研究論文

引張り力を受ける 2 層斜交積層板の捩れ変形

平野 陽一

(1990 年 1 月 22 日 受付)

Twist of Two-Layered Angle-Ply Laminates under Tensile Load

Y. HIRANO

(Received January 22, 1990)

It is well known that two-layered angle-ply laminates twist under tensile load. Twist angles of the laminates may be calculated by the utilization of so-called lamination theory. The lamination theory is based on Kirchhoff hypothesis for plate bending problems; therefore, restrictions on deformations are imposed. In the present paper twist phenomena of two-layered angle-ply laminates are analyzed by extending the theory of torsion of bars which is free from the restrictions. The results of numerical calculations show that the twist angles highly depend on the fiber directions and the direction of twist can be plus or minus for certain material properties.

1. は し が き

一方向強化複合材料でできた 2 層斜交積層板は引張り力を受けると捩れ変形を生じることはよく知られている¹⁾。この現象は複合材料の異方性に基づくものであり、複合材料の特性を理解するのに重要なことであると考えられる。そこで、筆者らは引張り力を受ける 2 層斜交積層板の捩れ角を積層理論を使ってさきに求めた²⁾。しかし、積層理論は板の曲げ問題に対する Kirchhoff の仮説に基づく理論であるため、積層板の断面のワーピング変形を拘束している。そこで、本論文では、棒の捩り問題において変形に対する拘束のない捩り理論を拡張して引張り力下の 2 層斜交積層板の捩れ変形を求めることにする。

2. 2 層斜交積層板の応力-歪み関係

一方向強化複合材料は直交異方性であり、その弾性主軸 (Fig.1 の x_1, x_2, z 軸) に関する 3 次元の応力-歪み関係は (1) 式で与えられる。

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (1)$$

ここで、

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\} \quad (2)$$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}\} \quad (3)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (4)$$

であり、添え字 1, 2, 3 はそれぞれ x_1, x_2, z 軸方向に対応する。いま、繊維方向が Fig.1 のように x 軸より時計方向に θ 傾いている場合の x, y, z 座標系に関する応力-歪み関係は (5) 式のようにかける³⁾。

$$\{\sigma'\} = [C'] \{\varepsilon'\} \quad (5)$$

ここで、

$$\{\sigma'\}^T = \{\sigma_{11}', \sigma_{22}', \sigma_{33}', \sigma_{23}', \sigma_{13}', \sigma_{12}'\} \quad (6)$$

$$\{\varepsilon'\}^T = \{\varepsilon_{11}', \varepsilon_{22}', \varepsilon_{33}', \varepsilon_{23}', \varepsilon_{13}', \varepsilon_{12}'\} \quad (7)$$

$$[C'] = \begin{bmatrix} c_{11}' & c_{12}' & c_{13}' & 0 & 0 & c_{16}' \\ c_{12}' & c_{22}' & c_{23}' & 0 & 0 & c_{26}' \\ c_{13}' & c_{23}' & c_{33}' & 0 & 0 & c_{36}' \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}' & c_{45}' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45}' & c_{55}' & 0 \\ c_{16}' & c_{26}' & c_{36}' & 0 & 0 & c_{66}' \end{bmatrix} \quad (8)$$

であり、この場合の添え字 1, 2, 3 は x, y, z 軸方向に対応する。行列 $[C']$ の成分 c_{ij}' は繊維方向 θ の関数で、 $m = \cos \theta, n = \sin \theta$ として次式で与えられる³⁾。

$$c_{11}' = c_{11}m^4 + 2m^2n^2(c_{12} + 2c_{66}) + c_{22}n^4$$

* 中央大学理工学部教授 (112 東京都文京区春日 1-13-27)

Professor, Fac. of Sci. and Eng., Chuo University, 1-13-27, Kasuga, Bunkyo-ku, Tokyo 112, Japan

Fig.1 Unidirectionally fiber-reinforced plastics.

$$\begin{aligned}
 c_{12}' &= m^2 n^2 (c_{11} + c_{22} - 4c_{66}) + c_{12} (m^4 + n^4) \\
 c_{13}' &= c_{13} m^2 + c_{23} n^2 \\
 c_{14}' &= 0 \\
 c_{15}' &= 0 \\
 c_{16}' &= -mn [c_{11} m^2 - c_{22} n^2 - (c_{12} + 2c_{66}) (m^2 - n^2)] \\
 c_{22}' &= c_{11} n^4 + 2m^2 n^2 (c_{12} + 2c_{66}) + c_{22} m^4 \\
 c_{23}' &= c_{13} m^2 + c_{23} n^2 \\
 c_{24}' &= 0 \\
 c_{25}' &= 0 \\
 c_{26}' &= -mn [c_{11} n^2 - c_{22} m^2 + (c_{12} + 2c_{66}) (m^2 - n^2)] \\
 c_{33}' &= c_{33} \\
 c_{34}' &= 0 \\
 c_{35}' &= 0 \\
 c_{36}' &= (c_{23} - c_{13}) mn \\
 c_{44}' &= c_{44} m^2 + c_{55} n^2 \\
 c_{45}' &= (c_{44} - c_{55}) mn \\
 c_{46}' &= 0 \\
 c_{55}' &= c_{55} m^2 + c_{44} n^2 \\
 c_{56}' &= 0 \\
 c_{66}' &= (c_{11} + c_{22} - 2c_{12}) m^2 n^2 + c_{66} (m^2 - n^2)^2
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

