}, x_3, t) \quad (62)$$

ただし境界面での応力の連続性は課さないことにする。

次にこの変位を用いて歪エネルギーおよび運動エネルギーを計算する。等方性弾性体中の歪エネルギー密度 W は

$$W = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (i, j=1, 2, 3, \text{ 総和規約}) \quad (63)$$

で与えられる。 k 番目の f 層内の歪エネルギー密度の近似値は次のように求められる。まず(60)式を(5)式に代入して歪テンソル成分を求める。ただし x_2 軸方向の微分は局所座標軸 $\bar{x}_2^f$ で置き換える。得られた ε_{ij} を(63)式に代入して $\bar{x}_2^f = -d_f/2 \sim d_f/2$ にわたり積分すると、単位表面積あたりの歪エネルギー W^{fk} が求まる。同様に k 番目の m 層についての W^{mk} も求められる。一方、等方性弾性体中の運動エネルギー密度 T は、密度 ρ を用いて

$$T = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (64)$$

で与えられる。(60)式を(64)式に代入して k 番目の f 層内の単位表面積あたりの運動エネルギー T^{fk} を求めると、

$$\begin{aligned} T^{fk} = \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{1}{2} (d_f + d_m) \eta \rho \left(\frac{\partial u_{0i}^{fk}}{\partial t} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (d_f + d_m) I_f \left(\frac{\partial \psi_{2i}^{fk}}{\partial t} \right)^2 \right\} \quad (65) \end{aligned}$$

ただし ρ_f は f 層の密度であり、

$$\eta = d_f/(d_f + d_m), \quad I_f = \frac{1}{12} d_f^2 \eta \rho_f \quad (66)$$

同様に T^{mk} も(65), (66)式において添字 f, m をおのおの m, f で置き換えることにより求められる。

さて図3において x_2 軸方向のある長さ l 内におおの n 個の f, m 層を含むとすると、 x_1, x_2, x_3 軸方向に長さ $1, l, 1$ をもつ直方体中に蓄えられる歪エネルギー、運動エネルギーはおのおの次式で与えられる。

$$W_l = \sum_{k=1}^n (W^{fk} + W^{mk}), \quad T_l = \sum_{k=1}^n (T^{fk} + T^{mk}) \quad (67)$$

有効剛性理論の基本的な仮定は、この $2n$ 個の点 x_2^{fk} , x_2^{mk} ($k=1, \dots, n$) での値の和としての(67)式が、連続変数 x_2 を用いた重み付き積分によって近似できるとすることにある。すなわち、

$$W_l \cong \int_l \frac{1}{d_f + d_m} (W^f + W^m) dx_2,$$

$$T_l \cong \int_l \frac{1}{d_f + d_m} (T^f + T^m) dx_2 \quad (68)$$

ただし(68)式の右边で上添字 k は除かれ、 W^f, W^m, T^f, T^m はすべての x_2 に対して定義される。新しい歪エネルギー、運動エネルギーは x_1, x_2, x_3, t の連続関数として、

$$\begin{aligned} W &= [W^f(x_i, t) + W^m(x_i, t)] / (d_f + d_m) \\ T &= [T^f(x_i, t) + T^m(x_i, t)] / (d_f + d_m) \end{aligned} \quad (69)$$

となり、 $x_2 = x_2^{fk}$ または $x_2 = x_2^{mk}$ のみで定義されていた変数 $u_{0i}^{fk}, u_{0i}^{mk}, \phi_{2i}^{fk}, \phi_{2i}^{mk}$ も x_2 に関する連続関数となるので上添字 k は除く。また変位の連続条件(62)式も x_2 の連続関数を用いて、

$$\begin{aligned} S_i &\equiv (d_f + d_m) \frac{\partial u_i(x_j, t)}{\partial x_2} - d_f \phi_{2i}^f(x_j, t) \\ &\quad + d_m \phi_{2i}^m(x_j, t) = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

となる。ここで u_{0i}^f, u_{0i}^m は同じ変位 u_i で表わすが、局所的な変形を表わす ϕ_{2i}^f, ϕ_{2i}^m は別々の関数として残す。以上のようにして図3の繰返し積層体は九つの連続関数 $u_i, \phi_{2i}^f, \phi_{2i}^m$ ($i=1, 2, 3$) で表わされる均質弾性体に置換される。

