研究論文

横等方性繊維を用いた一方向繊維複合材への
界面すべりモデルの適用

高橋 清久*, 久山 徹也**, 尹 昊圭***, 中島 和夫****

(1989年11月16日受付)

Extension of the Interfacial Slippage Model to the Unidirectional
Fiber Composite Reinforced with Transversely Isotropic Fiber

K. TAKAHASHI,* T. HISAYAMA,** H. YOON***

and K. NAKAJIMA****

(Received November 16, 1989)

In a preceding paper, the interfacial slippage model of the unidirectional fiber composite was developed assuming that the fiber and the matrix were both isotropic. By the use of this model, the elastic moduli and the stress distribution in the transverse cross-section of the composite can be predicted. In this paper, the interfacial slippage model has been extended to the composite reinforced with transversely isotropic fiber. The predicted transverse Young's moduli of the unidirectional carbon fiber/PEEK composites are compared with the experimental results. In the experiment, two types of unidirectional carbon fiber/PEEK composites are prepared: (a) from prepreg sheet and (b) from the cloth woven using the warp of carbon fiber and the weft of PEEK fiber. The transverse Young's modulus of the specimen (a) coincides with the theoretical results assuming the perfect adhesion at the carbon fiber/PEEK interface. On the other hand, the experimental result of specimen (b) rather coincides with the theoretical prediction based on the interfacial slippage model.

1. 緒 言

炭素繊維, アラミド繊維などは, 繊維軸方向と横方向で弾性率等の性質が異なる横等方性材料である。筆者らは先に繊維とマトリクスがともに等方性である場合を対象とし, 一方向繊維複合材の横方向断面応力分布¹⁾と横方向弾性率²⁾に及ぼす界面すべりの影響を検討した。これらの解析法の適用範囲は, 強化繊維がガラス繊維, ポロン繊維など等方性の場合に限定される。本報告ではこの解析法を, 強化繊維が弾性率に異方性(横等方性)を

もつ場合にも適用できるよう拡張する。解析では前報と同じモデルを用い, 繊維とマトリクスとの間に接着がなく界面ですべりを生じる場合を考えた。また炭素繊維とPEEK繊維の交織布およびブリプレグから作製した一方向複合材の横方向ヤング率を測定し, 完全接着および界面すべりを仮定した計算値と比較した。

2. 基礎的な関係式

力学的に平衡状態にある連続物体では, 物体内部の応力は, 次の平衡方程式(釣合の式)を満足しなくてはならない。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xL}}{\partial L} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yL}}{\partial L} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{Lx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{Ly}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_L}{\partial L} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

横等方性の繊維または繊維複合材に関して, 繊維方向

*-*** 名古屋工業大学材料工学科 (466 名古屋市昭和区御器所町)

Dept. of Materials Sci. & Eng., Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya 466, Japan

* 助教授 Associate Professor, **,*** 大学院生 Graduate Student

**** 敷島紡績(株) ACM 開発分室 (563 池田市伏尾町 103)

ACM Project Team, Shikibo Ltd., 103, Fusio-cho, Ikeda 563, Japan

を L , 横方向を x, y とすると (Fig.1), 応力-歪み関係は次式で表される.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_L \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} \\ -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{TT}}{E_T} \\ -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & -\frac{\nu_{TT}}{E_T} & \frac{1}{E_T} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_L \\ \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{1}{G_{TT}} \tau_{xy} \\ \gamma_{yL} = \frac{1}{G_{LT}} \tau_{yL} \\ \gamma_{Lx} = \frac{1}{G_{LT}} \tau_{Lx} \end{array} \right\}$$

Fig.1 Unidirectional fiber composite and the definition of the coordinates (x, y, L).

には

$$\frac{\nu_{LT}}{E_L} = \frac{\nu_{TL}}{E_T}, \quad G_{TT} = \frac{E_T}{2(1+\nu_{TT})} \quad (3)$$

横等方性材料の弾性率成分としては $E_L, E_T, G_{LT}, G_{TT}, \nu_{LT}, \nu_{TL}, \nu_{TT}$ の七つがある. これらの定数の間

