研究論文

一方向繊維複合材料の横方向弾性率に 及ぼす界面すべりの影響

久山 徹也*, 金 雄二**, 高橋 清久***

(1988年12月26日受付)

Effects of the Interfacial Slippage on the Transverse Elastic Moduli of Unidirectional Fiber Composites

T. HISAYAMA,* Y. KON** and K. TAKAHASHI***

(Received December 26, 1988)

The analytical model for the fiber/matrix interfacial slippage, developed in the preceding paper, has been extended to the prediction of the transverse elastic moduli of the unidirectional fiber composite. The isotropic elasticity is assumed for both of the fiber and the matrix, and the theory of plane strain elastic field in the transverse cross-section of the fiber composite is applied. The effective transverse elastic moduli are formulated using the principle of minimum complementary energy. Numerical calculations are conducted for the transverse tensile moduli of a boron/aluminum composite and the theoretical results are compared with the existing experimental data. The analysis developed here can be applied to the prediction of the transverse tensile stress-strain relation, if the yield stress and the stiffness degradation after the yielding are provided for the matrix aluminum.

1. 緒 言

繊維/マトリクス界面の接着が剥離し繊維表面に空隙が生ずると仮定すると、一方向繊維複合材料の横方向引張りヤング率は急激に低下しマトリクスのヤング率より低くなる¹⁾。筆者らは前報²⁾で界面に空隙が生ずる状態と完全接着との中間の状態として界面すべりをモデル化し、変位と応力を平面歪弾性論を用いて解析した。本報告では、その解析結果とコンプリメンタリエネルギー極小の原理を用いて一方向繊維複合材の横方向弾性率を定式化する。またボロン繊維/アルミ複合材に関する数値計算を行ない Kyono ら³⁾の実験データと比較する。

2. 一方向繊維複合材料の弾性率

一方向繊維複合材料は横等方弾性体であり、独立な弾

性率成分は5個である。繊維方向を L 、横方向を T および z とする直交座標系を考えると、応力-歪み関係は次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} \\ -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & 1 & -\frac{\nu_T^*}{E_T^*} \\ -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & -\frac{\nu_T^*}{E_T^*} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\gamma_{Tz} = \frac{1}{G_T^*} \tau_{Tz}, \quad \gamma_{zL} = \frac{1}{G_L^*} \tau_{zL},$$

$$\gamma_{LT} = \frac{1}{G_L^*} \tau_{LT}$$

ここで横等方性の関係式

$$G_T^* = \frac{E_T^*}{2(1+\nu_T^*)} \quad (2)$$

* 名古屋工業大学材料工学科 (466 名古屋市昭和区御器所町)

Dept. of Materials Sci. & Eng., Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya 466, Japan

* 大学院生 Graduate Student, ** 助手 Research Fellow, *** 助教授 Associate Professor

が成り立つ。また、複合材を横 (T または z) 方向に引張った場合の L 方向の縮みを表わすポアソン比 ν_{TL}^* は次式で与えられる。

$$\nu_{TL}^* = -\frac{E_T^*}{E_L^*} \nu_L^* \quad (3)$$

平面歪み ($\varepsilon_L=0$) の条件下で面内等方応力 ($\sigma_T=\sigma_z=p$) を加えた場合の、体積歪み ($\varepsilon_T+\varepsilon_z$) と p との比例定数を平面歪み体積弾性率 K_T^* と呼ぶ。(1), (2) 式より

$$\frac{1}{K_T^*} = \frac{4}{E_T^*} - \frac{4(\nu_L^*)^2}{E_L^*} - \frac{1}{G_T^*} \quad (4)$$

という関係が成り立つ。これは通常の体積弾性率とは異なるので注意を要する。

2.1 完全接着の場合

繊維とマトリクスが完全接着している場合の理論としては Hashin⁴⁾ の報告が有用である。彼らは複合材円柱の集合体モデルを用いて以下の(5)~(8)式を導いた。

$$E_L^* = E_f V_f + E_m (1 - V_f) + \frac{4(\nu_f - \nu_m)^2 (1 - V_f) V_f}{(1 - V_f)/K_T^f + V_f/K_T^m + 1/G_m} \quad (5)$$

$$\nu_L^* = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) + \frac{(\nu_f - \nu_m) (1/K_T^m - 1/K_T^f) (1 - V_f) V_f}{(1 - V_f)/K_T^f + V_f/K_T^m + 1/G_m} \quad (6)$$

$$G_L^* = G_m + \frac{V_f}{1/(G_f - G_m) + (1 - V_f)/2 G_m} \quad (7)$$

$$K_T^* = K_T^m + \frac{V_f}{1/(K_T^f - K_T^m) + (1 - V_f)/(K_T^m + G_m)} \quad (8)$$

