複合材料講座

複 合 材 料 と 信 頼 性

II. 強度へのアプローチ

前 川 善 一 郎*

1. は し が き

複合材料は分散相とマトリックス相の組合せによって荷重伝達の機構が異なってくることはよく知られている。分散相が繊維である場合、連続繊維や不連続繊維の相違や繊維配向分布によって破壊過程も異なり、複雑な力学的挙動を示すことになる。そして破壊の最終過程である強度の推定は当然のことながらまことにむづかしい問題といえる。

複合材料の強度予測するために本材料の破壊過程をランダムな統計現象としてとらえ、確率論に基づく解析を行なう研究が今日活発に行なわれている。繊維強化形複合材料に対して繊維束の破壊過程を取り扱ったバンドル理論と、繊維をリンクの集合したものと考え最弱のリンクが強度を規定するものとする最弱リンク理論を組み合わせた強度理論が Coleman をはじめ多くの研究者によって引き継がれて発展しており、一方向強化複合材料からランダム配向分布をもつ複合材料の剛性や強度の推定の手法の研究が行なわれている¹⁻⁹⁾。

しかしながら、複合材料の破壊過程は複雑であって、破壊過程を組み込んだ故障確率モデルははまだ完成に至っておらず複合材料の破壊分布関数として実用的に用いられていないのが現状である。そこで、複合材料の強度の信頼性を評価するために、前回の基礎概念で述べた累積分布関数を適用する研究が活発に行なわれている。

本講においては、強度へのアプローチとして最初に種類の複合材料の静的強度に対して適用された分布関数とその母数の値について調べることにする。つぎに、これらの累積分布関数に信頼性の程度を加味して強度の設計値を得る手法について述べるものとする。

2. 複合材料の強度分布関数

複合材料は分散相材料とマトリックス材料との組合せによって種類は多岐にわたる上に、任意の異方性の特性を積層技術を用いて加味することが比較的容易であるため、複合材料の力学的挙動は複雑であるといわなければならない。さらに、ここで取り上げている強度に関しても、引張り、圧縮、曲げ、剪断など多岐にわたっているため、複合材料の強度といってもすべてを包含することは不可能にちかいことである。しかしながら、複合材料の材料設計という立場からはこれらのデータが豊富であることがのぞましいことはいうまでもない。本講座においてはこの方面の文献を調査し強度分布関数の母数やばらつきなどのデータを“複合材料と信頼性—VI. 設計へのアプローチ(2)”のところで一括して掲載するものとしている。そこで、本節においては前回の講座で述べた累積分布関数を代表的な複合材料に強度にあてはめた例を述べるものとする。

複合材料は分散相の形態により粒子分散形複合材料と繊維強化形複合材料とに大別され、その強度特性および変動は非常に異なる。さらに、各複合材料の成形過程で分散相がマトリックスに含浸して硬化する過程を経るのであるが、その場合に分散相の移動が起こるか否かによって強度特性およびその変動の違いは大きく、とくに強度の異方性を有する繊維強化形複合材料において影響が顕著に現われる。そこで、成形時に分散相の移動がない複合材料¹⁰⁾と移動がある複合材料¹¹⁾に分けて考えてみる。

次に、同じ複合材料でも荷重形態によって強度の変動が異なってくるがこの場合についても考える。

2.1 成形時に分散相の移動のない複合材料

ここで取り上げた繊維強化複合材料は、ガラスクロス強化プラスチック(クロス GRP)とガラスマット強化プラスチック(マット GRP)である。成型法は成型時に分散相の移動が少ないハンドレイアップ法を採用して

* Zenichiro MAEKAWA: 京都工芸繊維大学繊維学部 (606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)

いる。粒子分散複合材料としてレジンモルタルを用いたが、レジンモルタルは市販されている粒子分散形複合材料のなかでも構成素材の種類が少なく、かつ均一な粒子分散の状態が比較的容易に得られるという利点をもっている。

クロス GRP、マット GRP、粒子分散形複合材料の組成と引張り強度の実験結果を表 1 に示す。標本数は 30～32 本であり、標本平均、標本標準偏差、標本変動係数、2 母数ワイブル分布の形状母数、尺度母数が示されている。繊維強化形複合材料であるクロス GRP、マット GRP において分散相の含有率が増加すると引張り強度の増加が見られ、分散相の含有率の依存性が見られるが、強度のばらつきを示す尺度となる標本変動係数には分散相の含有率の依存性が顕著には現われない。また、変動係数の大きさも 5～12% となり、鉄鋼材料における 2～5% の値と比べてもかなりばらつきの大きい材料であると考えることができる。粒子分散形複合材料においては強度の変動がさらに大きくなる。