という関係があるため弾性率の独立な成分は五つとなる. (2)式より応力を歪みについて解くと,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_L = \frac{(1-\nu_{TT})E_L\varepsilon_L + \nu_{TL}E_L(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{1-\nu_{TT}-2\nu_{TL}\nu_{LT}} \\ \sigma_x = \frac{\nu_{LT}(1+\nu_{TT})E_T\varepsilon_L + (1-\nu_{TL}\nu_{LT})E_T\varepsilon_x + (\nu_{TT} + \nu_{TL}\nu_{LT})E_T\varepsilon_y}{(1+\nu_{TT})(1-\nu_{TT}-2\nu_{TL}\nu_{LT})} \\ \sigma_y = \frac{\nu_{LT}(1+\nu_{TT})E_T\varepsilon_L + (\nu_{TT} + \nu_{TL}\nu_{LT})E_T\varepsilon_x + (1-\nu_{TL}\nu_{LT})E_T\varepsilon_y}{(1+\nu_{TT})(1-\nu_{TT}-2\nu_{TL}\nu_{LT})} \\ \tau_{xy} = G_{TT}\gamma_{xy} \\ \tau_{yL} = G_{LT}\gamma_{yL} \\ \tau_{Lx} = G_{LT}\gamma_{Lx} \end{array} \right\} \quad (4)$$

となる. ここで横等方性物体に関する Lamé 定数を

$$\lambda^* = \frac{(\nu_{TT} + \nu_{TL}\nu_{LT})E_T}{(1+\nu_{TT})(1-\nu_{TT}-2\nu_{TL}\nu_{LT})} \quad (5)$$

と定義すると平面歪み状態 ($\varepsilon_L=0, \gamma_{Lx}=0, \gamma_{yL}=0$) では

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = (\lambda^* + 2G_{TT})\varepsilon_x + \lambda^*\varepsilon_y \\ \sigma_y = \lambda^*\varepsilon_x + (\lambda^* + 2G_{TT})\varepsilon_y \\ \tau_{xy} = G_{TT}\gamma_{xy} \end{array} \right\} \quad (6)$$

という関係が得られる.

平面歪み場では, 直交座標系で変位と歪みとの関係は以下のように定義される.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (7)$$

(7)式を(6)式に代入すると, 材料内の応力は変位を用いて

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = (\lambda^* + 2G_{TT}) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda^* \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \sigma_y = \lambda^* \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda^* + 2G_{TT}) \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \tau_{xy} = \frac{G_{TT}}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{array} \right\} \quad (8)$$

と表される. $\Delta = \partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y$ を用いると(8)式は

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = 2G_{TT} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda^* \Delta \\ \sigma_y = 2G_{TT} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda^* \Delta \\ \tau_{xy} = G_{TT} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{array} \right\} \quad (9)$$

となる. (9)式を平衡方程式(1)に代入すると, 平面歪み状態での変位に関する微分方程式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} (\lambda^* + G_{TT}) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G_{TT} \nabla^2 u_x &= 0, \\ (\lambda^* + G_{TT}) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + G_{TT} \nabla^2 u_y &= 0, \\ \Delta &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

この式を満足する解 u_x , u_y は平面調和関数 ϕ または ω_n :

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (11)$$

$$\nabla^2 \omega_n = 0 \quad (12)$$

を用いて求めることができる。

ϕ type

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ u_y &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ω type

$$\left. \begin{aligned} u_x &= r^2 \frac{\partial \omega_n}{\partial x} + \alpha_n x \omega_n \\ u_y &= r^2 \frac{\partial \omega_n}{\partial y} + \alpha_n y \omega_n \\ \alpha_n &= -\frac{2n(\lambda^* + 3G_{TT})}{(n+2)\lambda^* + (n+4)G_{TT}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

直交座標系と円筒座標系の間には次のような関係がある。

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \\ \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、下付き添字 r は半径方向、 θ は円周方向を表す。これらの関係を用いて座標変換すると、 ϕ 型の解は円筒座標系を用いて

ϕ type

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

と表される。 ω 型の解も同様に

ω type

$$\left. \begin{aligned} u_r &= r^2 \frac{\partial \omega_n}{\partial r} + \alpha_n r \omega_n \\ u_\theta &= r \frac{\partial \omega_n}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Fig.2 (a) Composite cylinder, and (b) composite cylinder assemblage model.

