研究論文

網目理論による積層板・殻の剛性最適化

福 永 久 雄*

(1987 年 1 月 9 日受付)

Stiffness Optimization of Laminated Composite Plates and Shells
Based upon Netting Theory

Hisao FUKUNAGA*

(Received January 9, 1987)

The present paper treats the optimal design problems of laminated composite plates and shells based upon the netting theory in which the stiffnesses other than the longitudinal Young's modulus are neglected. Some stiffness characteristics are examined, that is, the vibration and buckling characteristics of laminated composite plates and the buckling characteristics of laminated composite cylindrical shells. Optimal laminate configurations for the vibration and the buckling are also obtained by using the netting theory and compared with the results based upon the lamination theory. Applicability and limitation of the netting theory to the laminated plates and shells are verified through the numerical examples.

1. 序

積層板・殻の座屈・振動特性が積層材の積層構成により非常に変化することはよく知られており、積層構成を最適化する研究もすでに多数行なわれてきた。このような積層材の剛性特性最適化は、通常、古典積層理論に基づいて解析される。古典積層理論では、積層材の剛性は12個の積層パラメータと剛性に関する不変量で表示される¹⁾。積層パラメータは、各層の繊維配向角を板厚方向に積分した関数であり、材料には依存せず繊維配向角の配置によって決まる幾何学的パラメータである。一方、剛性に関する不変量は、用いる材料が指定されれば決まる材料パラメータである。複合材料の材料特性は広範な値をとりうるが、一方向繊維強化材料では、繊維方向のヤング率 E_L は他の材料定数 E_T , G_{LT} , ν_L に比べて非常に大きいという特質がある。そこで、本報では、 E_L 以外の材料定数を無視した網目理論に基づいて、積層板・殻の剛性最適化問題を考察する。

網目理論はマトリックスの剛性を無視して連続繊維の

繊維方向ヤング率のみを考えた近似理論であり、FW 圧力容器の設計等において膜理論として適用されてきた²⁾。それに対し、本報では、網目理論を積層理論の近似理論として用い、積層材の面内剛性・面外剛性の両方を繊維方向ヤング率 E_L のみで評価する。このとき、 E_L で基準化された積層材の剛性特性は、用いる材料に依存せず、各層の繊維方向配置のみによって決定されることになる。その結果、網目理論が妥当であれば、網目理論に基づいて求められた最適積層構成は、材料によって変化しない一般性のある結果を与える。

本報では、積層板・殻の座屈・振動に関する最適積層構成を網目理論に基づいて求め、古典積層理論により得られた積層構成³⁻¹⁴⁾と比較検討する。また、網目理論の妥当性、適用範囲について、積層構成および材料の異方性の影響を調べる。

2. 直交異方性積層材の構成方程式

古典積層理論における構成方程式は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 N , M は合力、合モーメント、 ϵ_0 , κ は中央歪、曲率変化であり、 A , B , D は面内剛性、カップリング剛性、面外剛性を示す。

* 航空宇宙技術研究所機体一部主任研究官 (182 調布市深大寺東町 7-44-1)
Senior Researcher, 1st Airframe Div., National Aerospace Laboratory, 7-44-1, Jindaiji-higashi-machi, Chofu 182, Japan

ここでは、簡単のため、積層材はカップリング項を無視できる直交異方性積層材であるとする。このような積層材としては対称バランス積層材（中央面に関して対称で $+\theta$ 層と $-\theta$ 層の板厚の等しい積層材）で層数が多く曲げと振りのカップリング項を無視できる場合が考えられる。(1)式の A , B , D のうち非零の成分を積層パラメータと剛性に関する不変量で次式のように表示する^{4,5)}。