複合材の独立な弾性率5個のうち残りの1個 G_T^* も複合材円柱集合体モデル⁴⁾ または Christensen⁵⁾ の3相モデルから計算できるが、簡単な式に表現することにはできない。 G_T^* に関しては Hashin⁶⁾ が変分原理を用いて導いた上限、下限の式が簡単で便利である。たとえば $G_m < G_f$ の場合の下限は次式で与えられる。

$$G_T^* = G_m + \frac{V_f}{\frac{1}{G_f - G_m} + \frac{(1 - V_f)(K_T^m + 2 G_m)}{2 G_m (K_T^m + G_m)}} \quad (9)$$

(5), (6), (8), (9) 式を(4)式に代入すると複合材の横方向ヤング率 E_T^* が計算できる。

2.2 界面に空隙を生ずる場合

繊維/マトリクス界面の接着が剥離している複合材が横方向の引張り荷重を受けて界面に空隙を生ずる場合、横方向の引張りヤング率 E_T^* は次式で与えられる¹⁾。

$$E_T^* = E_m \phi (1 - V_f) / \{ \phi (1 - V_f) + V_f [\alpha (1 - V_f)^2 + \beta V_f (1 - V_f) + \gamma V_f] \} \quad (10)$$

ここで ϕ , α , β , γ は次式のように定義した。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= (1 + \nu_m) [1 + 2(1 - \nu_m) Q] (1 - V_f)^2 \\ &\quad + [4R + (3 - 2\nu_m^2 - 2\nu_m \nu_{TL}^f) Q] \\ &\quad \times (1 - V_f) V_f \\ &\quad + 4(1 - \nu_m) (1 - \nu_{TL}^f \nu_{LT}^f) \\ &\quad \times R Q (2 + V_f) V_f \\ \alpha &= (3 - 2\nu_m^2) (1 + \nu_m) + (5 - 6\nu_m^2 \\ &\quad + 4\nu_m^3 \nu_{LT}^f) Q - 4\nu_m (\nu_m + 2\nu_{TL}^f) R \\ &\quad - 8\nu_m^2 (1 - \nu_m) (1 - \nu_{TL}^f \nu_{LT}^f) R Q \\ \beta &= 4(1 - \nu_m^2) [3R + 2(1 - \nu_m \nu_{LT}^f) Q] \\ \gamma &= 4(1 - \nu_m) (1 - \nu_{TL}^f \nu_{LT}^f) \\ &\quad \times (5 - 8\nu_m^2 + 3V_f) R Q \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

また定数 R , Q は次式で与えられる。

$$R = \frac{(1 + \nu_m) E_L^f}{4(1 - \nu_{TL}^f \nu_{LT}^f) E_m}, \quad Q = \frac{(1 + \nu_m) E_T^f}{(1 - \nu_{TL}^f \nu_{LT}^f) E_m} \quad (12)$$

上式では繊維を横等方性弾性体と仮定しており

$$\frac{\nu_{TL}^f}{E_T^f} = \frac{\nu_{LT}^f}{E_L^f} \quad (13)$$

という関係がある。

また界面に空隙が生ずる場合の横方向剪断弾性率 G_T^* は次式で与えられる。

$$G_T^* = \frac{(1 - V_f) \phi}{(1 - V_f) \phi + 4(1 - \nu_m^2) \chi V_f} G_m \quad (14)$$

ここで

$$\chi = (1 - V_f)^2 + \frac{1}{1 + \nu_m} [Q(1 - \nu_m \nu_{LT}^f) + 4R(1 - \nu_m \nu_{TL}^f)] V_f (1 - V_f)$$

$$+ \frac{1-\nu_m}{E_m} Q E_L^f V_f^2 \quad (15)$$

であり、 ϕ , R および Q は (11), (12) 式で与えられる。

3. 界面すべり

3.1 弾性エネルギー

繊維／マトリクス界面の接着状態が完全接着から空隙形成へ移る中間の状態として界面すべりを考える。この場合の変位と応力の解析法を前報²⁾で示した。ここでは複合材円柱モデルを用いて複合材の見かけの弾性率を計算する。

マトリクスと1個の介在物(繊維)からなる不均質物体が外側表面で一定の表面力を受ける場合、この不均質物体の弾性エネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (16)$$

