複合材料講座

複 合 材 料 と 信 頼 性

V. 設計へのアプローチ (1)

前 川 善 一 郎*

1. は し が き

複合材料が航空・宇宙・自動車・建設などの産業分野の1次構造部材として用いられる機会が今日多くなっており、これらの設計にあたって信頼性の考え方が導入されつつあるのが現状である。強度設計法において必要なのは荷重と強度の正確な情報である。荷重は静的荷重から衝撃荷重や実働荷重に至るまで多岐にわたり、一方強度の方も引張り・圧縮・剪断・曲げやそれらの組合せに至るものまで荷重におとらないほど多様化している。これら両者を考慮にいれなければならない設計は厳密に考えると非常にむづかしい問題である。本講座(IV)の疲労へのアプローチにおいて述べた荷重と強度のばらつきを考慮したS-Rモデル(stress-residual strength model)¹⁾は有用な設計手法の一つであるが広く実用化されるまでには至っていない。本稿では設計へのアプローチとして、実際に用いられている信頼性手法のいくつかを概説するものとする。最初に複合材料に関する設計手法に取り扱った論文の中でしばしば取り上げられているのがMIL規格の強度におけるA, B基準値である²⁾。これは本講座(II)の強度へのアプローチで取り扱ったが、MIL規格にそってさらに説明する。複合材料にかぎらず一般の設計において強度と荷重の関係を安全率によって取り扱うことがしばしば行なわれるが、この関係を2種類の設計法に分けて述べFRP構造物に適用されている設計例について説明するものとする。

2. 強度における設計許容値

複合材料の設計において強度側の設計許容値としてしばしば米国のMIL規格を採用する場合が多い。本規格は米国の国防省が定め、連邦航空局(FAA)あるいは航空宇宙局(NASA)が使用しているハンドブック(MIL-

HDBK-5C)にまとめてあり²⁾、ここに統計的な資料をもとにして設計許容値を求める手法が記述されている。本講座(II)の強度へのアプローチでも述べているが、MIL規格では設計許容値としてAおよびB基準値が定められている。A基準値とは95%の信頼水準で99%の生き残り確率(1%の破壊確率)を有する値であり、B基準値は95%の信頼水準で90%の生き残り確率(10%の破壊確率)を有する値である。材料強度が正規分布する場合の設計許容値 S_a は次式で与えられる。

$$S_a = \bar{x} - kS \quad (1)$$

ここで $\bar{x}$, S は強度試験などから得られたデータから得られる平均値と標本標準偏差であり、 k は片側許容係数とよばれデータ数と生き残り確率の関数であり、AとB基準の場合の値は本講座(II)の付表に示されている。

MILハンドブックでは上記の他に累積分布関数が線形回帰式で表わせる場合のA, B基準を求める手法を記している。本講座(II)において、ワイブル分布の累積分布関数がワイブル確率紙を用いると線形の回帰式で表わされ、正規分布においても正規確率紙を用いると線形回帰式で表現できることを示した。このように線形回帰式で表わされる累積分布関数は多くあるため、線形回帰式からA, B基準値を求める手法を理解することは重要である。

いま線形回帰式で表わされる累積分布関数が次式で示されるものとする。

$$x = a_0 + a_1 y \quad (2)$$

ここで x は強度などの確率変数であり、 y は破壊確率の関数であるとする。 n 組の観測データ($x_i, y_i: i=1, 2, \dots, n$)によって a_0, a_1 の推定値として $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ が得られたものとする。たとえば累積分布関数を次式で示すようなワイブル分布の場合

$$F(X) = 1 - \exp\{-((X - \tau)/\beta)^\alpha\} \quad (3)$$

いま x, y を次式のようにおくと

* Zenichiro MAEKAWA : 京都工芸繊維大学繊維学部 (606 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)

$$x = \ln(X - \gamma)$$

$$y = \ln[-\ln\{1 - F(X)\}]$$

(3)式は本講座(II)で示したように次式のような線形回帰式となる。

$$x = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 y \quad (4)$$

ここで

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

$$\hat{a}_0 = \bar{x} - \hat{a}_1 \bar{y}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