$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{22} \\ A_{66} \end{Bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 1 & 0 \\ 1 & -\xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_{22} \\ D_{66} \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} 1 & \xi_9 & \xi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{10} & 1 & 0 \\ 1 & -\xi_9 & \xi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_{10} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 h は積層材の板厚であり、 U_i ($i=1, 2, \dots, 5$) は Tsai-Pagano¹⁾ と類似の剛性に関する不変量である。

$$\begin{aligned} U_1 &= [Q_{11} + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) + Q_{22}]/4 \\ U_2 &= [Q_{11} - Q_{22}]/2 \\ U_3 &= [Q_{11} - 2(Q_{12} + 2Q_{66}) + Q_{22}]/4 \\ U_4 &= [Q_{11} + 2(Q_{12} - 2Q_{66}) + Q_{22}]/4 \\ U_5 &= [Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22}]/4 \end{aligned} \quad (4)$$

また、 ξ_1, ξ_2 は面内積層パラメータ、 ξ_9, ξ_{10} は面外積層パラメータで次式で表示される。

$$\xi_1 = \int_0^1 \cos 2\theta(u) du, \quad \xi_2 = \int_0^1 \cos^2 2\theta(u) du \quad (5)$$

$$\xi_9 = 3 \int_0^1 \cos 2\theta(u) u^2 du, \quad \xi_{10} = 3 \int_0^1 \cos^2 2\theta(u) u^2 du$$

ここで、 $\theta(u)$ は繊維配向角で板厚方向座標 u の関数である。

直交異方性積層材の積層パラメータ間には、

$$-1 \leq \xi_1 \leq 1, \quad \xi_1^2 \leq \xi_2 \leq 1 \quad (6)$$

$$-1 \leq \xi_9 \leq 1, \quad \xi_9^2 \leq \xi_{10} \leq 1$$

の関係がある^{4,5)}。また、 (ξ_1, ξ_2) と (ξ_9, ξ_{10}) は独立なパラメータではなく相互に拘束関係があり、ある指定された (ξ_1, ξ_2) に対し、 (ξ_9, ξ_{10}) はある許容領域の中に存在する¹³⁾。面内積層パラメータ (ξ_1, ξ_2) および許容領域内の面外積層パラメータ (ξ_9, ξ_{10}) が与えられれば、

それに対応する積層構成を決定することができる¹³⁾。

(4)式の剛性に関する不変量は、材料が指定されれば定まる材料定数であるが、繊維強化複合材料の繊維とマトリックスの組合せは多種多様であり、 U_i の値もかなり変動する。しかし、一方繊維強化材料では、繊維方向のヤング率 E_L は繊維と垂直方向のヤング率 E_T 、剪断係数 G_{LT} に比べて非常に大きい。剛性の大部分は繊維方向のヤング率 E_L によって決定されると考えられるので、 $E_T = G_{LT} = 0$ とする。また、ポアソン比の効果も小さいと仮定して $\nu_L = 0$ とする。このような網目理論を用いると(4)式の剛性に関する不変量は次式のようになる。

$$U_1 = U_2/2 = U_3 = U_4 = U_5 = E_L/4 \quad (7)$$

Table 1 に CFRP, GFRP の材料定数を比較する。CFRP は GFRP に比べ異方性がより強いので、 U_1 を除いては、網目理論による(7)式の値と(4)式の値とがそれほど変わらないことがわかる。

(7)式を(2)(3)式に代入すると、網目理論における面内・面外剛性が次のように求まる。

$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{22} \\ A_{66} \end{Bmatrix} = \frac{E_L h}{4} \begin{Bmatrix} 1 + 2\xi_1 + \xi_2 \\ 1 - \xi_2 \\ 1 - 2\xi_1 + \xi_2 \\ 1 - \xi_2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_{22} \\ D_{66} \end{Bmatrix} = \frac{E_L h^3}{48} \begin{Bmatrix} 1 + 2\xi_9 + \xi_{10} \\ 1 - \xi_{10} \\ 1 - 2\xi_9 + \xi_{10} \\ 1 - \xi_{10} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Table 1 に示す CFRP, GFRP 材について、Fig. 1 に面内剛性を比較して示す。積層理論による剛性値と網目理論による剛性値を比べると、GFRP に比べ異方性のより強い CFRP において両者の差異が小さい。なお、Fig. 1 において A_{22} の等高線は省略されているが、 ξ_2 軸に関し A_{11} と対称の関係がある。

3. 積層板・殻の座屈・振動特性最適化

3.1 積層板の固有振動数を最大とする積層構成

直交異方性積層板の固有振動数を与える方程式は次式で示される。

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \rho h \omega^2 w \quad (10)$$

ここで、 w は撓み、 ρ は密度、 ω は角振動数である。積層板は Fig. 2 に示すように $a \times b$ の矩形板で、周辺は単純支持であるとする。

Table 1 Material constants of CFRP and GFRP.