$u_i, \phi_{2i}^f, \phi_{2i}^m$ に関する運動方程式を導出すべく、直方体要素 V についてハミルトンの原理を適用する。ただし外力による仕事は無視する。

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V (T - W) dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0 \quad (71)$$

(70)式の変位の連続条件を付帯条件としてラグランジュの未定乗数 λ_i を用いて変分表示のなかに導入すると³⁴⁾、

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V (T - W - \lambda_1 S_1 - \lambda_2 S_2 - \lambda_3 S_3) dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0 \quad (72)$$

この式から運動方程式としてのオイラーの方程式を求めると、

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^4 \frac{\partial}{\partial q_r} \left[\frac{\partial (T - W - \lambda_1 S_1 - \lambda_2 S_2 - \lambda_3 S_3)}{\partial (df_s / dq_r)} \right. \\ \left. - \frac{\partial (T - W - \lambda_1 S_1 - \lambda_2 S_2 - \lambda_3 S_3)}{\partial f_s} \right] = 0 \end{aligned} \quad (73)$$

ここで f_s は12個の変数 $u_i, \phi_{2i}^f, \phi_{2i}^m, \lambda_i$ を表わし、 q_r は位置、時間の座標軸 x_i, t を表わす。(69), (70)式を(73)式に代入することにより12個の運動方程式が得られる。3.2.3項と同様に変位に平面調和振動波解を仮定することにより、有効剛性理論による分散関係が求められる。

たとえば図3の x_2 軸方向に伝播する横波を考えよ

う。 x_2 軸を対称軸とする面内等方性から、ここでは x_1 軸方向の粒子運動を考えることにして、0でない変数4個を次式で仮定する。

$$\begin{aligned} (u_i, \phi_{2i}^f, \phi_{2i}^m, \lambda_i) \\ = (A_1, A_{2i}^f, A_{2i}^m, B_i) \exp[ik(x_2 - vt)] \end{aligned} \quad (74)$$

(74)式を(73)式に代入すると $A_1, A_{2i}^f, A_{2i}^m, B_i$ に関する四つの同次方程式が得られるので、その係数行列式を0とおくことにより次の無次元化した分散関係式が導かれる。

$$\begin{aligned} \{ \theta \xi^4 + 12\eta[(1-\eta) + \eta\theta]^2 \xi^2 / (1-\eta) \} \beta^4 \\ - \{ 12[\gamma + \theta\eta^2 / (1-\eta)^2] \xi^2 \\ + 144\eta^2[(1-\eta) + \eta\theta][(1-\eta)\gamma + \eta] / (1-\eta)^2 \} \beta^2 \\ + 144\eta^2\gamma / (1-\eta)^2 = 0 \end{aligned} \quad (75)$$

ここで、

$$\beta = v / (\mu_m / \rho_m)^{1/2}, \quad \xi = kd_f, \quad \theta = \rho_f / \rho_m, \quad \gamma = \mu_f / \mu_m \quad (76)$$

$\xi \rightarrow 0$ すなわち $\omega \rightarrow 0$ において(75)式は(40), (56)式に帰着することに注意する。

3.2.5 分散関係の例

3.2.3, 3.2.4項で求めた分散関係の厳密解(TE)と有効剛性理論による近似解(EST)とをいくつか比較してみよう。ただし $\eta=0.8$, $\theta=3$, ポアソン比 $\nu_f=0.3$, $\nu_m=0.35$ として $\gamma=100, 50, 10$ の3種類に対して示す。表示には(76)式の無次元化量を用いる。

まず図12に積層垂直方向に伝播する横波の最低次モードの分散関係を示す。TE((53)式), EST((75)式)ともに $\xi \rightarrow 0$ では分散のない有効弾性率理論による解(EMT)に一致する。 ξ が増加するにしたがいESTはTEとはかなり離れてしまう。図13は積層方向に伝播