y がある特定の値 y_0 をとるときの x_0 が $(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 y_0)$ によって推定することができる。ここで $\hat{a}_0$ と $\hat{a}_1$ はデータの数 n がふえたときに期待されるそれぞれの期待値が真の値 a_0 と a_1 に等しいことが証明されるため³⁾、予測値 x_0 の期待値 $E(x_0)$ は

$$E(x_0) = a_0 + a_1 y_0 = \xi_0$$

となり、予測値 x_0 は偏りのない不偏推定値であることがわかる。また x_0 の分散 $V(x_0)$ (標準偏差の2乗) は次式で示される。

$$V(x_0) = V(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 y_0) = \{1/n + (y_0 - \bar{y})^2 / \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\} \sigma^2 \quad (5)$$

ここで σ^2 は(2)式の線形回帰式で推定したときの x の誤差が正規分布に従うと仮定したときの誤差分散である。 x_0 は $\hat{a}_0$ と $\hat{a}_1$ の1次式で表わされ、それぞれが正規分布に従うため x_0 も正規分布に従うことになる。いま $u = (x_0 - \xi_0) / \sqrt{V(x_0)}$ と標準化すると u の分布は標準正規分布になる。分母に含まれる誤差分散 σ^2 が未知数のため σ^2 にその不偏推定値 V_e を代入すると

$$t = \frac{x_0 - \xi_0}{\sqrt{\{1/n + (y_0 - \bar{y})^2 / \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\} V_e}} \quad (6)$$

は自由度 $(n-2)$ の t 分布に従う³⁾。これより破壊確率に相当する y がある特定の値 y_0 をとるときの x の期待値 ξ_0 の信頼水準 γ の信頼区間は、

$$\begin{aligned} x_0 - t_{(1-\gamma); (n-2)} \sqrt{\{1/n + (y_0 - \bar{y})^2 / \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\} V_e} \\ \leq \xi_0 \leq x_0 + t_{(1-\gamma); (n-2)} \sqrt{\{1/n + (y_0 - \bar{y})^2 / \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\} V_e} \quad (7) \end{aligned}$$

のように求められる。さらに $y = y_0$ をとるときの x (期待値 ξ_0 ではなく実際に観測される値であることに注意) の信頼区間について考えると上記の信頼区間の他にそれ自身の分散を加えることが必要となり次式が得られ

る。

$$\begin{aligned} x_0 - t_{(1-\gamma); (n-2)} \sqrt{\{1 + 1/n + (y_0 - \bar{y})^2 / \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\} V_e} \\ \leq x \leq x_0 + t_{(1-\gamma); (n-2)} \sqrt{\{1 + 1/n + (y_0 - \bar{y})^2 / \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\} V_e} \quad (8) \end{aligned}$$

安全側について考えるため左側の不等式を用いて x の下限値を設計許容値と定めることができる。(7), (8)式 の概念図を図1に示す。ここで2母数ワイブル分布を例にとってA, B基準値をきめる計算手順をまとめてみる。

1) 強度の順序統計量(小さいものから順番にデータに番号をつけたもの) $X_i (i=1, \dots, n)$ から n 組の (x_i, y_i) を求める。ここで $x_i = \ln X_i$, $y_i = \ln[-\ln(1 - F_i)]$ である。ただし F_i は平均ランク法を採用すると $F_i = i/(n+1)$ から求まる。そして (x_i, y_i) のデータ群から線形推定法などにより、データと最も一致する母数を決定し線形回帰式 $x = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 y$ を求める。この手法は前回の講座を参照していただきたい。

2) y_0 の計算: A, B基準の破壊確率はそれぞれ 0.01, 0.1 であるためつぎのようになる。

$$\text{A基準: } y_0 = \ln\{-\ln(1 - 0.01)\} = -4.6001$$

$$\text{B基準: } y_0 = \ln\{-\ln(1 - 0.1)\} = -2.2504$$

3) $\bar{y}$ の計算: $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i / n$ より求める。

4) $t_{(1-\gamma); (n-2)}$ の計算: A, B基準値の信頼水準は 95% であるので $\gamma = 0.95$ を代入し, t 分布表より自由度 $(n-2)$ における $t_{0.05; (n-2)}$ を求める。

5) 誤差分散 V_e の計算: $V_e = \sum_{i=1}^n (x_i - x_i')^2 / (n-2)$ より求める。ただし, x_i' は y_i に対する回帰直線上の