		(GPa)				
		U_1	U_2	U_3	U_4	U_5
CFRP (Torayca P3060) $E_L=142$, $E_T=10.8$ $G_{LT}=5.49$ (GPa), $\nu_L=0.3$	Exact values	45.6	66.1	31.3	34.6	36.8
	Netting theory	35.5	71.0	35.5	35.5	35.5
GFRP (Scotchply) $E_L=38.6$, $E_T=8.27$ $G_{LT}=4.14$ (GPa), $\nu_L=0.26$	Exact values	17.1	15.4	6.7	8.8	10.8
	Netting theory	9.7	19.3	9.7	9.7	9.7

Fig. 1 Comparison of stiffness characteristics by the netting theory and by the lamination theory. ($A_{11}^*=A_{11}/h$, $A_{12}^*=A_{12}/h$, $A_{66}^*=A_{66}/h$, (GPa))

--- Netting theory, $\left. \begin{array}{l} \text{--- } A_{11}^* \\ \text{--- } A_{12}^* \\ \text{--- } A_{66}^* \end{array} \right\} \text{Lamination theory}$

$$\begin{aligned} x=0, a: w=M_x=0 \\ y=0, b: w=M_y=0 \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式を満足する変位関数として

$$w=W \sin (m \pi x / a) \sin (n \pi y / b) \quad (12)$$

を選ぶと、これは(10)式の振動方程式も満たす。よって(12)式は直交異方性積層板の振動モードとなっており、固有振動数は無次元化して次式で与えられる。

$$\omega^{*2} \equiv 48 b^4 \rho \omega^2 / \pi^4 E_L h^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{R^4} [\{m^4 \bar{U}_1 + 2 R^2 m^2 n^2 (\bar{U}_4 + 2 \bar{U}_5) + R^4 n^4 \bar{U}_1\} \\ &+ (m^4 - R^4 n^4) \bar{U}_2 \xi_9 \\ &+ (m^4 - 6 R^2 m^2 n^2 + R^4 n^4) \bar{U}_3 \xi_{10}] \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 $\bar{U}_i = 4 U_i / E_L$, $R = a / b$ である。

Table 1 に示す CFRP, GFRP 材について、 $\partial \omega^{*2} /$

Fig. 2 Configuration of laminated composite plate.

$\partial m^2 > 0$, $\partial \omega^{*2} / \partial n^2 > 0$ であるので、(13)式において $m = n = 1$ が基本固有振動数を与える。すなわち、基本固有振動数 ω_f は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \omega_f^{*2} = & (1 / R^4) [\{\bar{U}_1 + 2 R^2 (\bar{U}_4 + 2 \bar{U}_5) + R^4 \bar{U}_1\} \\ & + (1 - R^4) \bar{U}_2 \xi_9 + (1 - 6 R^2 + R^4) \bar{U}_3 \xi_{10}] \end{aligned} \quad (14)$$