となる。これらの変位 u_r , u_θ から応力 σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ は次式を用いて計算できる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (\lambda^* + 2G_{TT}) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda^* \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_\theta &= \lambda^* \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda^* + 2G_{TT}) \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \tau_{r\theta} &= G_{TT} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

3. 変位と応力

3.1 複合材円柱モデル

以下の解析では Hashin と Rosen⁹⁾ の提案した複合材円柱集合体モデルを用いる。複合材円柱モデルは Fig. 2 a のように半径 r_f の連続繊維の周りを半径 r_m のマトリクスが取り巻いている。そして種々の大きさの複合材円柱が Fig. 2 b のように隙間なく充填して複合材を形成する。各円柱表面が受ける応力は、複合材料が受ける応力と等しいと考えて複合材円柱内部の変位と応力を定式化する。以下では簡単のため G_{TT} を G_T と記す。

3.2 等方応力

前節の調和関数として

$$\phi(r, \theta) = -\frac{A_1}{2} r^2 + A_2 \log r \quad (19)$$

を用いると、

$$\left. \begin{aligned} u_r &= A_1 r + \frac{A_2}{r}, \quad u_\theta = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2K_T A_1 - 2G_T \frac{A_2}{r^2} \\ \sigma_\theta &= 2K_T A_1 + 2G_T \frac{A_2}{r^2} \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

を得る。ただし A_1, A_2 は未知の定数である。この解は複合材円柱が等方応力のみを受ける場合の、マトリクス中の変位と応力を与える。式中の係数 K_T は平面歪み体積弾性率で通常の体積弾性率 K とは異なる。横等方性材料では、

$$K_T = \frac{E_T}{2(1-\nu_{TT}-2\nu_{TL}\nu_{LT})} \quad (21)$$

である。

また、調和関数に

$$\phi(r, \theta) = \frac{B_1}{2} r^2 \quad (22)$$

を用いると、

$$\left. \begin{aligned} u_r &= B_1 r, \quad u_\theta = 0 \\ \sigma_r &= 2K_T B_1 \\ \sigma_\theta &= 2K_T B_1 \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

を得る。 B_1 は未知の定数である。この解は複合材円柱が等方応力のみを受ける場合の、繊維内部の変位と応力を与える。ここで境界条件に

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^m &= \sigma_r \quad (r=r_m) \\ \sigma_r^m &= \sigma_r^f \\ u_r^m &= u_r^f \end{aligned} \right\} \quad (r=r_f) \quad (24)$$

を用いて、未知の定数 A_1, A_2 および B_1 を決定すると変位と応力は以下のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} u_r^m &= -\frac{1}{2K_T^m} (CV_f - 1) \frac{1}{1-V_f} r \sigma_0 \\ &\quad - \frac{1}{2G_T^m} (C-1) \frac{V_f}{1-V_f} \frac{r m^2}{r} \sigma_0 \\ \sigma_r^m &= -(CV_f - 1) \frac{1}{1-V_f} \sigma_0 \\ &\quad + (C-1) \frac{V_f}{1-V_f} \frac{r m^2}{r^2} \sigma_0 \\ \sigma_\theta^m &= -(CV_f - 1) \frac{1}{1-V_f} \sigma_0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} &-(C-1) \frac{V_f}{1-V_f} \frac{r m^2}{r^2} \sigma_0 \\ u_\theta^m &= \tau_{r\theta}^m = 0 \\ u_r^f &= \frac{1}{2K_T^f} C r \sigma_0 \\ \sigma_r^f &= \sigma_\theta^f = C \sigma_0 \\ u_\theta^f &= \tau_{r\theta}^f = 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ここで

$$C = \frac{K_T^f (G_T^m + K_T^m)}{K_T^m (G_T^m + K_T^f) + G_T^m (K_T^f - K_T^m) V_f} \quad (27)$$

である。また式中の肩付き添字 m はマトリクス、 f は繊維を表す。

3.3 剪断応力

次に、複合材円柱が剪断応力 τ_0 のみを受ける場合を考える。複合材料が表面で剪断応力 τ_0 を受けるとき複合材円柱表面では $\sigma_r = \tau_0 \sin 2\theta$, $\tau_{r\theta} = \tau_0 \cos 2\theta$ の応力が加わる (Fig. 3 b 参照)。

このとき上記の調和関数に

$$\left. \begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \bar{A}_1 r^2 \sin 2\theta + \bar{A}_3 r^{-2} \sin 2\theta \\ \omega_{\pm 2}(r, \theta) &= \bar{A}_2 r^2 \sin 2\theta + \bar{A}_4 r^{-2} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

を用いるとマトリクス中の変位と応力が得られる。

また調和関数として

$$\left. \begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \bar{B}_1 r^2 \sin 2\theta \\ \omega_{\pm 2}(r, \theta) &= \bar{B}_2 r^2 \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

を用いると、繊維中の変位と応力が得られる。(28)、(29)式中の係数 $\bar{A}_1 \sim \bar{A}_4, \bar{B}_1, \bar{B}_2$ を