次にクロス GRP と粒子分散形複合材料における引張

り強度の実験値と理論分布曲線とを合わせて図 1、図 2 に示す。破壊確率の計算は平均ランク法によって行われた。これらの図において縦軸は破壊確率、横軸は引張り強度であり、理論曲線と実験値とがよく一致していることがわかる。また正規分布と 2 母数ワイブル分布いずれの場合もほとんど変わらず、強度分布においては両方の分布を適用してもよいことがわかる。以上の強度分布のなかで粒子分散形複合材料の P-1 の分布曲線と実験値とが少し一致していないが、3 母数ワイブル分布を適用すると一致するようになる。

2.2 成形時に分散相の移動がある複合材料

成形時に分散相の移動がある複合材料は、主としてバルク・モールディング・コンパウンド (BMC) 法、シート・モールディング・コンパウンド (SMC) 法などの量産性に優れた成形法から得られる。BMC 法および SMC 法は樹脂、硬化剤、充填材をあらかじめ強化材に含浸した成形材料を用いるが、前者はそれらを混練して作り、後者はシート状に含浸させたものを成形材料として用いるものであり、金型の 60～80% に成形材料をチャージ

表 1 クロス GRP、マット GRP、粒子分散形複合材料の組成、引張り強度と設計データ

記 号	繊維強化形複合材料						粒子分散形 複合材料	
	クロス GRP			マット GRP			P-1	P-2
	C-1	C-2	C-3	M-1	M-2	M-3		
組 成 (vol%)								
不飽和ポリエステル樹脂	74.1	62.9	52.8	84.7	79.9	76.9	69.4	52.6
ガラス繊維	25.9	37.1	41.7	15.3	20.1	23.1	—	—
炭酸カルシウム	—	—	—	—	—	—	30.6	23.1
細 砂	—	—	—	—	—	—	—	24.3
引張り強度データ								
標本数	30	30	30	30	30	30	32	31
標本平均値 (kgf/mm ²)	17.8	24.9	26.0	8.3	11.3	12.1	4.2	2.7
標本標準偏差 (kgf/mm ²)	0.91	1.32	1.52	0.99	0.71	1.07	0.76	0.42
標本変動係数 (%)	5.11	5.30	5.81	11.93	6.28	8.84	18.0	15.6
ワイブル分布								
形状母数	20.6	25.2	20.9	9.8	18.4	13.7	7.1	8.3
尺度母数 (kgf/mm ²)	18.3	25.5	26.7	8.8	11.7	12.6	4.5	2.8
設計データ								
MIL-A 設計基準値 S_a (kgf/mm ²)	13.5	19.9	19.8	4.6	8.3	8.0	1.9	1.3
S_a/μ_s	0.76	0.80	0.76	0.55	0.73	0.66	0.45	0.48
MIL-B 設計基準値 S_b (kgf/mm ²)	15.8	22.6	23.0	6.4	9.9	10.0	2.9	1.9
S_b/μ_s	0.89	0.91	0.88	0.77	0.88	0.83	0.69	0.70

図 1 クロス GRP における引張り強度の変動と分布関数の適合

図 2 粒子分散形複合材料における引張り強度の変動と分布関数の適合

し、流動させて成型するもので、厚みに変化のある複雑な形状の成形も可能である。

本研究で用いた SMC 材料の組成を表 2 に示す。円板（直径 300 mm、厚さ 3 mm）に成形し、その際のチャージ率は 30% と 90% である。ここでチャージ率とはチャージした原材料の円形の面積と金型の断面積との比を示す。試験片採取場所を図 3 に示す。SMC 円板の円周方向の試験片を 2 通りに分け、0° 方向試験片（奇数試験片番号）、90° 方向試験片（偶数試験片番号）と名づける。

表 3 に 2 種類のチャージ率の成形板の引張り試験結果を示す。各番号当りの標本数は約 10 個である。0° 方向

表 2 SMC 積層板の組成

樹 脂	ポリマー 6321	48.8 vol%
充 填 材	炭酸カルシウム	21.2
離 型 材	ステアリン酸亜鉛	2.4
硬 化 材	t-ブチルパーベンゾエート	0.5
顔料その他		6.5
強 化 材	ガラスロービング	20.6