(6)式の関係を満たす (ξ_9, ξ_{10}) に対し、(14)式の ω_f を最大とする (ξ_9, ξ_{10}) は $\xi_{10}=\xi_9^2$ を満足するアングラプライ材のなかにあり、最適積層構成は次式で示される⁷⁾。

$$\cos 2\theta = \frac{R^4 - 1}{R^4 - 6R^2 + 1} \frac{\bar{U}_2}{2\bar{U}_3}$$

$$\left(-1 \leq \frac{R^4 - 1}{R^4 - 6R^2 + 1} \frac{\bar{U}_2}{2\bar{U}_3} \leq 1 \text{ のとき} \right)$$

$$\theta = 0^\circ \text{ or } 90^\circ \quad (\text{上記以外の場合}) \quad (15)$$

一方、網目理論による固有振動数は(9)式を(13)式に代入することによって得られる。この場合も、 $\partial \omega^{*2} / \partial m^2 \geq 0$, $\partial \omega^{*2} / \partial n^2 \geq 0$ が成り立つので $m=n=1$ が基本固有振動数を与える。よって、基本固有振動数を最大とする積層構成は、(15)式で $\bar{U}_2=2$, $\bar{U}_3=1$ とおくことによって得られる。

$$\cos 2\theta = \frac{R^4 - 1}{R^4 - 6R^2 + 1}$$

$$\left(-1 \leq \frac{R^4 - 1}{R^4 - 6R^2 + 1} \leq 1 \text{ のとき} \right)$$

$$\theta = 0^\circ \text{ or } 90^\circ \quad (\text{上記以外の場合}) \quad (16)$$

Fig. 3 に、積層理論に基づく最適繊維配向角(15)式と網目理論に基づく最適繊維配向角(16)式を比較して示す。(15)式に示されるように、最適繊維配向角は板の縦横比 $R=a/b$ と剛性に関する不変量 U_2/U_3 の比によって決まる。 $R=1$ の近くでは積層理論に基づく解と網目理論に基づく解はほとんど一致し、 $R=1$ から離れると両者に若干の差異を生じる。また、GFRP より CFRP の $U_2/2U_3$ のほうが1に近いので、CFRP 材のほうが積層理論による解と網目理論による解との差異が小さい。

Fig. 4 には、(15)式に示される最適繊維配向角に対する基本固有振動数の比 $(\omega_{NT}/\omega_{EX})^2$ (網目理論による固有振動数、 ω_{EX} : 積層理論による固有振動数)を示す。 ω_{NT} の ω_{EX} との相違は、CFRP 材で最大 4%, GFRP 材で最大 10% 程度である。

3.2 積層板の圧縮座屈荷重を最大とする積層構成

直交異方性積層板の圧縮座屈方程式は次式で示される。

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (17)$$

Fig. 3 Optimal fiber angles to maximize the fundamental natural frequencies of the laminated plates.

Fig. 4 Comparison of the fundamental natural frequencies by the netting theory and by the lamination theory.

Fig. 5 Optimal fiber angles to maximize the buckling loads of the laminated plates.

ここで、 $\bar{N}_x$, $\bar{N}_y$ は Fig. 2 に示す矩形板における x , y 方向の圧縮荷重である。振動の場合と同様に周辺単純支持境界条件(11)式を考え、変形を(12)式で表示して(17)式に代入すると、次式に示す無次元座屈荷重が求められる。

る。

$$\begin{aligned}\Phi &\equiv 48Pb^2/\pi^4 E_L h^3 \\ &= \frac{1}{R^2[k_x m^2 + k_y R^2 n^2]} [\{m^4 \bar{U}_1 + 2R^2 m^2 n^2 \\ &\quad \times (\bar{U}_4 + 2\bar{U}_5) + R^4 n^4 \bar{U}_1\} + (m^4 - R^4 n^4) \bar{U}_2 \xi_9 \\ &\quad + (m^4 - 6R^2 m^2 n^2 + R^4 n^4) \bar{U}_3 \xi_{10}] \quad (18)\end{aligned}$$

ここで、 $\bar{N}_x = k_x P$ 、 $\bar{N}_y = k_y P$ 、 $\bar{U}_i = 4U_i/E_L$ 、 $R = a/b$ である。

一方、網目理論による座屈荷重は、(7)式を(18)式に代入することにより次式で求まる。

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{R^2[k_x m^2 + k_y R^2 n^2]} [(m^4 + 6R^2 m^2 n^2 + R^4 n^4) \\ &\quad + 2(m^4 - R^4 n^4) \xi_9 \\ &\quad + (m^4 - 6R^2 m^2 n^2 + R^4 n^4) \xi_{10}] \quad (19)\end{aligned}$$