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_1 &= \frac{\tau_0}{4G_T^m} A_1, \quad \bar{A}_2 = \frac{\tau_0}{4G_T^m r_f^2} A_2 \\ \bar{A}_3 &= \frac{r_f^4 \tau_0}{4G_T^m} A_3, \quad \bar{A}_4 = \frac{r_f^2 \tau_0}{4G_T^m} A_4 \\ \bar{B}_1 &= \frac{\tau_0}{4G_T^m} B_1, \quad \bar{B}_2 = \frac{\tau_0}{4G_T^m r_f^2} B_2 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

と置くことにより、マトリクスおよび繊維内部の変位と応力が次式のように得られる。

$$u_r^m = \frac{r}{2G_T^m} \left\{ A_1 + \frac{2(\nu_{TT}^m + \nu_{TL}^m \nu_{LT}^m)}{3 + \nu_{TT}^m - 2\nu_{TL}^m \nu_{LT}^m} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{r^2}{r_f^2} A_2 - \frac{r_f^4}{r^4} A_3 \\
& + \frac{2(1-\nu_{TL}^m \nu_{LT}^m)}{1-\nu_{TT}^m-2\nu_{TL}^m \nu_{LT}^m} \\
& \times \frac{r_f^2}{r^2} A_4 \Big\} \tau_0 \sin 2\theta \\
u_\theta^m = & -\frac{r}{2G_T^m} \Big\{ A_1 + \frac{r^2}{r_f^2} A_2 + \frac{r_f^4}{r^4} A_3 \\
& + \frac{r_f^2}{r^2} A_4 \Big\} \tau_0 \cos 2\theta \\
\sigma_r^m = & \Big\{ A_1 + 3 \frac{r_f^4}{r^4} A_3 - \frac{2(1+\nu_{TT}^m)}{1-\nu_{TT}^m-2\nu_{TL}^m \nu_{LT}^m} \\
& \times \frac{r_f^2}{r^2} A_4 \Big\} \tau_0 \sin 2\theta \\
\sigma_\theta^m = & -\Big\{ A_1 + \frac{6(1+\nu_{TT}^m)}{3+\nu_{TT}^m-2\nu_{TL}^m \nu_{LT}^m} \frac{r^2}{r_f^2} A_2 \\
& + 3 \frac{r_f^4}{r^4} A_3 \Big\} \tau_0 \sin 2\theta \\
\tau_{r\theta}^m = & \Big\{ A_1 + \frac{3(1+\nu_{TT}^m)}{3+\nu_{TT}^m-2\nu_{TL}^m \nu_{LT}^m} \frac{r^2}{r_f^2} A_2 \\
& - 3 \frac{r_f^4}{r^4} A_3 + \frac{1+\nu_{TT}^m}{1-\nu_{TT}^m-2\nu_{TL}^m \nu_{LT}^m} \\
& \times \frac{r_f^2}{r^2} A_4 \Big\} \tau_0 \cos 2\theta \\
u_r^f = & -\frac{r}{2G_T^m} \Big\{ B_1 + \frac{2(\nu_{TT}^f + \nu_{TL}^f \nu_{LT}^f)}{3+\nu_{TT}^f-2\nu_{TL}^f \nu_{LT}^f} \\
& \times \frac{r^2}{r_f^2} B_2 \Big\} \tau_0 \sin 2\theta \\
u_\theta^f = & -\frac{r}{2G_T^m} \Big\{ B_1 + \frac{r^2}{r_f^2} B_2 \Big\} \tau_0 \cos 2\theta \\
\sigma_r^f = & \frac{G_T^f}{G_T^m} \{ B_1 \} \tau_0 \sin 2\theta \\
\sigma_\theta^f = & -\frac{G_T^f}{G_T^m} \Big\{ B_1 + \frac{6(1+\nu_{TT}^f)}{3+\nu_{TT}^f-2\nu_{TL}^f \nu_{LT}^f} \Big\} \tau_0 \cos 2\theta
\end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{r^2}{r_f^2} B_2 \Big\} \tau_0 \sin 2\theta \\
\tau_{r\theta}^f = & \frac{G_T^f}{G_T^m} \Big\{ B_1 + \frac{3(1+\nu_{TT}^f)}{3+\nu_{TT}^f-2\nu_{TL}^f \nu_{LT}^f} \\
& \times \frac{r^2}{r_f^2} B_2 \Big\} \tau_0 \cos 2\theta
\end{aligned}$$