図1 期待値 ξ_0 と x の信頼水準 γ における信頼区間と $y = y_0$ における設計許容値に関する概念図

x の値で $x_i' = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 y_i$ より求めた値である。

6) x_0 の計算: A, B 基準における y_0 が 2) より求まっているため $x_0 = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 y_0$ を用いてつぎのようになる。

$$\text{A 基準: } x_{0A} = \hat{a}_0 - 4.6001 \hat{a}_1$$

$$\text{B 基準: } x_{0B} = \hat{a}_0 - 2.2504 \hat{a}_1$$

7) δ の計算: 2) から 6) までの計算結果を用いて、次式に示す A, B 基準の 2 種類の δ を求める。

$$\delta = t_{(1-\gamma); (n-2)} \sqrt{\{1 + 1/n + (y_0 - \bar{y})^2 / \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\} V_e} \quad (9)$$

8) A, B に基づく設計許容値 S_a が次式から求められる。

$$\left. \begin{aligned} \text{A 基準: } S_{aA} &= x_{0A} - \delta_A \\ \text{B 基準: } S_{aB} &= x_{0B} - \delta_B \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

これらの関係を図示すると図 2 のように表わされる。

(9) 式で示される δ の値が大きくなるほど強度の設計許容値 S_a の値が小さくともねばならないことがわかる。

3. 決定論的設計法と確率論的設計法⁴⁾

複合材料構造物を設計する場合にたとえば環境や耐用年数など考慮しなければならない設計条件は多岐にわたっている。強度設計においては材料の有する強度が作用する荷重より大きいことを満足するように計算するが、その大きさの程度を環境などの設計条件によって変えることが行なわれ、安全性と信頼性が確保されるようにしている。

いま材料のもつ強度を R 、負荷応力を S とすると強度設計に必要な非破壊条件は次式で与えられる。

$$R > S \quad (11)$$

また強度を負荷応力で除した値を安全率 SF というが、

これを用いると同条件は次式となる。

$$SF = R/S > 1 \quad (12)$$

この安全率の大きさは種々の設計条件に応じて決定する必要がある。安全率の選定には一般に不確実性が存在し経験や勘に頼らざるをえない面もあるが、安全率 SF を決定し(12)式から許容応力を計算し部材の大きさを求める決定論的設計手法 (deterministic design method) が今日広く行なわれている。安全率の決定において合理性をできるだけ付加させるために種々の分野において決定に影響する事項に対応する係数の相乗によって安全率を求めるような次式が考えられている。

$$SF = SF_0 \cdot \prod_{i=1}^k L_i \quad (13)$$

上述の設計手法は単一の代表値によって荷重もしくは強度を代表させるものであり確率論的基盤に乏しい。これに対して荷重および強度のいずれもあるばらつきをもった確率変数であると考え両者の結合的考察のもとに信頼度に応じた設計を行なう手法を確率論的設計手法 (probabilistic design method) と呼ぶ。

さて(11)式から $(R - S)$ の値が大きいくほど安全の程度が大きいためこの値を安全余裕 m とよぶ。平均値と標準偏差をそれぞれ μ と σ で表わし、 m の標準化変量を m_s とすると

$$m_s = (m - \mu_m) / \sigma_m \quad (14)$$

破壊確率 P_f は次式のようになる。

$$\begin{aligned} P_f &= \text{Prob}[m \leq 0] = \text{Prob}[m_s \leq -\mu_m / \sigma_m] \\ &= F(-\mu_m / \sigma_m) \end{aligned} \quad (15)$$

強度分布関数、負荷応力分布関数とともに正規分布に従う場合、安全余裕である m も正規分布に従うことになり破壊確率 P_f は計算することができる。ここで μ_m と σ_m と強度 R と負荷応力 S とがそれぞれ独立のため次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \mu_m &= \mu_R - \mu_S \\ \sigma_m &= \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

これゆえ

$$\begin{aligned} \frac{\mu_m}{\sigma_m} &= \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{\mu_R / \mu_S - 1}{\sqrt{(\sigma_R / \mu_S)^2 + (\sigma_S / \mu_S)^2}} \\ &= \frac{\mu_{SF} - 1}{\sqrt{(\mu_{SF} C_R)^2 + C_S^2}} \end{aligned} \quad (17)$$