図12 積層垂直方向に伝播する横波最低次モードの分散関係³¹⁾

図 13 積層方向に伝播する縦波最低次モードの分散関係³¹⁾

図 14 積層方向に伝播する SV 波最低次モードの分散関係³¹⁾

する縦波の最低次モードについてであるが、図 12 と同様のことがいえる。ただし $\gamma=100$ では TE と EST とは $0 < \xi < 1$ の範囲でのみよく一致する。図 14 は積層方向伝播の SV 波の最低次モードであるが、 ξ が小さい範囲でもとくに γ が大きいと分散は著しく EMT ($\xi \rightarrow 0$) からはかなり異なる。TE と EST との一致は $\xi < 4$ 程度まではかなりよい。

積層体や繊維強化複合材料の波動分散関係を記述するための近似理論は、有効剛性理論³¹⁻³³⁾以外にも各種の混合理論 (mixture theories)^{9,35,36)}、変分原理に基づく理論^{37,38)}など数多く提案されているが、詳細はそれぞれの

文献およびレビュー^{2,6-13)}を参照されたい。また以上調和振動波のみを扱ってきたが、ステップ状、パルス状の弾性波動については省略する。原理上は任意波形もフーリエ展開すれば調和振動波の重ね合せとして扱えるはずであるが、解析が困難となるため格子モデル³⁹⁾粘弾性相似モデル^{40,41)}を用いるか、波頭のみに着目した波頭近似法 (head-of-the pulse approximation)⁴²⁻⁴⁴⁾やその他の近似法^{36,45,46)}を用いるかして近似計算が行なわれている。

3.3 減 衰

応力波の減衰はエネルギーの損失を表わし、変形した応力波内にエネルギーが再分布されエネルギーは保存される分散現象とは異なる。複合材料中を伝播する応力波のエネルギー損失の原因としては少なくとも次の四つの現象が考えられる²⁾。

- (i) 応力波の散乱 (scattering) — ランダムな不均質性の場合
- (ii) 構成材料の粘弾性、塑性変形
- (iii) 微視的破壊
- (iv) 構成材料間接着不良部における摩擦

まず応力波の散乱は、3.2 節で扱った図 2 や図 3 のような構成材料が周期的な配列をもつ複合材料や積層体でも生じている。しかし、その周期性のため散乱エネルギーは応力波に再び戻されてエネルギーは保存される (分散)。一方、構成材料がランダムな配列、不均質性をもつ場合、散乱されたエネルギーは応力波には戻されずみかけ上減衰を生じる^{2,13,47-49)}。たとえば剛体球粒子分散複合材料で分散粒子の体積含有率 c が小さく ($c < 0.10$)、ランダム分散している場合、波長が粒子径に比べ長ければ、弾性体中に一つの粒子のみが存在する図 15 のモデルで表わすことができる^{2,13)}。混合理論を用いた運動方程式は粒子および粒子がないときのマトリックスの変位 u_i , u_m を用いて次式で表わされる (記号は図 15 参照)。

$$\lambda + 2\mu = (\lambda_m + 2\mu_m) \left[1 + \frac{3(3-5\nu_m)c}{(4-5\nu_m)} \right]$$

$$\kappa = v_L / v_T, \quad \tau_0 = a / v_L$$

$$D = \frac{9\rho_m(2\kappa^3 + 1)}{2\rho_i\tau_0(2\kappa^2 + 1)^2}$$

$$\Omega^2 = \frac{9\rho_m}{\rho_i\tau_0^2(2\kappa^2 + 1)}$$

v_L, v_T : マトリックス中の縦波, 横波速度

図 15 剛体球による応力波の散乱¹³⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + 2D \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial u_m}{\partial t} \right) + \Omega^2 (u_i - u_m) &= 0 \\ \rho_m (1-c) \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} &= -\rho_i c \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

いま

$$\left. \begin{aligned} u_i(x, t) &= U_i \exp[i(\zeta x - \omega t)], \\ u_m(x, t) &= U_m \exp[i(\zeta x - \omega t)] \\ \zeta &= \zeta_1 + i\zeta_2 \quad (\zeta_1, \zeta_2: \text{実数}) \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

とおき(77)式に代入して U_i , U_m の係数行列式を0とおくと, ω の関数としての ζ が求まる. これから位相速度 $v = \omega/\zeta_1$ が求まる (分散関係).