(9)式より明らかなように c_{16}' , c_{26}' , c_{36}' , c_{45}' のみが θ の奇関数で他は偶関数である。ここでとりあげている積層板は2層斜交積層板であるので、第1層の繊維方向が $+\theta$ ならば第2層は $-\theta$ である。したがって、第1層と第2層で c_{16}' , c_{26}' , c_{36}' , c_{45}' の符号は異なる。

3. 引張り力と捩りを受ける2層板の応力状態

ここで、Fig.2 に示す帯板を考えることにする。この帯板は一方強化複合材料2層よりなっており、第1層の繊維方向と第2層の繊維方向は絶対値は同じで方向が反対であるとする。帯板には x 方向に引張り力 P と x 軸まわりに捩りモーメント T が負荷されているものとする。このときの変形を求めるのが本論文の目的であるが、厳密解を求めるのが困難である。そこで、最小コンプリメンタリエネルギーの原理に基づく直接法 (Ritz

Fig.2 Two-layered angle-ply laminate.

法) で近似的に変形を求めることにする。最小コンプリメンタリエネルギーの原理の適用にあたっては、仮定する応力場は平衡方程式を満足し、力学的境界条件を満足するものでなければならない。平衡方程式はつぎの(10)式で与えられる。

$$\begin{cases}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\
 \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0
 \end{cases}
 \tag{10}$$

ここで、考えている外荷重に対応して $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$ という応力状態を仮定し、 σ_x , τ_{xy} , τ_{zx} は x 方向に一定とすると、(10)式は(11)式となる。

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0
 \tag{11}$$

いま、次式で定義される応力関数 ϕ を導入すると、

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \tau_{zx} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}
 \tag{12}$$

(11) 式は恒等的に満足される⁴⁾。つぎに、力学的境界条件を考える。帯板の側面では(13)式が成立する。

$$\begin{cases}
 \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{zx} n = 0 \\
 \sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} l = 0 \\
 \sigma_z n + \tau_{zx} l + \tau_{yz} m = 0
 \end{cases}
 \tag{13}$$

ここで、 l , m , n は側面の法線方向余弦であるが、側面では $l=0$ である。したがって、 $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$ という応力状態のもとでは側面の境界条件は次式となる。

$$\tau_{xy} m + \tau_{zx} n = 0
 \tag{14}$$

応力関数 ϕ を使うと、(14)式は(15)式とかける⁴⁾。

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0
 \tag{15}$$

上式で、 s は x 軸に垂直な断面の境界に沿っての座標である。(15)式は断面の境界に沿って ϕ が一定であるこ

とを意味しており、 $\phi=0$ としても一般性を失わない。

4. 最小コンプリメンタリエネルギーの原理の適用

最小コンプリメンタリエネルギーの原理に基づく近似解法 (Ritz 法) で本問題を解くことにする。Fig. 2 に示したように帯板の長さは L で、 $x=L$ で振れ角は αL と規定されており (幾何学的境界条件)、軸方向変位は規定されていないものとする。この場合、全コンプリメンタリエネルギー関数は v, w を y, z 方向の変位として (16) 式のようにかける。

$$V = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz - \left[\iint (\tau_{xy} v + \tau_{zx} w) dy dz \right]_{\text{at } x=L} \quad (16)$$

いま振れ率を α とすると、 $x=L$ における振れ角は αL だから、 $x=L$ で $v = -\alpha L z$, $w = \alpha L y$ となる⁴⁾。したがって、(16) 式はつぎのようにかける。

$$V = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz - \alpha L \iint (-\tau_{xy} z + \tau_{zx} y) dy dz \quad (17)$$

ここで、応力関数 ϕ をつぎのように仮定することにする⁴⁾。

$$\phi = \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} a_{mn} \cos \frac{m\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi z}{2b} \quad (18)$$