よって破壊確率 P_f は次式となる。

$$P_f = \phi \{ (1 - \mu_{SF}) / \sqrt{(\mu_{SF} C_R)^2 + C_S^2} \} \quad (18)$$

ここで C_R と C_S とはそれぞれ R と S との変動係数であり ϕ は標準正規分布である。また μ_{SF} は μ_R / μ_S で表

図 2 A, B 基準値 S_{aA} , S_{aB} を求めるための説明図

わされ、統計的安全率 (statistical safety factor) または中央安全率 (central safety factor) と呼ばれる。図 3 に強度と負荷応力の変動係数をパラメータとしたときの中央安全率と破壊確率との関係を示す。強度と負荷応力のばらつきすなわち変動係数が大きくなると同じ破壊確率を得る設計でも中央安全率を大きくとる必要のあることがわかる。

本手法は古典的信頼性理論の範ちゅうに入るものであるが、強度 R と負荷応力 S の分布形が既知という前提に立って解析が進められている。設計段階でこれらの分布形を厳密に固定するだけの情報量をもちえないことが多く、分布形と仮定する母数値とかは何らかの仮定を用いてきめることになるが、一般に破壊確率の値が小さい場合 ($P_f < 10^{-3}$) に対しては分布形の及ぼす影響が非常に大きく破壊確率が同じでも中央安全率が大きく異なってくるため安全率を決定することが困難となる欠点を有する⁵⁾。

この欠点を解消する方法の一つとして安全性指標 (safety index) を用いる手法がある⁵⁻⁷⁾。安全性指標 Q は (17) 式に示すような μ_m/σ_m を Q として定義するものである。(15) 式から

$$Q = -F^{-1}(P_f) \quad (19)$$

が得られる。本式より破壊確率 P_f と Q との関係を規定するためには確率分布関数 F を決定しなければならないが、前述した問題が生じるため、 Q を安全性の指標として用いようとする考え方であり、この場合の非破壊の条件は次式となる。

$$\mu_m - Q\sigma_m > 0 \quad (20)$$

たとえば確率分布関数 F が正規分布の場合 Q と破壊確率 P_f との対応が図 4 に示すようになる⁷⁾。その他、不確定要因を信頼性設計の中に組み込んだ拡張信頼性理論の研究⁸⁾ も盛んであるが、ここでは省略する。

4. FRP 構造物を対象とした決定論的設計法の事例

FRP は鉄鋼などの工業材料に比較して歴史的に日浅く、経験も少ないばかりでなく、材料として多様性に富み多くの因子の影響を受けるため設計資料も十分に整備されていない。そのため設計基準も明確化されていなかったが、強化プラスチック協会において設計基準委員会を設置して設計基準を検討し、(13) 式に示す形式で FRP 構造物を対象とした安全率の算定法を提案している⁹⁾。この場合の安全率は六つの係数からなる次式で表わされる。

$$SF = SF_0 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot L_4 \cdot L_5 \cdot L_6 \quad (21)$$

図 3 種々の変動係数の場合における破壊確率と中央安全率との関係

図 4 安全余裕が正規分布にしたがう場合の破壊確率と安全性指標との関係

各因子についてつぎに説明する。

(1) SF_0 : 基本的安全率であり、(a) 材料の破壊強さを設計基準とする場合: $SF_0=1.3$, (b) 構造としての剛性(弾性係数)を基準とする場合: $SF_0=1.2$

(2) L_1 : 材料特性値の信頼度係数とよばれ、材料試験の方法によって規定されるもので、(a) 常温・空気中での静的試験のみを行ない、疲れ・クリープ・各種環境下での強度低下率を既存データを参照する場合: $L_1=1.1$, (b) 静的試験すら行なわない場合: $L_1=1.2$, (c) 使用条件とまったく同じ材料試験を行なう場合: $L_1=1.0$

(3) L_2 : 用途・重要度係数とよばれ、(a) 多人数を殺傷するおそれのある場合: $L_2=1.2$, (b) 公共性があり社会的影響が大きい場合: $L_2=1.1$, (c) 一般の場合: $L_2=1.0$, (d) 仮設物の場合: $L_2=0.9$