で表わされる。ここで積分範囲 V はこの不均質物体全体の体積である。また簡単のためテンソル表示法を用いているが、剪断歪みの定義が(1)式と異なる点に注意を要する。たとえば (L, T, z) 座標系を (x_1, x_2, x_3) 座標系に対応させる場合

$$\gamma_{Tz} = 2\varepsilon_{23}, \gamma_{zL} = 2\varepsilon_{31}, \gamma_{LT} = 2\varepsilon_{12} \quad (17)$$

である。

(16) 式で考えた不均質物体と同一形状、同一寸法の均質なマトリクス材料が、同じ表面力を受ける場合を考える。この場合の応力と歪みを σ_{ij}^0 , ε_{ij}^0 とすると、弾性エネルギーは

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 dv \quad (18)$$

と表わされる。

介在物を充填することによって生ずる弾性エネルギーの増分 δU は、Eshelby の公式⁷⁾を用いると次式の面積分によって与えられる。

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_S (T_i^0 u_i - T_i u_i^0) ds \quad (19)$$

ここで積分範囲 S は繊維／マトリクス界面である。 T_i , u_i は面力と変位であり、肩付き添え字⁰をもつ変数はマトリクスからの均質物体、⁰のない変数は複合材の場合を表わす。(19)式を円筒座標系 (L, r, θ) で表示し、 $\varepsilon_{Lr} = \gamma_{rL} = \gamma_{\theta L} = 0$ の平面歪み状態を仮定すると

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_S (\sigma_r^0 u_r + \tau_{r\theta}^0 u_\theta - \sigma_r u_r^0 - \tau_{r\theta} u_\theta^0) ds \quad (20)$$

となる。

Fig. 1 A composite cylinder model. The longitudinal direction of the fiber composite is assumed to be x_1 -axis.

ただし界面すべりの場合、界面 S における変位と応力は繊維側とマトリクス側で異なり、(20) 式の計算ではマトリクス側の値を用いなくてはならない。なぜならば(19) 式を導くとき、複合材とまったく同じ形ですべてマトリクスからなる物体を考えて介在物の影響を体積力で置き換えており、体積力の作用する領域(介在物)の外側(マトリクス側)に S をとったとき(19) 式が成り立つ。界面すべりの場合、すべりの影響もなんらかの体積力で置き換えて考慮することとなり、したがって(20) 式の計算では、 S を界面のマトリクス側と考える必要がある。

コンプリメンタリエネルギー極小の原理から(16) 式の U は

$$U \leq U_0 + \delta U \quad (21)$$

を満足しなければならない。この関係式から複合材の見かけの弾性率の下限が導かれる。

3.2 複合材円柱モデル

半径 r_f の繊維と、それを取り囲む半径 r_m のマトリクスからなる複合材円柱 (Fig. 1) を考える。この複合材円柱が $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{31} = 0$ (または $\varepsilon_L = \gamma_{rL} = \gamma_{\theta L} = 0$) の平面歪み状態で外部から

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = p, \sigma_{23} = \sigma_{32} = \tau \quad (22)$$

の様な応力を受ける場合(16) および(18) 式はそれぞれ

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{p^2}{K_T^*} + \frac{\tau^2}{G_T^*} \right) dv \quad (23)$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{p^2}{K_T^m} + \frac{\tau^2}{G_m} \right) dv \quad (24)$$

となる。

(21), (23), (24) より複合材の見かけの平面歪み体積弾性率 K_T^* と横方向剪断弾性率 G_T^* はそれぞれ次式で与えられる。

$$K_T^* \geq \frac{1}{1/K_T^m + 2\delta U/p^2 V} \quad (25)$$

$$G_T^* \geq \frac{1}{1/G_m + 2\delta U/\tau^2 V} \quad (26)$$

ここで V は複合材円柱モデル全体の体積である。

(25), (26) 式の右辺は弾性率の下限を表わしている。一方、複合材円柱が外部から一様な変位を受けると考えると弾性率の上限が得られる。繊維複合材料の横方向弾性率 G_T^* , E_T^* はマトリクスに支配され、一般に下限が実験データとよく一致する。