荷重比 k_x 、 k_y および板の縦横比 R を指定したとき、(19)式の Φ の m 、 n に関する最小値が圧縮座屈荷重を与える。この圧縮座屈荷重を最大とする ξ_9 、 ξ_{10} ($\xi_9^2 \leq \xi_{10} \leq 1$) をパラメトリック計算により探すことによって最適積層構成が求まる。数値計算の結果、(18)式の解と同様に^{3,4)}、 $\xi_{10} = \xi_9^2$ の $\pm 0^\circ$ アングルプライ材が最適積層構成を与えた。

このようにして求められた最適繊維配向角 θ を Fig. 5 に示す。Fig. 5 には、積層理論による CFRP 積層板の最適繊維配向角⁴⁾も示す。振動の場合と同様に、板の縦横比 $R=1$ の近くでは網目理論解と積層理論解はよい一致を示すが、 $R=1$ から離れると荷重比 $k_x : k_y$ の値によっては両者の相違が大きくなる。最適繊維配向角の差異が著しいのは、 $k_x : k_y = 1 : 4$ で $R > 1.75$ の場合であり、積層理論に基づく最適繊維配向角が 90° 一方向材であるのに対し、網目理論では $\pm 78^\circ$ アングルプライ材となる。これは、網目理論では 90° 一方向板の $k_x \neq 0$ の場合の座屈荷重がゼロ（軸方向半波数 m が無限大）となることによっている。網目理論では、繊維方向のヤング率以外は無視するため、 0° 一方向材や 90° 一方向材の繊維と垂直方向剛性がゼロとなる。ある方向の剛性がゼロとなる 0° 、 90° 一方向材に網目理論を適用するには注意を要する。これ以外の場合は、網目理論に基づく最適積層構成は積層理論による解に近く、繊維方向の剛性により積層板の剛性特性がほとんど決定されていることがわかる。

3.3 積層円筒殻の座屈荷重を最大とする積層構成

Fig. 6 に示す直交異方性積層円筒殻に対する Donnell 型の座屈方程式は次式で与えられる。

Fig. 6 Configuration of laminated cylindrical shell.

$$\begin{aligned}D_{11}w_{,xxxx} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxyy} + D_{22}w_{,yyyy} \\ + (1/R)U_{,xx} + \bar{N}_x w_{,xx} + \bar{N}_y w_{,yy} = 0 \\ a_{22}U_{,xxxx} + (2a_{12} + a_{66})U_{,xxyy} + a_{11}U_{,yyyy} \\ - (1/R)w_{,xx} = 0 \quad (20)\end{aligned}$$

ここで、 $\bar{N}_x$ 、 $\bar{N}_y$ は軸方向、周方向圧縮荷重、 w は撓み、 U は応力関数を示す。また、円筒の板厚 h 、軸長 L 、半径 R とする。 $x=0$ 、 L で S2 単純支持境界条件 ($N_x = v = w = M_x = 0$) を満足する次の変位関数、応力関数を用いる。

$$w = \bar{w} \sin(\lambda/R)x \cos n\theta \quad (21)$$

$$U = \bar{U} \sin(\lambda/R)x \cos n\theta \quad (\lambda = m\pi R/L)$$

(21)式を(20)式に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{R^2(k_x \lambda^2 + k_y n^2)} \\ &\quad \times [D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2 n^2 + D_{22}n^4] \\ &\quad + \frac{\lambda^4}{k_x \lambda^2 + k_y n^2} \frac{1}{a_{22}\lambda^4 + (2a_{12} + a_{66})\lambda^2 n^2 + a_{11}n^4} \quad (22)\end{aligned}$$