図 3 SMC 積層板引張り試験片採取図

グループと 90° 方向グループとの引張り強度を比較すると、30% チャージ率では平均値の差が 1.73 kgf/mm² に対し、90% チャージ率では 3.48 kgf/mm² となっている。30% チャージ率のほうが成形時の分散相の流動が大きいので最初に SMC シートのもつ異方性が緩和されたと考えられ、これらの現象は成形時の分散相の流動状態が引張り強度に大きく影響を与えることを示している。次にばらつきを示す変動係数を調べてみると、各グループごとの変動係数は 30% チャージ率のほうが少し大きい。両グループを加え合わせた両方向という欄を調べると 90% チャージ率のものが 27.8%、30% のものが 20.6% と逆になっている。両グループのデータを一つの母集団と考え正規分布と 2 母数ワイブル分布とを当てはめた結果を図 4 に示す。データ数がそれぞれ約 185 個であるため実験値が帯状で表わされている。30% チャージ率においては実験値と分布関数とが一致しているが、90% チャージ率ではそれほど両者は一致していない。そこで、前回の講座で述べたコルモゴロフ・スミルノフ検定を行なうと、有意水準 5% で 30% チャージ率の強度分布は正規分布とワイブル分布いずれにも適合するが、90% チャージ率の強度分布は不適合であるとの結果を得ている。そこで、90% の場合は 0° グループと 90° グループの二つの母集団の標本が集合しているものと考えのほうがより妥当であると考えられる。以上のことから、成形時の分散相の流動は複合材料の強度の変動に大きな影響を与えることがおわかりになったと思う。実際の SMC 成形品では分散相の流動状態がいろいろ複雑となり、ウェルドラインも生じたり、場所による強度の変動もさらに大きくなるため注意が必要である。

表 3 SMC 積層板の引張り試験結果

チャージ率	円周方向 試験片番号	標本数	標本平均値 (kgf/mm ²)	標本 変動係数 (%)	ワイブル分布	
					形状母数	尺度母数 (kgf/mm ²)
30%	1, 3	19	7.32	20.9	5.43	7.81
	5, 7	20	7.23	15.2	6.43	7.74
	9, 11	20	6.76	10.0	9.25	7.10
	13, 15	18	6.19	14.3	7.15	6.59
	17, 18	20	6.61	16.3	5.96	7.08
	19,	10	6.48	16.1	5.80	6.98
	0° 方向	107	6.80	17.0	6.09	7.29
	2, 4	19	8.69	20.8	4.57	9.50
	6, 8	20	8.35	16.5	7.24	8.92
	10, 12	20	8.41	16.2	7.08	8.85
	14, 16	20	8.68	13.9	8.14	9.22
	90° 方向	79	8.53	17.1	6.72	9.11
	両 方	186	7.53	20.6	5.11	8.19
90%	1, 3	18	6.30	13.6	7.59	6.69
	5, 7	19	6.35	17.4	6.37	6.68
	9, 11	20	6.09	14.7	8.06	6.45
	13, 15	20	5.84	9.5	12.38	6.08
	17, 18	20	5.87	13.0	8.81	6.15
	19,	10	6.19	18.9	5.07	6.73
	0° 方向	107	6.09	14.9	7.29	6.47
	2, 4	18	9.70	18.1	5.21	10.51
	6, 8	20	9.53	18.2	5.47	10.32
	10, 12	20	9.45	12.8	8.50	10.00
	14, 16	20	9.59	14.3	7.48	10.20
	90° 方向	78	9.57	16.0	6.75	10.21
	両 方	185	7.56	27.8	3.66	8.38

図 4 SMC 積層板の全標本における引張り強度と破壊確率との関係

2.3 荷重形態による影響

複合材料は荷重形態によって破壊機構が異なるため強度が違ってくる場合が多い。ここでは一方向グラファイト/エポキシ積層板に対する引張り強度と曲げ強度の変動の関係をとり扱った報告¹²⁾を引用して述べるものとする。実験材料は T300/5208 (Narmco) と AS/3501-5A (Hercules) の2種類で積層数に16プライ、繊維含有率は65~70%である。対象となった試験は引張り試験、3点および4点曲げ試験の3種類である。それぞれの試験で得られたデータに対し2母数ワイブル分布を適用し、最尤推定法により母数の推定を行なった。この計算結果を表4に示す。