3.3 横方向剪断弾性率

複合材円柱モデルに外部から均一な剪断応力 $\sigma_{23} = \sigma_{32} = \tau$ が加わる場合を考える。この場合の変位と応力は前報²⁾で解析した。ここでは弾性率の計算に必要なマトリクス中の変位と応力のみを示す。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{r}{2G_m} \left\{ A_1 + \frac{2\nu_m}{3-2\nu_m} \frac{r^2}{r_f^2} A_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{r f^4}{r^4} A_3 + \frac{2(1-\nu_m)}{1-2\nu_m} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{r f^2}{r^2} A_4 \right\} \tau \sin 2\theta \\ u_\theta &= \frac{r}{2G_m} \left\{ A_1 + \frac{r^2}{r_f^2} A_2 + \frac{r f^4}{r^4} A_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{r f^2}{r^2} A_4 \right\} \tau \cos 2\theta \\ \sigma_r &= \left\{ A_1 + 3 \frac{r f^4}{r^4} A_3 - \frac{2}{1-2\nu_m} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{r f^2}{r^2} A_4 \right\} \tau \sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= \left\{ A_1 + \frac{3}{3-2\nu_m} \frac{r^2}{r_f^2} A_2 - 3 \frac{r f^4}{r^4} A_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1-2\nu_m} \frac{r f^2}{r^2} A_4 \right\} \tau \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここで r は繊維中心からの距離, θ は x_2 軸からの傾きである (Fig. 2 参照)。また、係数 $A_1 \sim A_4$ は $r = r_f$, r_m における境界条件から決定される。

一方、マトリクスのみの均質材料の場合、直交座標系で表示した応力は物体内部で一様であり、応力と変位を円筒座標系で表示すると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^0 &= -\tau \sin 2\theta, \quad u_r^0 = -\frac{\tau}{2G_m} r \sin 2\theta \\ \sigma_\theta^0 &= \tau \sin 2\theta, \quad u_\theta^0 = \frac{\tau}{2G_m} r \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Fig. 2 A composite cylinder model subjected to the shear stress $\sigma_{23} = \sigma_{32} = \tau$.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta}^0 &= \tau \cos 2\theta, \quad u_\theta^0 = \frac{\tau}{2G_m} r \cos 2\theta \end{aligned} \right\}$$

と表される。

(27), (28) 式を (20) 式に代入して繊維/マトリクス界面 ($r = r_f$) で面積分すると

$$\delta U = \frac{\tau^2 (1-\nu_m)}{G_m (1-2\nu_m)} \pi r_f^2 A_4 \quad (29)$$

となる。これと (26) 式から

$$G_T^* \geq \frac{G_m}{1 + \{2(1-\nu_m)/(1-2\nu_m)\} A_4 V_f} \quad (30)$$

が得られる。ただし V_f は繊維の体積分率

$$V_f = \frac{\pi r_f^2}{V} \quad (31)$$

である。すなわち (27) 式中の A_4 を決定すれば (30) 式から G_T^* の下限が計算できる。

一方、複合材円柱モデルが平面歪みの条件下で面内等方応力 $\sigma_{22} = \sigma_{33} = p$ を受ける場合を考えると、複合材料の平面歪み体積弾性率 K_T^* の下限が得られる。結果は (8) 式と一致する。

また横方向引張りヤング率 E_T^* は (4) 式から得られる。本報告の界面すべりの解析では (4) 式中の E_L^* , ν_L^* は完全接着の式 (5), (6) をそのまま用いた。複合材を繊維方向に一軸引張りする場合、繊維とマトリクスの繊維方向の伸び歪みを同じと考えれば、界面接着がなくても界面すべりは生じないと考えられるためである。

4. 数値計算例

ボロン繊維/アルミ複合材の横方向引張りヤング率に関する数値計算例を示す。計算に用いた弾性率を Table 1 に示す。マトリクスのアルミについては降伏前と降伏してヤング率が約 1/5 に低下した状態とを考えた。境界条件等、計算の詳細は前報²⁾を参照されたい。

Table 1 Elastic constants of constituents.

	Young's modulus (GPa) E	Poisson ratio ν
Boron Fiber	400	0.21
Aluminum		
(Before yield)	69.8	0.33
(After yield)	14.8

Fig. 3 Transverse tensile Young's moduli of a boron/aluminum composite as a function of the volume fraction of the boron fiber. The Young's modulus of the aluminum is assumed to be 69 GPa (before yielding).

降伏前の横方向ヤング率と繊維体積分率の関係を Fig. 3 に示す。一点鎖線は完全接着、実線は界面すべり、点線は繊維周辺に空隙を生ずる場合である。比較のため繊維形状の空洞がマトリクス中にある場合を二点鎖線で示した。たとえば繊維体積分率を 50% とすると複合材の横方向ヤング率は完全接着の $E_T = 140$ GPa から空隙が形成されると 20 GPa へ急激に低下する。これに対して本報告の界面すべりのモデルでは 90 GPa となり、マトリクスのヤング率 $E_m = 69$ GPa よりやや高い値を示す。この計算結果から考えて界面接着の弱い繊維複合材が静的荷重または疲労荷重を受けて接着が剝離した場合、空隙形成に移る前に界面すべりの状態が存在しうると考えられる。アルミが降伏した後のヤング率と繊維体積分率の関係を Fig. 4 に示す。

Kyono ら³⁾ は一方向ボロン繊維/アルミ複合材の横方

Fig. 4 Transverse tensile Young's moduli of a boron/aluminum composite as a function of the volume fraction of the boron fiber. The Young's modulus of the aluminum is assumed to be 14.8 GPa (after yielding).