ここで、 $k_x = \bar{N}_x/P$ 、 $k_y = \bar{N}_y/P$ である。

面外剛性 D_{ij} および面内コンプライアンス a_{ij} を剛性に関する不変量と積層パラメータによって表わし(22)式に代入すると、座屈応力に関する次式を得る¹³⁾。

$$\sigma \equiv \frac{P}{h} = \frac{h^2}{12R^2} \frac{\Phi_1}{k_x \lambda^2 + k_y n^2} + \frac{\lambda^4}{k_x \lambda^2 + k_y n^2} \frac{1}{\Phi_2} \quad (23)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= (U_1 + U_2 \xi_9 + U_3 \xi_{10})\lambda^4 \\ &\quad + 2(U_4 + 2U_5 - 3U_3 \xi_{10})\lambda^2 n^2 \\ &\quad + (U_1 - U_2 \xi_9 + U_3 \xi_{10})n^4 \\ \Phi_2 &= \varphi_{22}\lambda^4 + (2\varphi_{12} + \varphi_{66})\lambda^2 n^2 + \varphi_{11}n^4 \\ \varphi_{11} &= (U_1 - U_2 \xi_1 + U_3 \xi_2)/\text{分母} \\ \varphi_{12} &= -(U_4 - U_3 \xi_2)/\text{分母} \\ \varphi_{22} &= (U_1 + U_2 \xi_1 + U_3 \xi_2)/\text{分母} \\ \varphi_{66} &= 1/(U_5 - U_3 \xi_2)\end{aligned} \quad (24)$$

(a) Lamination theory

(b) Netting theory

Fig. 7 Contours of the normalized buckling loads on the lamination parameter plane.

$$k_x=1, k_y=0, \Phi \times 10^3$$

(a) Lamination theory

(b) Netting theory

Fig. 8 Contours of the normalized buckling loads on the lamination parameter plane.

$$k_x=1, k_y=1, \Phi \times 10^4$$

$$\text{分母} = (U_1 + U_4)(U_1 + 2U_3\xi_2 - U_4) - U_2^2\xi_1^2$$

一方、網目理論では、(7)式の関係(24)式に代入することによって座屈応力が与えられ、繊維方向のヤング率 E_L で無次元化すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi &= P/hE_L \\ &= \frac{h^2}{12R^2} \cdot \frac{\Phi_1}{k_x\lambda^2 + k_y n^2} + \frac{\lambda^4}{k_x\lambda^2 + k_y n^2} \cdot \frac{1}{\Phi_2} \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1 &= (1/4) [(1 + 2\xi_9 + \xi_{10})\lambda^4 + 6(1 - \xi_{10})\lambda^2 n^2 \\ &\quad + (1 - 2\xi_9 + \xi_{10})n^4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2 &= \frac{1 + 2\xi_1 + \xi_2}{\xi_2 - \xi_1^2} \cdot \lambda^4 + \left(\frac{4}{1 - \xi_2} - 2 \frac{1 - \xi_2}{\xi_2 - \xi_1^2} \right) \lambda^2 n^2 \\ &\quad + \frac{1 - 2\xi_1 + \xi_2}{\xi_2 - \xi_1^2} n^4 \end{aligned} \quad (26)$$

CFRP 積層円筒殻の座屈特性が網目理論の近似によりどのように変化するかを調べるため、板厚方向に均質 ($\xi_9 = \xi_1$, $\xi_{10} = \xi_2$) と仮定した場合の例を挙げる。Fig. 7

Fig. 9 Contours of the normalized buckling loads on the lamination parameter plane.

$$k_x=0, k_y=1, \Phi \times 10^4$$

～9 は、 $R/L=0.5, h/R=0.01$ の円筒殻について、軸圧縮座屈 ($k_x=1, k_y=0$)、軸方向と周方向に圧縮がかかる場合 ($k_x=1, k_y=1$)、外圧座屈 ($k_x=0, k_y=1$) の各場合の ξ_1 - ξ_2 座標上での無次元座屈応力 $\Phi = P/hE_L$ の等高線を積層理論と網目理論とを比較して示す。各場合の座屈モードは、軸圧縮座屈の場合は破線より下の領域で軸対称変形 ($n=0$)、破線より上の領域で非対称変形 ($n \neq 0$) であり、 $k_x=1, k_y=1$ および $k_x=0, k_y=1$ の場合は軸方向半波数 $m=1$ の非対称変形である。また、最大の座屈荷重を与える点を○印で示す。