本表から明らかなように両タイプのグラファイト/エポキシ積層板とも曲げの形状母数が引張りのそれより約2倍になっている。一方向強化積層板においては引張りと曲げとでは破壊機構が異なっているために生じたものである。引張り試験片では切欠部のない平行部を有しているため繊維配向の乱れなどに敏感でありデータのばらつきが大きくなる傾向があるのに対し、曲げ試験では試験片の厚さ方向の応力勾配があるため局所破壊が生じやすくデータのばらつきが小さく考えられる。しかしながら、他の強化形態、たとえばガラスクロスなどの場合では曲げと引張りのばらつきが接近してくるという報告もある¹³⁾。

3. 材料設計許容値の決定法

複合材料にかぎらず、一般の材料を破壊につながらるような荷重をうける一次構造部材などに適用する場合、材料の強度をいくらにするかということは大変重要ではあるがむずかしい問題である。そのために一般によく行なわれている方法は、実際に生じる荷重に近い負荷による材料試験を行なってデータを取り、本講座Iの基礎概念

のところで述べたデータ処理法に基づいてデータ処理し、強度を決定するものである。データ処理した実際例は前節で示したとおり、強度の分布関数として表現され、これらの分布関数から破壊確率に応じた強度を求めることができる。さて、これまでに気付かれたかもしれないが、強度の分布関数を求める際のデータ数が異なっていることである。一つの分布関数を得るのに多くのデータ数から求めているものもあれば、少数のデータから求めているものもある。その結果、データ数の多いものから得られた分布関数のほうが信頼性が大きいと考えるのは当然である。これらの考え方を定量的に表現するにはどうしたらよいか考えてみよう。最初に正規分布、つぎにワイブル分布に適用できる手法について述べるものとする。

3.1 正規分布の場合

前回の講座で述べたごとく正規分布関数は次式で表わされる。

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\zeta-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} d\zeta \quad (1)$$

ここで、 μ と σ が母数であり正規分布の頭文字をとって $N(\mu, \sigma^2)$ で表わすこともある。

$$\zeta_s = (\zeta - \mu) / \sigma \quad (2)$$

とおき変数変換すると、2母数の値に関係なく(2)式は次式に示す標準正規分布に変換でき、 $N(0, 1)$ で示される。

$$p = F_s(x_s) = \int_{-\infty}^{x_s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\zeta_s^2}{2}\right\} d\zeta_s \quad (3)$$

(3)式において図5に示すごとく $x_s = -u_p$ のとき $F(x_s) = p$ であるとする。この u_p のことを下側100 p パーセント点とよぶことが多い。平均値に対し対称の位置を上側100 p パーセント点と呼ぶが、われわれが取り

表4 一方向グラファイト/エポキシ積層板の引張り試験と曲げ試験結果

材料の種類	T300/5208			AS/3501-5A		
	標本数	形状母数	尺度母数 (MPa)	標本数	形状母数	尺度母数 (MPa)
引張り	20	18.5	1,665	36	13.3	1,506
				28	13.2	1,506
4点曲げ	21	29.3	1,734	30	29.2	1,624
	20	28.7	1,741			
3点曲げ	25	36.7	1,790	28	32.7	1,624
	20	36.2	1,797	28	22.9	1,617

図5 正規分布と標準正規分布との関係の説明図

扱う破壊確率は一般に小さいためここでは下側の場合で考えるものとする。 $\zeta_s = -u_p$ を(2)式に代入してもとの正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ になおすと、区間 $(-\infty, \mu - u_p\sigma)$ は $N(\mu, \sigma^2)$ 全体の $100p$ パーセントを占めることを意味している。母数 μ と σ とは一般にデータ数が無限大のときに求められる値であるため未知数であることが多い。そこで、データ数が n 個（このことを“大きさ n の標本”という）の場合に求めた平均値 $\bar{x}$ と分散 s^2 で置き換えて用いている。この場合、さきほどの同じ区間 $(-\infty, \bar{x} - u_p s)$ をつくっても、この面積が全体の $100p$ パーセントをおおうとは必ずしもいえない。いま、適当な k をとって正規母集団の $100p$ パーセント以下のものが $\bar{x} - ks$ より小さい確率 γ で成り立つ場合を考えてみよう。この場合の規準化変数はつぎのようになる。

$$x_s = \{(\bar{x} - ks) - \mu\} / \sigma \quad (4)$$

したがって確率は次式のように表わされる。ここで $Pr[\cdot]$ は $\cdot$ の確率を意味している。

$$Pr[F_s(x_s) \leq p] = \gamma \quad (5)$$

すなわち(5)式を満足するような k を求めることが問題となる。この $(\bar{x} - ks)$ を（下側）許容限界、 k を片側許容係数という。(5)式の左辺を変形してみよう。

$$\begin{aligned} Pr[F_s(x_s) \leq p] &= Pr[x_s \leq -u_p] \\ &= Pr[\{(\bar{x} - ks) - \mu\} / \sigma \leq -u_p] \\ &= Pr[\{\bar{x} - \mu + u_p \sigma\} / s \leq k] \end{aligned}$$