(4) L_3 : 外力荷重の推定の不確か係数とよばれるが、(a) 外力基準がすでに所管官庁・協会・学会等で安全側

に規定されている場合： $L_3=1.0$ ，(b)外力基準がはつきりしないときは発注者との話し合いで $L_3>1.0$ の値をきめる。

(5) L_4 ：構造計算での精度係数とよばれ，(a)有限要素法などの精度の良い構造計算を行ない，しかも試作構造の実験を行なって負荷応力・強度などが正確に確認される場合： $L_4=1.0$ ，(b)構造物を単純なモデルで置き換え，比較的簡単な材料力学などの式で計算する場合： $L_4=1.15\sim 1.3$ ，(c)複雑な形状となる取付部の局部計算などの境界条件すら判明できない場合： $L_4>1.3$ の値を指定できる。

(6) L_5 ：材料特性のばらつき係数とよばれ，(a)実際の構造と同一条件で製作した多数の試験片について材料試験を行なった場合

$$L_5 = (1 - 3.09C)^{-1} \quad (22)$$

ここで C は特性値の変動係数であり，通常信頼度を99.9%として L_5 を(22)式から計算する。(b)材料試験を行なわないでばらつきの特性を確認しない場合

$$L_5 = 1.1 \times L_{51} \cdot L_{52} \cdot L_{53} \quad (23)$$

で計算する。この計算で L_5 が1.2に達しないときは最低値として1.2をとる。

① L_{51} ：成形方法による係数とよばれ，1)機械成形で多量生産する場合： $L_{51}=1.0$ ，2)ハンドレイアップ法で作る場合： $L_{51}=1.15$ ，3)スプレーアップ法で作る場合： $L_{51}=1.3$ 。なお機械成形でもSMCなどではチャージ率が大きくなるとばらつきが大きくなるため $L_{51}=1.3$ とするほうがよい。

② L_{52} ：成形者の経験年数による係数とよばれ，経験年数が2年以上： $L_{52}=1.0$ ，6ヵ月～2年： $L_{52}=1.05$ ，6ヵ月以下： $L_{52}=1.1$

③ L_{53} ：成形環境の整備状態による係数とよばれ，空気設備のある工場内： $L_{53}=1.0$ ，空気設備のない工場内： $L_{53}=1.05$ ，屋外・吹きさらし環境： $L_{53}=1.1$

(7) L_6 ：衝撃的負荷をうける場合の係数とよばれ，衝撃効果は構造形態と荷重レベルに依存するため一概にいないが $L_6=1.2$ とする。

5. お わ り に

FRPにおける決定論的設計法の一例として強化プラスチック協会が提唱している手法を取り上げた。本手法では上述の(1)～(7)に表示した各因子の値を(21)式に代入して安全率 SF を求めてFRP構造物の設計を行なうものであるが，設計時の不確定要因を広く包含してありすぎた安全率決定法と考えられる。今後の課題として本手法による設計事例を増してゆき安全率の各因子の値の信頼性を向上させることが必要である。FRPにおける確率論的設計法の事例は紙面の都合上，次回の本講座(VI)の設計へのアプローチ(2)で述べるとし，今回の設計へのアプローチ(1)を終えるものとする。

参 考 文 献

- 1) A.M. Freudenthal, J.M. Garrelts & M. Shinokuma: *Proc. ASCE*, 92-ST1 (1966), p. 167.
- 2) MIL-HDBK-5C, Department of Defense, Washington, D.C. (1978), p. 9-3.
- 3) たとえば，田中 豊，脇本和昌：多変量統計解析法，現代数学社，東京 (1983)，p. 23.
- 4) 石川 浩，木村 等：日本機械学会第100回講習会資料 (1980)，p. 67.
- 5) C.A. Cornell: *Proc. ASCE*, 93-ST1 (1967), p. 171.
- 6) A. Ang & C.A. Cornell: *Proc. ASCE*, 100-ST9 (1974), p. 1755.
- 7) 藤井太一，前川善一郎：材料，30，336 (1981)，905.
- 8) 土木学会：構造物の安全性・信頼性，土木学会 (1976)，p. 17.
- 9) 植村益次編：FRP設計便覧，強化プラスチック協会 (1979)，p. 237.