網目理論に基づく座屈応力式(25)式において、 $\xi_2 \rightarrow \xi_1^2$ (アングルプライ材)、あるいは、 $\xi_2 \rightarrow 1$ (クロスプライ材) とすると、 $\Phi_2 \rightarrow \infty$ となり右辺第二項はゼロとなる。すなわち、網目理論ではアングルプライ材およびクロスプライ材の面内歪項はゼロとなり、座屈応力は極めて小さくなる。このことから、Fig.7～9 に示されるように、積層理論と網目理論とによる座屈応力の等高線は、 $\xi_2 = \xi_1^2$ 近くと $\xi_2 = 1$ 近くで相違が著しくなる。一方、 $\xi_2 = \xi_1^2$ および $\xi_2 = 1$ から離れると、網目理論による座屈応力の等高線は積層理論による等高線と同様の傾向を示す。

次に、網目理論に基づいて積層円筒殻の座屈荷重を最大とする積層構成を求める。最適化のための変数は $\xi_1, \xi_2, \xi_9, \xi_{10}$ の4変数で、各変数について0.01ごとのパラメトリックな計算を行なった。また、ある (ξ_1, ξ_2) に対して (ξ_9, ξ_{10}) には許容領域が存在するので¹³⁾、各

(ξ_1, ξ_2) に対し許容領域内の (ξ_9, ξ_{10}) を求め、 $(\xi_1, \xi_2, \xi_9, \xi_{10})$ に対応する座屈荷重を計算する。

$R/L=0.5, h/R=0.01$ の場合の座屈荷重を最大とする積層パラメータを Table 2 に示す。Table 2 において、 θ は荷重比 $k_x : k_y = \cos \theta : \sin \theta$ を示すパラメータである。 $\theta=0^\circ$ の軸圧縮座屈の場合には、 $m=6, n=9$ の座屈モードで面内・面外剛性とも等方性を示す積層構成 ($\xi_1=0, \xi_2=1/2, \xi_9=0, \xi_{10}=1/2$) が最大の座屈荷重を与える。軸圧縮荷重に周方向圧縮荷重が少し加わると、 $m=1, n=5$ の座屈モードに変化し、 $\theta \geq 15^\circ$ では $(\xi_1, \xi_2, \xi_9, \xi_{10}) = (-0.11, 0.69, -0.74, 0.91)$ の積層パラメータのとき座屈荷重が最大となる。なお、Table 2 の各積層パラメータに対応する積層構成は次式で示される¹³⁾。

$$\theta=0^\circ \quad [(90^\circ)_{h_1}/(\pm 30^\circ)_{h_2}/(90^\circ)_{h_3}]_s$$

$$h_1 = \left(\frac{2}{3}\right) \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad h_2 = \frac{2}{3}, \quad h_3 = \left(\frac{2}{3}\right) \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}$$

$$\theta=5^\circ \quad [(\pm 87^\circ)^{0.41}/(\pm 25^\circ)^{0.59}]_s \quad (27)$$

$$\theta=10^\circ \quad [(\pm 88^\circ)^{0.42}/(\pm 24^\circ)^{0.58}]_s$$

$$15^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \quad [(90^\circ)^{0.46}/(\pm 25^\circ)^{0.54}]_s$$

前述したように、網目理論による座屈荷重の評価は、 $\xi_2=1$ および $\xi_2=\xi_1^2$ の近くで誤差が大きくなる。そのため、(27)式で求められた最適積層構成は、 $\theta \neq 0^\circ$ の場合には積層理論による最適積層構成とかなり異なる可能性がある。本報で求めた網目理論に基づく最適積層構成は用いる材料に依存しないので、個々の材料から成る積

Table 2 Optimal lamination parameters to maximize the buckling loads of laminated cylindrical shells based upon the netting theory. ($k_x = \cos \theta$, $k_y = \sin \theta$)