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= v_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \frac{c\rho_i}{\rho_{\text{MEAN}}} \right] \\ \text{ここで} \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

$$v_0^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_{\text{MEAN}}}, \quad \rho_{\text{MEAN}} = \rho c_i + (1-c)\rho_m$$

一方, ζ_2 は(78)式で $\exp(-\zeta_2 x)$ 項を通して波の減衰を支配する.

$$\zeta_2 = \frac{\rho_i}{\rho_{\text{MEAN}}} \left(\frac{\rho_i}{\rho_m} \right)^2 \frac{c}{2v_0} \left(\frac{2\kappa^3 + 1}{9} \right) \tau_0^3 \omega^4 \quad (80)$$

ζ_2 が ω^4 に比例することはよく知られたレイリー散乱則 (Rayleigh scattering law) と同様である.

次に, マトリックスに高分子材料を用いる場合はその粘弾性特性を考慮する必要がある. 調和振動波^{50,51}およびステップ状波⁵²について分散, 減衰が求められているが, ここでは積層板 (図3) の積層方向に伝播する縦波の最低次モードについての結果の例⁵¹のみを図16に示す. ただし3.2.5項に合わせて, $\theta=3$, $\nu_f=0.3$, $\nu_m=0.35$, $\gamma=100$, $\eta=0.2, 0.5, 0.8$ とし, マトリックスの粘弾性特性値は代表的なものを用いた. 粘弾性波の位相速度は弾性波より大きいこと, 位相速度が減少してくる振動数域で減衰率が増加することなどがわかる.

積層板中の接着破壊部を考慮した波動解析も Drummheller^{53,54}によってなされている.

3.4 波動伝播実験

複合材料中の波動伝播実験は実験装置, 方法の研究開発と密接に結びついており, 理論解析の発展よりかなり遅れているといえよう. しかし, 理論解析モデルの妥当性を調べるべく数々の波動伝播実験が最近くふうされてきている.

最も簡単な例として3.1節で扱った分散のない有効弾性率理論による応力波の伝播速度を求める方法を挙げよう. この場合伝播速度が求まれば有効弾性率もすぐ求ま

図16 粘弾性マトリックス層を有する繰返し積層体における積層方向に伝播する縦波最低次モードの減衰と分散⁵¹⁾
 $\Omega = \omega(d_f + d_m)/v_T f$ ($v_T f$: f 層中の横波速度)

る. 与えられる応力波の立上り部の長さや波長が複合材料構成要素のサイズよりかなり大きいことが必要条件である. いま細長い棒中の一次元波を考えると, 軸方向の縦波速度は軸方向のヤング率 E を用いて, $v_L = \sqrt{E/\rho}$ と表わされる. v_L は棒に接着された歪ゲージを用いて測定される⁵⁵⁻⁵⁸. Nevill ら⁵⁷) は図17の実験装置を用い正方形配列の一方向スチールワイヤ強化エポキシ材の強化方向および強化垂直方向の v_L より両方向のヤング率をワイヤ含有率の関数として求め⁵⁸), 複合則, Halpin-Tsai 則¹⁷)とよく一致する結果を得た. 次に3.1.4項で取りあげた板中の二次元波の実験例を挙げよう. 板の表

図17 細長い棒中の一次元縦波伝播速度の測定⁵⁷⁾

裏および中央面（複合材料製作時に埋め込む）の歪ゲージを用いて横衝撃を受けた板中の面内波および面外曲げ波のいくつかが測定されており^{59,60)}、表2に示すように積層板理論解との一致はよい。歪ゲージを用いる上述の実験法は応力波の減衰測定にも使われている⁵⁶⁻⁶⁰⁾。

さて、応力波の分散を考慮しなければならないような波長の短い応力波に対する波動伝播実験の方法は波形、振幅により次の三つに大別できよう¹²⁾。すなわち、(1)小振幅調和振動波(超音波)、(2)小振幅過渡波、(3)大振幅過渡波である。