ここで両辺に $\sqrt{n}$ を掛けて整理してみる。ここで n は標本数の大ききすなわちデータの数である。

$$\begin{aligned} Pr[F_s(x_s) \leq p] \\ = Pr \left[\frac{\{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)\} / \sigma + \sqrt{n} u_p}{(s/\sigma)} \leq \sqrt{n} k \right] \quad (6) \end{aligned}$$

ここで、 $[\]$ 中の $(\sqrt{n}(\bar{x} - \mu) / \sigma + \sqrt{n} u_p) / (s/\sigma)$ は自由度 $\nu = n - 1$ 、非心度 $\lambda = \sqrt{n} u_p$ の非心 t 分布に従うことが知られている。ゆえに上式は最終的に次式となる。

$$Pr[F_s(x_s) \leq p] = Pr[t(\nu; \lambda) \leq \sqrt{n} k] = \gamma \quad (7)$$

非心度 $\lambda = \sqrt{n} u_p$ が与えられたとき非心 t 分布が $\sqrt{n} k$ より小さい確率が γ となるような k を n, γ に対して計算した一例を付表に示す。この付表では $\gamma = 0.95$ のときの $p = 0.900, 0.950, 0.975, 0.990, 0.999$ の場合の計算結果を示している¹⁴⁾。

さて、ここに出てきた t 分布について少し勉強してみよう。 t 分布は代表的な標本分布の一つである。標本分布とは実験などによって得られた標本に基づく統計量の分布である。正規分布を母集団とするものから n 個の標本 $x_1, \dots, x_n$ がとりだされたたとすると、これらの標本平均値 $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n) / n$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ にしたがうことは知られている。すなわち、平均値のばらつきは母集団の分散よりは小さくなることは注目される。さて、 $\bar{x}$ を標準化すると $(\bar{x} - \mu) / (\sigma / \sqrt{n})$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ にしたがうことになる。もしも σ がわかっている場合であれば、この分布を使って未知数である母平均 μ の推測ができるけれども、 μ, σ がともに未知数であるときにはこの分布を用いて μ についての推測に使うのには都合が悪い。そこで、未知の σ^2 をサンプルから求めた標本分散におきかえたらということが考えられるが、このようにして得られる変数の分布は当然正規分布をしない。この分布を研究したのが、ビール会社の技師であったゴセット (1876-1936) で Student のペンネームで t 分布を発表した。この分布は近代数理統計学の中の統計的推測の面で新しい第一歩を踏み出すきっかけを作ったものと高く評価されている。統計量としてつぎのものを考え、これを t -統計量といっている。

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\{(1/n) \cdot \{1/(n-1)\} \sum (x_i - \bar{x})^2\}^{1/2}}$$

この確率分布は正規分布に似た左右対称の分布であるが、正規分布と異なるのは、標本数に依存することによって次式で与えられる。

$$f(t, \nu) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \quad (8)$$

ここで Γ はガンマ関数、 $\nu = n - 1$ であって自由度とよばれている。 n が非常に大きくなると正規分布に近づくことになる。この t 分布を拡張したのが非心 t 分布であり、母平均が 0 でない場合を取り扱うものである。また t 分布が標本数の関数であることも重要であり、信頼水準が標本数に依存することになる。

米国の MIL 規格においては¹⁵⁾、材料設計許容値として A および B 基準値が定められている。A 基準値とは

95% の信頼水準で 99% の生き残り確率 (1% の破壊確率) を有する値であり, B 基準値は 95% の信頼水準で 90% の生き残り確率 (10% の破壊確率) を有する値である. 設計許容値 S_a は次式で与えられる.

$$S_a = \bar{x} - ks \quad (9)$$

本式にある片側許容係数 k は付表に詳細に示されているが, A, B 基準における k と標本数との関係が図 6 に表わされる. たとえば, ある材料試験を行なった結果, 30 個のデータが得られたものとする. これらのデータの平均値 $\bar{x} = 50$ MPa, 標本標準偏差 (この場合 $S = \{\sum (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)\}^{1/2}$ の式を用いて計算するのがよい) $S = 5$ MPa が得られたとする. 付表または図 9 から k は標本数 $n = 30$ に対して求める. そして A 基準の k は 3.06390, B 基準の k は 1.77733 が得られる. これらの値を (9) 式に代入してつぎの設計許容値が得られる.