(18) 式は境界で 0 で、 y, z 軸に関して対称である。さらに、引張り力を P とすると、 $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{zx}$ はそれぞれ (19), (20), (21) 式のようにかける。

$$\sigma_x = P / (4ab) \quad (19)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = - \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} a_{mn} \left(\frac{n\pi}{2b} \right) \times \cos \frac{m\pi y}{2a} \sin \frac{n\pi z}{2b} \quad (20)$$

$$\tau_{zx} = - \frac{\partial \phi}{\partial y} = \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} a_{mn} \left(\frac{m\pi}{2a} \right) \times \sin \frac{m\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi z}{2b} \quad (21)$$

ここで、いま考えている応力状態を (5) 式に適用すると

$$\begin{cases} \sigma_x = c_{11}' \varepsilon_x + c_{12}' \varepsilon_y + c_{13}' \varepsilon_z + c_{16}' \gamma_{xy} \\ \sigma_y = c_{12}' \varepsilon_x + c_{22}' \varepsilon_y + c_{23}' \varepsilon_z + c_{26}' \gamma_{xy} = 0 \\ \sigma_z = c_{13}' \varepsilon_x + c_{23}' \varepsilon_y + c_{33}' \varepsilon_z + c_{36}' \gamma_{xy} = 0 \\ \tau_{xy} = c_{16}' \varepsilon_x + c_{26}' \varepsilon_y + c_{36}' \varepsilon_z + c_{66}' \gamma_{xy} \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} = c_{44}' \gamma_{yz} + c_{45}' \gamma_{zx} = 0 \\ \tau_{zx} = c_{45}' \gamma_{yz} + c_{55}' \gamma_{zx} \end{cases} \quad (23)$$

という式を得る。この (22), (23) 式で与えられる連立方程式を解くと、歪み $\varepsilon_x, \gamma_{xy}, \gamma_{zx}$ はつぎの形にかける。

$$\begin{cases} \varepsilon_x = p \sigma_x + q \tau_{xy} \\ \gamma_{xy} = r \sigma_x + s \tau_{xy} \\ \gamma_{zx} = t \tau_{zx} \end{cases} \quad (24)$$

ここで、 p, q, r, s, t は (22), (23) 式の右辺の係数よりなり、 q と r は繊維方向 θ の奇関数となる。つぎに、(19)~(21) 式と (24) 式を全コンプリメンタリエネルギー関数 [(17) 式] に代入して、 $a_{m'n'}$ に関して極値化すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a_{m'n'}} &= \frac{L}{2} \iiint \left[-(q+r) \frac{P}{4ab} \frac{n'\pi}{2b} \cos \frac{m'\pi y}{2a} \right. \\ &\quad \times \sin \frac{n'\pi z}{2b} + 2s \left\{ \sum \sum a_{mn} \left(\frac{n\pi}{2b} \right) \cos \frac{m\pi y}{2a} \right. \\ &\quad \times \sin \frac{n\pi z}{2b} \left. \left(\frac{n'\pi}{2b} \right) \cos \frac{m'\pi y}{2a} \sin \frac{n'\pi z}{2b} \right. \\ &\quad + 2t \left\{ \sum \sum a_{mn} \left(\frac{m\pi}{2a} \right) \sin \frac{m\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi z}{2b} \right. \\ &\quad \times \sin \frac{m'\pi y}{2a} \cos \frac{n'\pi z}{2b} \left. \right\} dy dz \\ &\quad \left. - \alpha L \iint \left\{ z \left(\frac{n'\pi}{2b} \right) \cos \frac{m'\pi y}{2a} \sin \frac{n'\pi z}{2b} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + y \left(\frac{m'\pi}{2a} \right) \sin \frac{m'\pi y}{2a} \cos \frac{n'\pi z}{2b} \right\} dy dz = 0 \right] dy dz = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

上式で第 1 層 ($z = -b \sim 0$) と第 2 層 ($z = 0 \sim b$) で q と r の符号が異なることに注意して、上式を計算すると

$$\begin{aligned} &\frac{2P}{ab} (q+r) \left(-\frac{a}{\pi} \right) \frac{1}{m'} (-1)^{(m'-1)/2} \\ &+ \frac{ab}{2} \left\{ s n'^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + t m'^2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \right\} a_{m'n'} \\ &- 64\alpha \left(\frac{a}{\pi} \right) \left(-\frac{b}{\pi} \right) \frac{1}{m'n'} (-1)^{(m'-1)/2} (-1)^{(n'-1)/2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

となる。ここで、添え字 1 は第 1 層を示している。上式は引張り力 P と振れ率 α と級数で表した応力関数の係数 $a_{m'n'}$ との関係を与えている。ここで、帯板が等方性 ($q=r=0, s=t=1/G$; G はせん断弾性係数) で $P=0$ とすると

$$\begin{aligned} &\frac{\pi^2 ab}{2} \left(\frac{n'^2}{b^2} + \frac{m'^2}{a^2} \right) \frac{a_{m'n'}}{G} \\ &- 64\alpha \frac{ab}{\pi^2 m'n'} (-1)^{(m'+n')/2-1} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