第一に超音波法は複合材料に限らず最も広く利用されており、数多くの方法がくふうされている。超音波法の詳細は文献 61-63) を参照されたい。ここでは代表的な

表2 横衝撃を受けた複合材料板中の応力波伝播速度

波のタイプ	応力波伝播速度 (m/s)		複合材料の種類
	実験値	理論値*	
v_{xxL}^{**}	4050	4090	[(0°) ₅ /(90°) ₅ /(0°) ₅] glass/epoxy ⁶⁰⁾
v_{xxF}^{**}	1340	1520	
v_{yyL}	3170	3270	
v_{yyF}	1140	1380	
v_{xxL}	3520	3310	[(0°) ₂ /±45°] _{2S} boron/epoxy ⁵⁹⁾
v_{xxF}	1810	1650	
v_{yyF}	6970	7750	
v_{yyF}	1900	1650	

* 積層板理論による解, ** L: 縦波, F: 曲げ波

方法とその結果を例示する。超音波法の基本原理は、試験片の一端に取り付けられた振動子（水晶などの圧電変換素子、PZT などの電歪変換素子が用いられる）に有限または半無限時間にわたり調和振動電気信号を送り、振動子を通して試験片中に超音波を発生させ、試験片中を一回または何回か通過した後同一かもう一つの振動子により超音波を検出することである。通過時間や振幅を正確に測定することにより超音波伝播速度、減衰などが求められる。超音波法で注意すべき点は伝播速度の測定である。すなわち分散がある場合位相速度と群速度とは異なるが、どちらの速度を測定しているのかを明確に知る必要がある。Tauchert ら²¹⁾は図 18(a) に示すように固体バッファを用い、パルス状超音波の通過時間を測定することにより、群速度を共振振動数の異なる数組の振動子について求めた。最も分散の大きい繊維方向伝播横波の分散関係測定例を図 18(b) に示す。Sutherland ら⁶⁴⁾も同様の方法であるが、液体バッファと一つの広帯域振動子のみを用いており、位相速度を測定している。その測定例（図 19）⁶⁵⁾は混合理論による解とよく一致している。以上のパルス超音波法は一般に音速測定の誤差が大きくなりがちなため、位相を正確に測定する目的で受波パルスを他の信号と干渉させるパルス波干渉法が用いられることも多い。Whittier ら⁶⁶⁾は Asay ら⁶⁷⁾の二重パルス波干渉法（図 20(a)）により繊維方向伝播縦波の分散関係（図 20(b)）を求めている。また Robinson ら⁶⁸⁾は繰返し積層体について分散関係を精密に求め、弾性論による厳密解と比較している（図 21）。分散関係および

図 18 (a) Tauchert らの方法²¹⁾

固体バッファを使用。共振振動数の異なる数組の振動子を用い、パルス状超音波の通過時間を測定。

(b) ボロン/エポキシ方向材 ($V_f=54\%$) 繊維方向伝播横波の群速度および位相速度-振動数関係^{21,70)} Achenbach ら³²⁾の理論解と類似している。

図 19 タングステン/アルミニウム一方向材 ($V_f = 2.2\%$) 繊維垂直方向伝播縦波の位相速度-振動数関係^{64,65)}
混合理論による解とよく一致し、4 MHz 付近の遮断振動数域を与えている。

遮断振動数域はきわめてよく一致している。さらに、パルスではなく連続波を用いて位相を正確に測定する方法も Sachse ら^{69,70)}により提案されており、その結果を図 18(b)に示す。群速度、位相速度両方が求められており、群速度については Tauchert らの結果とほぼ一致している。

第二に小振幅過渡波を用いる方法である。立上り時間の短い入射過渡波は、飛翔体の衝突、少量の爆薬、気体中の衝撃波などによって発生されるが、その振幅は材料の塑性変形、破壊を引き起こすほどは大きくなく過渡弾性波の分散現象が観察できる^{66,71)}。ここではショックチューブを用いた Whittier らの実験⁶⁶⁾を紹介する。図 22(a)に示すように試験片は長いチューブの中央軸に対して

図 21 鋼-銅箔 (どちらも $50 \mu\text{m}$ 厚) 繰返し積層体の積層垂直方向伝播横波の振動数-波数関係⁶⁸⁾
弾性論による厳密解と実験結果との比較。

垂直に、しかもチューブからは機械的に接触しない状態で置かれる。気体中を伝播してきた衝撃波は試験片全表面に継続時間の短いほぼ一次元歪状態の応力波を発生させる。また透過応力波は試験片裏面で容量ゲージ法 (capacitance gage techniques) によってモニターされる。実験結果を波頭近似法による Peck ら⁴²⁾の理論解析結果と比較して図 22(b)に示す。