A 基準の場合: $S_a = 50 - 3.0639 \times 5 = 34.6805$ MPa

B 基準の場合: $S_a = 50 - 1.77733 \times 5 = 41.11335$ MPa

3.2 ワイブル分布の場合

複合材料の強度が (2 母数) ワイブル分布にしたがう場合, 推定されたワイブル分布から材料設計許容値である A, B 基準値を求めることができる. この手法は種々のものがあるが¹⁶⁾, ここでは比較的簡単な手法について述べるものとする¹⁷⁾. 2 母数ワイブル分布は二つの母数をもっているが, そのなかで形状母数 α は強度の変動を示す係数であって一般に材料定数として取り扱う場合が多い. ここで述べる方法はこの形状母数を既知な数値として取り扱う. さらにもう一つの尺度母数 β の推定法として最尤推定法を用いる場合もしばしばある. 最尤推定

法の手法は前回の講座で述べたのでそれを参照していただくものとする. さて, ワイブル分布 (2 母数) は次式で与えられる.

$$f(x) = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \left(\frac{x}{\hat{\beta}} \right)^{\hat{\alpha}-1} \exp \left[- \left(\frac{x}{\hat{\beta}} \right)^{\hat{\alpha}} \right], \quad x \geq 0 \quad (10)$$

(10) 式の尤度関数 P は次式となる.

$$P = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \left(\frac{x_i}{\hat{\beta}} \right)^{\hat{\alpha}-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x_i}{\hat{\beta}} \right)^{\hat{\alpha}} \right\} \right] \quad (11)$$

尤度関数を最大にする母数の推定量が存在するならば, その場合に観測値が最も実現しやすい条件を備えていると考える. 尤度関数 P を最大にする条件は $\ln P$ を $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ についてそれぞれ偏微分して得られる式を 0 とおくことから求められる. このうち $\hat{\alpha}$ で偏微分した式から尺度母数の推定値は次のように求められる.

$$\hat{\beta} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\alpha}} \right)^{1/\hat{\alpha}} \quad (12)$$

母数の推定において, 母数に無関係な統計量を考えるのが議論に一般性をもたせるという観点からのぞましい. そこで, いま (11) 式のワイブル分布において

$$y = (x/\beta)^{\alpha} \quad (13)$$

$$U = \hat{\alpha}/\alpha, \quad V = (\hat{\beta}/\beta)^{\alpha} \quad (14)$$

とおくことにする. ワイブル分布の密度関数を (13) 式に示される y に変換すると

$$f(y) = f(x) \cdot |dx/dy| = \exp(-y) \quad (15)$$

となる. これゆえ, n 個の観測値 x_i に対応した y_i はそれぞれ独立に平均 1 の指数分布に従い, 母数 α, β には独立であることがわかる. (14) 式の V に (12) 式を代入して整理すると次式が得られる.

$$V = \left(\frac{\hat{\beta}}{\beta} \right)^{\alpha} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n z_i \right)$$

$$z_i = (n-i+1)(y_i - y_{i-1}) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

ここで, z_i もまた平均 1 の指数分布に従うため, nV は n 個の独立な平均値 1 の指数変数の和となる. さらに $g_i = 2z_i$ とおくと, z_i が平均 1 の指数分布に従うことから確率変数 g_i の密度関数は

$$f(g_i) = (1/2) \exp(-g_i/2) \quad (17)$$

となる. ここで自由度 ϕ の χ^2 分布の密度関数が

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{\phi/2} \Gamma(\phi/2)} (\chi^2)^{\phi/2-1} \exp(-\chi^2/2) \quad (18)$$

であることに留意して $\phi=2$ とおくと (18) 式は自由度 2 の χ^2 分布関数と一致していることがわかる. このため χ^2 分布の再生性から

図 6 MIL-A, B 基準における片側許容係数と標本数との関係

図 7 A, B 基準値における形状母数と $S_a/\hat{\beta}$ との関係

$$2nV = 2n \left(\frac{\hat{\beta}}{\beta} \right)^\alpha = \sum_{i=1}^n 2z_i = \sum_{i=1}^n g_i \quad (19)$$