なる式を得るが、この式は文献 4) の 319 頁の式と同一である。振りモーメント T は

$$\begin{aligned}
 T &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b (-z\tau_{xy} + y\tau_{xz}) dy dz \\
 &= 32 \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \left(\frac{a}{\pi} \right) \left(-\frac{b}{\pi} \right) \\
 &\quad \times \frac{1}{mn} (-1)^{(m+n)/2-1} a_{mn} \quad (28)
 \end{aligned}$$

より求められる。2層斜交積層板で $T=0$ の場合に(18)式の第1項のみをとると(28)式より $a_{11}=0$ となり、(26)式より

$$P(q+r)_1 - \frac{32}{\pi} ab^2 \alpha = 0 \quad (29)$$

を得る。上式は引張り力 P と捩れ率 α の関係を与えている。

5. 数値計算結果

2層斜交積層板に引張り力 P のみが負荷されている場合を考える。(18)式の級数は精度上十分と判定した16項 ($m=1, 3, 5, 7; n=1, 3, 5, 7$) までとった。いま P が与えられているとすると(26)式より $a_{m'n'}$ が計算できるので、16個の $a_{m'n'}$ の値を(28)式の $T=0$ とした式に代入すると引張り力 P と捩れ率 α との関係が求まる。数値計算は Table 1 に特性値を示した炭素繊維強化である CFRP とボロン繊維強化である BFRP について行った。同表で添え字 1, 2, 3 はそれぞれ Fig.1 の x_1, x_2, z 軸方向に対応する。表中の $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$ は測定に基づく値^{5,6)}であるが、他の値は 2-3 面内では均質等方性であると想定したときの値である。また、帯板の断面寸法は $a=25$ mm, $b=0.125$ mm とした。計算結果を横軸に第1層の積層角 θ をとって、縦軸に単位引張り力 P に対する捩れ率 α をとって Fig.3 に示した。同図は CFRP, BFRP とともに積層角約 30° で捩れ率が最大になることと本特性の BFRP の場合にはある積層角で捩れ方向の反転が生じていることを示している。参考のために積層理論 (lamination theory) に基づく計算結果も Fig.3 に示した。積層理論は変形に拘束を与えている Kirchhoff の仮説に基づくものであるから、積層理論による捩れ率は本計算より小になっていると考えられる。

6. む す び

一方向強化複合材料でできた2層斜交積層板の引張り力下における捩れ率を棒の振り理論を拡張して求めた。CFRP と BFRP の場合についての計算結果を Fig.3 に示した。ところで、タービンブレードのような初期捩れ

Table 1 Material properties.

	CFRP ⁵⁾	BFRP ⁶⁾
E_1 (kgf/mm ²)	10,700	21,100
E_2 (kgf/mm ²)	891	2,110
E_3 (kgf/mm ²)	891	2,110
G_{12} (kgf/mm ²)	465	703
G_{23} (kgf/mm ²)	343	812
G_{31} (kgf/mm ²)	465	703
ν_{12}	0.327	0.3
ν_{23}	0.3	0.3
ν_{31}	0.0272	0.03

Fig.3 Rate of twist α under tensile load P vs lamination angle θ .

のある帯板に引張り力が負荷されると捩れもどしが生じることが知られており、本問題においても本来ならこの効果も考慮に入れるべきである。この現象も含めた解析、つまり異方性による引張り力下の捩れ発生と引張り力下での捩れもどしの両者を考慮した解析を行うことが今後の課題と考えている。

参 考 文 献

- 1) J.E. Ashton, J.C. Halpin & P.H. Petit: *Primer on Composite Materials: Analysis*, Technomic

- Publ., Connecticut (1969), p. 38.
- 2) 平野陽一, 飯野 明, 井山向史: 材料システム, 5 (1986), 59-64.
 - 3) J.E. Ashton & J.M. Whitney: *Theory of Laminated Plates*, Technomic Publ., Connecticut (1970), pp. 7-8.
 - 4) S.P. Timoshenko & J.N. Goodier: *Theory of Elasticity* (3rd Ed.), McGraw-Hill, New York (1970), pp. 291-319.
 - 5) 平野陽一: 日本航空宇宙学会誌, 32, 360 (1984), 46-51.
 - 6) R.M. Jones: *Mechanics of Composite Materials*, Hemisphere Publ., New York (1975), p. 70.
 - 7) A. Rosen: *J. Appl. Mech.*, 47 (1980), 389-392.