第三に大振幅過渡波を用いる方法であり、爆薬、箔爆発、気体で高速度まで加速された飛び板 (flyer plate) などを用い、第二の方法よりかなり大きな振幅が得られる⁷²⁻⁷⁴⁾。このため継続時間が短くしかも一次元歪状態が得られる点は同様であるが、透過波のモニターには水晶ゲージ、Michelson または変位干渉計、速度干渉計、流しカメラなどが使われる。なかでも飛び板法は最もよく

図 20 (a)Asay らの方法⁶⁷⁾

二重パルスを用いたパルス波干渉法。

(b)カーボン/カーボクロス・フェノール一方向材 ($V_f = 10.5\%$) 繊維方向伝播縦波の位相速度-振動数関係⁶⁸⁾

マトリックス材のみでは分散はほとんど見られないことに注意。

図 22 (a)ショックチューブを用いたパルス状小振幅応力波伝播実験⁶⁶⁾

(b)カーボン/カーボクロス・フェノールー方向材 ($V_f=10.5\%$) 繊維方向伝播パルス状縦波に対する試験片裏面の速度変化⁶⁶⁾

二つの理論値はいずれも波頭近似法によるが、分散関係に弾性論解または超音波測定データのおのを用いている。

図 23 (a)飛び板法によるパルス状大振幅応力波伝播実験⁷²⁾

(b)タングステン/アルミニウム方向材 ($V_f=22.1\%$) 繊維垂直方向伝播パルス状縦波に対する試験片裏面の速度変化³⁹⁾

理論値は格子モデルによるものと均質理論モデル (弾性波とそれに続く遅い塑性波とから成る) によるもの¹²⁾。

利用される方法であり、Lundergan ら⁷²⁾が用いた実験装置を図 23(a) に示す。実験結果を彼らが提案する格子モデルによる理論解と比較して図 23(b) に示す³⁹⁾。また、積層板中に接着破壊が生じる場合の実験とその理論解析も彼らによって行なわれている^{53,54)}。

参 考 文 献

- 28) W. Johnson : *Impact Strength of Materials*, Edward Arnold Ltd., London (1972).
- 29) 河田幸三, 武田展雄 : 東大宇航研報告, **14**, 3(A) (1978), 857-868.
- 30) C.T. Sun, J.D. Achenbach & G. Herrmann : *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, **35**, 2 (1968), 408-411.
- 31) C.T. Sun, J.D. Achenbach & G. Herrmann : *ibid.*, **35**, 3 (1968), 467-475.
- 32) J.D. Achenbach & G. Herrmann : *AIAA J.*, **6**, 10 (1968), 1832-1836.
- 33) D.S. Drumheller & A. Bedford : *Int. J. Solids Struct.*, **10** (1974), 61-76.
- 34) たとえば, 鷲津久一郎 : 弾性学の変分原理概論, コンピュータによる構造工学講座 II-3-A, 培風館, 東京 (1972).
- 35) A. Bedford & M. Stern : *J. Appl. Mech., Trans.*