は自由度 $2n$ の χ^2 分布に従うことになる。

いま、信頼水準を γ とすると、 $\chi_{2n;\gamma}^2$ はつぎのように定義される。

$$Pr[\chi_{2n}^2 \leq \chi_{2n;\gamma}^2] = \gamma \quad (20)$$

(19) 式を代入すると次式を得る。

$$Pr[2n(\hat{\beta}/\beta)^\alpha \leq \chi_{2n;\gamma}^2] = \gamma \quad (21)$$

そこで信頼水準 γ を有する $\hat{\beta}$ の下限値は次式で与えられる。

$$\beta_\gamma = (2n/\chi_{2n;\gamma}^2)^{1/\alpha} \hat{\beta} \quad (22)$$

生き残り確率 R 、形状母数 α 、尺度母数 β_γ を満足する材料設計許容値 S_a が次式で表わされる。

$$S_a = \beta_\gamma (-\ln R)^{1/\alpha} = (-2n \ln R / \chi_{2n;\gamma}^2)^{1/\alpha} \hat{\beta} \quad (23)$$

A 基準値において $R=0.99$ と $\gamma=0.95$ 、B 基準値において $R=0.90$ と $\gamma=0.95$ を代入することによりそれぞれの S_a を求めることができる。図 7 に A, B 基準値における $S_a/\hat{\beta}$ と形状母数 α との関係を示す。形状母数 α が小さくなると、すなわち材料のばらつきが大きくなると材料設計許容値 S_a が $\hat{\beta}$ より小さく見積もる割合が大きくなることがわかる。

ここで計算手順をまとめるとつぎのとおりになる。

- 1) 尺度母数 α を既知数として取り扱う。
- 2) (12) 式に観測値 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ を代入して尺度母数 $\hat{\beta}$ を計算する。
- 3) 自由度 $2n$ 、信頼水準 γ に相当する χ^2 分布の $\chi_{2n;\gamma}^2$ を χ^2 分布表から求める (χ^2 分布表は一般の統計教科書に添付されている)。
- 4) 生き残り確率 R を (23) 式に代入する。 $n, \hat{\beta}, \chi_{2n;\gamma}^2$ をも合わせて代入し材料設計許容値 S_a が決定される。

4. お わ り に

複合材料と信頼性(II)として強度へのアプローチを取

り上げ、複合材料の強度分布の特徴とこれらのデータを設計に結びつける手法について述べたが、紙面の枚数の制限と能力不足で十分説明できなかったことをお詫び申し上げる。複合材料の強度は引張り、曲げ、剪断、圧縮など広範囲にわたっており多くの発表もなされているが、剪断、圧縮強度についてはここでは触れることができなかった。本講座の最後の“設計へのアプローチ(2)”でこの方面の文献から強度分布の母数などを引き出し表にして提示するものとしているのでそちらを参照していただくことを希望する。

参 考 文 献

- 1) B.D. Coleman : *J. Mech. Phys. Solids*, 7(1958), 60-70.
- 2) D.E. Güccer & J. Gurland : *J. Mech. Phys. Solids*, 18 (1962), 365-373.
- 3) B.W. Rosen : *AIAA J.*, 2 (1964), 1985-1991.
- 4) C. Zweben : *AIAA J.*, 6 (1968), 2325-2331.
- 5) P.M. Scop & A.S. Argon : *J. Compos. Mater.*, 3 (1969), 30-47.
- 6) D.G. Harlow & S.L. Phoenix : *Int. J. Fract.*, 17 (1981), 601-630.
- 7) K.P. Oh : *J. Compos. Mater.*, 13 (1979), 311-328.
- 8) P.W. Manders, M.G. Bader & T.W. Chou : *Fibre Sci. Technol.*, 17 (1982), 183-204.
- 9) H. Fukuda & T.W. Chou : *J. Mater. Sci.*, 17 (1982), 1003-1011.
- 10) T. Fujii & Z. Maekawa : *Proc. 21st Japan Congr. Mater. Res.* (1978), pp. 282-286.
- 11) 藤井太一, 前川善一郎 : 強化プラスチック, 25 (1979), 103-110.
- 12) J.M. Whitney & M. Knight : *Exper. Mech.*, 37 (1980), 211-216.
- 13) T. Fujii & Z. Maekawa : *Proc. 23rd Japan Congr. Mater. Res.* (1980), pp. 322-327.
- 14) 山内二郎編 : 統計数値表, 日本規格協会 (1977), Tables JSA 65.
- 15) MIL-HDBK-5C, Department of Defense, Washington, D.C. (1978), 9-3.
- 16) N.R. Mann : *Technometrics*, 15 (1973), 87-101.
- 17) S.W. Tsai : Technical Report (AFML-YR-78-33) (1978), 282-283.