ただし上式中の定数 A_1, A_2, A_3, A_4 および B_1, B_2 は境界条件から決定される。境界条件としては、

$r=r_m$ で

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^0 &= \tau_0 \sin 2\theta \\ \tau_{r\theta}^0 &= \tau_0 \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$r=r_f$ で

$$\text{完全接着: } \left\{ \begin{aligned} \sigma_r^m &= \sigma_r^f \\ \tau_{r\theta}^m &= \tau_{r\theta}^f \\ u_r^m &= u_r^f \\ u_\theta^m &= u_\theta^f \end{aligned} \right. \quad \text{界面すべり: } \left\{ \begin{aligned} \sigma_r^m &= \sigma_r^f \\ u_r^m &= u_r^f \\ \tau_{r\theta}^m &= 0 \\ \tau_{r\theta}^f &= 0 \end{aligned} \right. \quad (34)$$

を用いる。

4. 弾性率の解析

繊維と垂直な平面内での平面歪み状態を仮定し、複合材円柱集合体モデルを用いて解析を行った。一方向繊維複合材料が、繊維に垂直な平面内で一軸引張り応力 (σ) を受ける場合を考える。この状態は等方応力 ($\sigma_0 = \sigma/2$) と剪断応力 ($\tau_0 = \sigma/2$) に分解でき (Fig.3), この物体が蓄える弾性エネルギーは、

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{\sigma_0^2}{K_T^*} + \frac{\tau_0^2}{G_T^*} \right) dV \quad (35)$$

で表される。ここで K_T^*, G_T^* は複合材料の見かけの平面歪み体積弾性率および見かけの剪断弾性率であり、 V は複合材円柱の体積である (Fig.1 の L 方向の長さは単位長さとする)。また、この試料と同一形状、同一寸法のマトリクスのみからなる均質材料がこれと同じ外力を受けるとき、この均質材料が蓄える弾性エネルギーは

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{\sigma_0^2}{K_T^m} + \frac{\tau_0^2}{G_T^m} \right) dV \quad (36)$$

である。マトリクス中に繊維を充填することによる弾性エネルギーの増分 δU は Eshelby の公式⁴⁾ によって

Fig.3 (a) Isotropic stress, (b) pure shear stress and (c) uniaxial stress applied to the composite cylinder.

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_S (T_i^0 u_i - T_i u_i^0) ds \quad (37)$$

で与えられる。ここで T_i は面力であり $T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$ である。 i, j は r, θ または x, y を表す。また(37)式は界面についての面積積分であり、右肩の添字0は繊維を含まない均質材料、添字0のないものは繊維を含んだ複合材料についての変位または面力である。

コンプリメンタリエネルギー極小の原理を用いると、 $U, U_0, \delta U$ は、

$$U \leq U_0 + \delta U \quad (38)$$

を満足しなくてはならない。これらの関係式(35)~(38)から一方向連続繊維複合材の見かけの弾性率 K_T^* , G_T^* が計算できる。

まず一方向連続繊維に等方応力 σ_0 のみ加わる場合を考え、(35)~(38)式を K_T^* について解くと次式を得る。

$$K_T^* \geq \frac{1}{\frac{1}{K_T^m} + \frac{2\delta U}{\sigma_0^2 V}} \quad (39)$$

δU は(37)式によって求める。肩つき添字0のある場合、マトリクスは均質材料であるので、変位と応力は

$$\left. \begin{aligned} u_r^0 &= \frac{r}{2K_T^m} \sigma_0, & \sigma_r^0 &= \sigma_0 \\ u_\theta^0 &= 0, & \tau_{r\theta}^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

である。肩つき添字のない場合、すなわち繊維複合材では、変位と応力は前節で求めた(25), (26)式を用いる。その結果 K_T^* は次式で表される。

$$K_T^* \geq K_T^m + \frac{V_f}{\frac{1}{K_T^f - K_T^m} + \frac{1 - V_f}{K_T^m + G_T^m}} \quad (41)$$

これは Hashin⁵⁾ が繊維の断面形状が任意の場合について変分原理を用いて求めた体積弾性率の計算結果と一致

する。

一方向繊維複合材の見かけの剪断弾性率 G_T^* を求める場合には(35), (36)式で複合材に純粋剪断応力 τ_0 のみ加わる場合を考え、(35)~(38)式を G_T^* について解く。

$$G_T^* \geq \frac{1}{\frac{1}{G_T^m} + \frac{2\delta U}{\tau_0^2 V}} \quad (42)$$