Fig. 5 The transverse tensile Young's moduli of a boron/aluminum composite ($V_f = 50\%$) as a function of the transverse tensile strain. The estimated moduli by Kyono *et al.*³⁾ (○) are compared with the theoretical predictions.

向一軸引張り試験を行ない歪みの増加に伴うヤング率の低下を評価した。 $V_f = 50\%$ の試料に関する結果を歪みに対してプロットしたのが Fig. 5 である。 Fig. 5 で一点鎖線はアルミ降伏前の完全接着、実線はアルミ降伏後の完全接着、点線がアルミ降伏後の界面すべり、二点鎖線はアルミ降伏後の空隙形成を仮定した計算値である。

Kyono ら³⁾の結果(○)を計算値と比較すると、歪み約 0.03% でアルミが降伏し、歪みが 0.1% を越えると界面の剥離が始まると考えられる。しかし歪みが 0.3% 以上になると界面すべりの計算値(点線)よりヤング率が低くなり界面すべりだけでなく繊維の周りに一部分空隙が生ずると考えられる。

最後に本報告の解析をもとに応力-歪み曲線を双線形(bilinear)近似した結果を示す。Fig.6 は繊維体積分率 30% のボロン繊維/アルミ複合材の横方向応力-歪み曲線である。実線は完全接着、点線は界面すべり、一点鎖線は空隙形成モデルの計算値であり、破線(曲線)が Kyono ら³⁾による実験データである。計算では複合材に加わる横方向引張り応力が 35 MPa に達したときアルミマトリクスが降伏すると仮定した。計算値と実験値を比較すると、歪み約 0.1% で完全接着(実線)から界面すべり(点線)へ転移し、0.2% を越えると界面に空隙を生ずる状態へ移るものと推測される。

5. 結 言

筆者らは先に球形粒子充填複合材の弾性率を解析し、界面接着の弱いガラスビーズ/ポリスチレン複合材の場合、界面すべりを仮定した理論式がヤング率の予測に有用であることを示した⁴⁾。本報告ではその手法を一方向繊維複合材に応用し、ボロン繊維/アルミ複合材に関する数値計算例を示した。Fig.6 の計算では、アルミは 35 MPa で降伏し、降伏後のヤング率は 14.8 MPa で一定と仮定した。アルミのヤング率が降伏後徐々に低下していくことを考慮すれば、応力-歪み曲線をより精密に予測することが可能である。そのためには、アルミ自身の降伏挙動と応力-歪み関係を検討する必要がある。また本報告の界面すべりの解析では繊維、マトリクスともに等方性と仮定した平面歪み弾性論を用いた。炭素繊維、アラミド繊維等、大きな異方性を示す繊維については解析法の修正が必要となる。

Fig.6 Transverse tensile stress-strain relation of a boron/aluminum composite ($V_f=30\%$). The experimental results³⁾ is compared with the theoretical predictions.

参 考 文 献

- 1) K. Takahashi & T.W. Chou : *Metall. Trans.*, 19 A (1988), 129-135.
- 2) 高橋清久, 久山徹也 : 日本複合材料学会誌, 15 (1989), 78-84.
- 3) T. Kyono, I.W. Hall & M. Taya : *J. Mater. Sci.*, 21 (1986), 4269-4280.
- 4) Z. Hashin & B.W. Rosen : *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 31 (1964), 223-232, errata, 32 (1965), 219. または Z. Hashin : *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 46 (1979), 543-550.
- 5) R.M. Christensen & K.H. Lo : *J. Mech. Phys. Solids*, 27 (1979), 315-330.
- 6) Z. Hashin : *J. Mech. Phys. Solids*, 13 (1965), 119-134.
- 7) J.D. Eshelby : *Progress in Solid State Physics*, ed. by F. Seitz & D. Turnbull, Vol. 3, Academic, New York (1956), p.79. または R.M. Christensen : *Mechanics of Composite Materials*, John Wiley & Sons, New York (1979), p.23.
- 8) K. Takahashi, M. Ikeda, K. Harakawa, K. Tanaka & T. Sakai : *J. Polym. Sci., Polym. Phys. Ed.*, 16 (1978), 415-425.