- ASME, 38, 1 (1971), 8-14.
- 36) G.A. Hegemier & A.H. Nayfeh : *ibid.*, 40, 2 (1973), 503-510.
 - 37) W. Kohn, J.A. Krumhansl & E.H. Lee : *ibid.*, 39, 2 (1972), 327-336.
 - 38) E.H. Lee : *Dynamics of Composite Materials*, ed. by E.H. Lee, ASME, New York (1972), pp. 122-138.
 - 39) D.S. Drumheller & H.J. Sutherland : *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 40, 1 (1973), 149-154.
 - 40) L.M. Barker : *J. Compos. Mater.*, 5 (1971), 140-162.
 - 41) T.C.T. Ting & I. Mukunoki : *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 46, 2 (1979), 329-336.
 - 42) J.C. Peck & G.A. Gurtman : *ibid.*, 36, 3 (1969), 479-484.
 - 43) C. Sve : *ibid.*, 37, 1 (1970), 203-205.
 - 44) R.A. Scott : *Int. J. Solids Struct.*, 8 (1972), 833-845.
 - 45) W. Kohn : *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 41, 1 (1974), 97-100.
 - 46) 林 卓夫, 新川和夫, 森本吉春 : 日本航空宇宙学会誌, 28, 321 (1980), 508-515.
 - 47) C.H. Mok : *J. Acoust. Soc. Am.*, 46, 3 (1969), 631-638.
 - 48) J.J. McCoy : *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 40, 2 (1973), 511-517.
 - 49) R.M. Christensen : *ibid.*, 42, 1 (1975), 153-158.
 - 50) M. Stern, A. Bedford & C.W. Yew : *ibid.*, 38, 2 (1971), 448-454.
 - 51) 田中吉之助, 今野 彰 : 日本機械学会論文集 (A編), 45, 399 (1979), 1418-1425, 1426-1434.
 - 52) T. Hayashi, K. Arakawa & Y. Morimoto : *Composite Materials; Mechanics, Mechanical Properties and Fabrication*, ed. by K. Kawata & T. Akasaka, JSCM, Tokyo (1981), pp. 39-46.
 - 53) D.S. Drumheller & F.R. Norwood : *Int. J. Solids Struct.*, 11 (1975), 53-73.
 - 54) D.S. Drumheller & C.D. Lundergan : *ibid.*, 11 (1975), 75-87.
 - 55) B.W. Abbott & L.J. Broutman : *Exp. Mech.*, 6, 7 (1966), 383-384.
 - 56) T.R. Tauchert & F.C. Moon : *AIAA J.*, 9, 8 (1971), 1492-1498.
 - 57) G.E. Nevill, Jr., R.L. Sierakowski, C.A. Ross & E.R. Jones : *Exp. Mech.*, 12, 6 (1972), 278-282.
 - 58) C.A. Ross & R.L. Sierakowski : *Shock Vib. Dig.*, 7, 1 (1975), 1-12.
 - 59) I.M. Daniel, T. Liber & R.H. LaBedz : *Exp. Mech.*, 19, 1 (1979), 9-16.
 - 60) N. Takeda, R.L. Sierakowski & L.E. Malvern : *J. Compos. Mater.*, 15 (1981), 157-174.
 - 61) E. Schreiber, O.L. Anderson & N. Soga : *Elastic Constants and Their Measurement*, McGraw-Hill, New York (1973), Chap. 3.
 - 62) M.A. Breazeale, J.H. Cantrell, Jr. & J.S. Heyman : *Ultrasonics*, ed. by P.D. Edmonds, *Methods of Experimental Physics*, Vol. 19, Academic Press, Orlando (1981), Chap. 2.
 - 63) 高分子学会高分子実験学編集委員会編 : 力学的性質II, 共立出版, 東京(1983), pp. 160-198.
 - 64) H.J. Sutherland & R. Lingle : *J. Compos. Mater.*, 6 (1972), 490-502.
 - 65) A. Bedford, H.J. Sutherland & R. Lingle : *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 39, 2 (1972), 597-598.
 - 66) J.S. Whittier & J.C. Peck : *ibid.*, 36, 3 (1969), 485-490.
 - 67) J.R. Asay, D.L. Lamberson & A.H. Guenther : *J. Acoust. Soc. Am.*, 45, 3 (1969), 566-571.
 - 68) C.W. Robinson & G.W. Leppelmeier : *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 41, 1 (1974), 89-91.
 - 69) W. Sachse & Y.H. Pao : *J. Appl. Phys.*, 49, 8 (1978), 4320-4327.
 - 70) C.S. Ting & W. Sachse : *J. Acoust. Soc. Am.*, 64, 3 (1978), 852-857.
 - 71) C. Sve & S. Okubo : *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 41, 4 (1974), 1052-1056.
 - 72) C.D. Lundergan & D.S. Drumheller : *Dynamics of Composite Materials*, ed. by E.H. Lee, ASME, New York (1972), pp. 35-47.
 - 73) R.P. Reed & D.E. Munson : *J. Compos. Mater.*, 6 (1972), 232-257.
 - 74) H.J. Sutherland & D.E. Munson : *ibid.*, 10 (1976), 118-128.