θ	ξ_1	ξ_2	ξ_9	ξ_{10}	m	n	$\phi \times 10^3$
0°	0	0.5	0	0.5	6	9	2.04
5°	-0.02	0.65	-0.65	0.87	1	5	1.49
10°	-0.04	0.68	-0.68	0.89	1	5	1.02
15°	-0.11	0.69	-0.74	0.91	1	5	0.78
20°	-0.11	0.69	-0.74	0.91	1	5	0.64
30°	-0.11	0.69	-0.74	0.91	1	5	0.47
40°	-0.11	0.69	-0.74	0.91	1	5	0.38
50°	-0.11	0.69	-0.74	0.91	1	5	0.33
60°	-0.11	0.69	-0.74	0.91	1	5	0.30
70°	-0.11	0.69	-0.74	0.91	1	5	0.28
80°	-0.11	0.69	-0.74	0.91	1	5	0.28
90°	-0.11	0.69	-0.74	0.91	1	5	0.28

層円筒殻の座屈特性最適化の際に、最適化計算の初期値として用いることが有用であろう。

4. 結 論

本論文では、積層理論の近似理論である網目理論を適用して、積層板・殻の剛性特性最適化問題を考察した。得られた主要な結論は次のとおりである。

1) 網目理論に基づく積層材の剛性特性は繊維方向ヤング率で基準化することにより、材料に依存せず幾何学的な積層構成によって決定される。網目理論による最適積層構成を積層理論による解と比較検討した結果、特殊な場合を除いて、網目理論による解はほぼ妥当な結果を与えることがわかった。

2) 0°あるいは90°一方向板に繊維と垂直方向に圧縮荷重が働く積層板の問題、アングラプライ材あるいはクロスプライ材から成る積層円筒殻の座屈問題では、網目理論の適用は不適当である。積層板では $\xi_9 = \pm 1$ 、積層円筒殻では $\xi_{10} = \xi_9^2$ 、 $\xi_{10} = 1$ の境界を離れると、網目理論は積層理論の性質をほぼ保持するようになりその適用も妥当となる。

3) GFRP 材より異方性の強い CFRP 材において、積層理論による最適積層構成が網目理論による最適積層構成に近づく。積層理論において異方性を極端化して、 $E_L/E_T \rightarrow \infty$ 、 $E_L/G_{LT} \rightarrow \infty$ とした場合が網目理論であると考えれば、これは当然の結果であり、GFRP 材より CFRP 材、CFRP 材でもより異方性の強い高剛性繊維に

おいて、網目理論の適用範囲が増加すると考えられる。

参 考 文 献

- 1) S.W. Tsai & H.T. Hahn: *Introduction to Composite Materials*, Technomic Publ. Co., Westport (1980).
- 2) 林 毅編: 複合材料工学, 日科技連 (1971), pp. 769-779.
- 3) Y. Hirano: *AIAA J.*, **17** (1979), 1017-1019.
- 4) 福永久雄: 日本航空宇宙学会誌, **30** (1982), 482-489.
- 5) 三木光範: 日本機械学会論文集, **48** (1982), 1407-1414.
- 6) 三木光範: 日本機械学会論文集, **50** (1984), 1325-1331.
- 7) 福永久雄, 平野陽一: 材料システム, **3** (1984), 135-141.
- 8) 粕谷平和, 植村益次: 日本航空宇宙学会誌, **30** (1982), 664-675.
- 9) 平野陽一: 日本航空宇宙学会誌, **32** (1984), 46-51.
- 10) Y.S. Nshanian & M. Pappas: *AIAA J.*, **21** (1983), 430-437.
- 11) 小林繁夫, 世古博己, 広瀬一美: 日本航空宇宙学会誌, **32** (1984), 180-186.
- 12) J. Onoda: *AIAA J.*, **23** (1985), 1093-1098.
- 13) 福永久雄: 日本複合材料学会誌, **11** (1985), 27-33.
- 14) 粕谷平和, 植村益次: 日本複合材料学会誌, **12** (1986), 25-31.