付表 確率 p , 信頼水準 $\gamma=0.95$, 自由度 $\nu(=n-1)$ の場合の片側許容係数 k の数値表
 $\gamma=0.950$

$\begin{array}{c} P \\ \swarrow \searrow \\ n \quad \nu \end{array}$		.900	.950	.975	.990	.999
2	1	20.58147	26.25967	31.25747	37.09358	49.27562
3	2	6.15528	7.65590	8.98612	10.55273	13.85707
4	3	4.16193	5.14387	6.01497	7.04236	9.21418
5	4	3.40663	4.20268	4.90851	5.74108	7.50189
6	5	3.00626	3.70768	4.32914	5.06199	6.61178
7	6	2.75543	3.39947	3.96963	4.64172	6.06266
8	7	2.58191	3.18729	3.72283	4.35386	5.68753
9	8	2.45376	3.03124	3.54174	4.14302	5.41340
10	9	2.35464	2.91096	3.40245	3.98112	5.20330
11	10	2.27531	2.81499	3.29150	3.85234	5.03646
12	11	2.21013	2.73634	3.20072	3.74708	4.90031
13	12	2.15544	2.67050	3.12482	3.65920	4.78678
14	13	2.10877	2.61443	3.06027	3.58451	4.69041
15	14	2.06837	2.56600	3.00457	3.52013	4.60743
16	15	2.03300	2.52366	2.95592	3.46394	4.53509
17	16	2.00171	2.48626	2.91299	3.41440	4.47136
18	17	1.97380	2.45295	2.87478	3.37033	4.41471
19	18	1.94870	2.42304	2.84050	3.33082	4.36396
20	19	1.92599	2.39600	2.80954	3.29516	4.31819
21	20	1.90532	2.37142	2.78141	3.26277	4.27665
22	21	1.88641	2.34896	2.75572	3.23320	4.23876
23	22	1.86902	2.32832	2.73213	3.20607	4.20400
24	23	1.85297	2.30929	2.71039	3.18108	4.17199
25	24	1.83810	2.29167	2.69027	3.15796	4.14240
26	25	1.82427	2.27530	2.67159	3.13649	4.11495
27	26	1.81137	2.26005	2.65418	3.11650	4.08938
28	27	1.79930	2.24578	2.63791	3.09782	4.06552
29	28	1.78798	2.23241	2.62266	3.08033	4.04318
30	29	1.77733	2.21984	2.60834	3.06390	4.02220
31	30	1.76729	2.20800	2.59486	3.04844	4.00246
32	31	1.75781	2.19682	2.58213	3.03384	3.98384
33	32	1.74884	2.18625	2.57010	3.02005	3.96624
34	33	1.74033	2.17623	2.55870	3.00699	3.94959
35	34	1.73225	2.16672	2.54788	2.99459	3.93376
36	35	1.72456	2.15768	2.53759	2.98281	3.91877
37	36	1.71724	2.14906	2.52780	2.97160	3.90448
38	37	1.71025	2.14085	2.51846	2.96090	3.89087
39	38	1.70357	2.13300	2.50954	2.95070	3.87787
40	39	1.69718	2.12549	2.50102	2.94094	3.86545
41	40	1.69106	2.11831	2.49286	2.93160	3.85357
42	41	1.68519	2.11142	2.48504	2.92266	3.84218
43	42	1.67955	2.10481	2.47753	2.91407	3.83126
44	43	1.67414	2.09846	2.47033	2.90583	3.82078
45	44	1.66893	2.09235	2.46340	2.89791	3.81071
46	45	1.66391	2.08648	2.45673	2.89029	3.80101
47	46	1.65908	2.08081	2.45030	2.88294	3.79168
48	47	1.65441	2.07535	2.44411	2.87587	3.78269
49	48	1.64991	2.07008	2.43814	2.86904	3.77401
50	49	1.64556	2.06499	2.43237	2.86245	3.76564
60	59	1.60891	2.02216	2.38385	2.80705	3.69533
80	79	1.55937	1.96444	2.31858	2.73265	3.60106
120	119	1.50324	1.89929	2.24509	2.64903	3.49537
240	239	1.43394	1.81924	2.15505	2.54682	3.36655
∞	∞	1.28155	1.64485	1.95996	2.32635	3.09023