(42)式の δU は K_T^* の場合と同様に、(37)式から求めるが、このときマトリクスのみの均質材料中の変位と応力は

$$\left. \begin{aligned} u_r^0 &= \frac{r}{2G_T^m} \tau_0 \sin 2\theta, & \sigma_r^0 &= \tau_0 \sin 2\theta \\ u_\theta^0 &= \frac{r}{2G_T^m} \tau_0 \cos 2\theta, & \tau_{r\theta}^0 &= \tau_0 \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

であり、複合材中の変位と応力は、(31), (32)式によって表される。しかし(31), (32)式は、未知の係数 $A_1 \sim A_4$ を含んでいるため δU は係数 A_4 を含んだ形で与えられる。

$$\delta U = \frac{\tau_0^2 V_f}{G_T^m} \frac{1 - \nu_{TL}^m \nu_{LT}^m}{1 - \nu_{TT}^m - 2\nu_{TL}^m \nu_{LT}^m} A_4 \quad (44)$$

ここで V_f は複合材円柱の単位長さあたりの繊維の体積であり、 $V_f/V = V_f$ (V_f : 繊維の体積分率)である。

(42), (44)式より、一方向連続繊維複合材の見かけの剪断弾性率 G_T^* として次式を得る。

$$G_T^* \geq \frac{G_T^m}{1 + \frac{2(1 - \nu_{TL}^m \nu_{LT}^m)}{1 - \nu_{TT}^m - 2\nu_{TL}^m \nu_{LT}^m} V_f A_4} \quad (45)$$

ここで係数 A_4 は、前項の境界条件(33), (34)式に、(31), (32)式を代入した連立方程式を解くことにより決

定される。

横方向ヤング率 E_T^* は K_T^* , G_T^* から計算できる。平面歪み状態では(2), (3)式から次の関係が導かれる。

$$\frac{1}{K_T^*} = \frac{4}{E_T^*} - \frac{4(\nu_{LT}^*)^2}{E_L^*} - \frac{1}{G_T^*} \quad (46)$$

この関係式から一方連続繊維複合材のヤング率 E_T^* を求めた。ここで、 E_L^* , ν_{LT}^* は Hashin⁵⁾ が導いた式

$$E_L^* = E_L^f V_f + E_L^m (1 - V_f) + \frac{4(\nu_{LT}^f - \nu_{LT}^m)^2 (1 - V_f) V_f}{\frac{1 - V_f}{K_T^f} + \frac{V_f}{K_T^m} + \frac{1}{G_T^m}} \quad (47)$$

$$\nu_{LT}^* = \nu_{LT}^f V_f + \nu_{LT}^m (1 - V_f) + \frac{(\nu_{LT}^f - \nu_{LT}^m) \left(\frac{1}{K_T^f} - \frac{1}{K_T^m} \right) (1 - V_f) V_f}{\frac{1 - V_f}{K_T^f} + \frac{V_f}{K_T^m} + \frac{1}{G_T^m}} \quad (48)$$

を用いた。

5. 実験との比較と考察

一方炭素繊維/PEEK 複合材について、界面の接着程度が違ふ2種類の試料を用いて横方向弾性率を測定し、計算結果と比較した。実験では炭素繊維/PEEK のプリプレグ (ICI 社製, APC-2) より作成した試料と、炭素繊維 (東邦ベスロン社製) の経糸 (直径 $7\mu\text{m} \times 3,000$ 本) と PEEK (帝人社製) の緯糸からなる交織布 (シキボウ社製) より作成した試料の、2種類を用いた。なお試料中の繊維体積分率は、プリプレグ自体の繊維体積分率、および交織布における繊維密度等によって限定される。

横方向弾性率の測定では、オリエンテック社製テンシロン UTM-4 を用い、試料寸法を長さ 150 mm, 幅 10

mm, 厚さ 0.5 mm とし、チャック間距離 100 mm, 引張り速度 1 mm/min, 温度 30°C で一軸引張り試験を行った。

実験から得た横方向ヤング率を、完全接着、界面すべり、空隙形成²⁾の3種類の計算結果と比較して Fig. 4 に示す。数値計算に用いた炭素繊維と PEEK の弾性定数を Table 1 に示す。

プリプレグより作成した試料では、繊維間への樹脂の含浸、繊維/マトリクス界面での接着とともに比較的良好であり、測定データは完全接着の計算結果とよい一致を示している。しかし交織布より作成した試料では破断後に一部繊維の毛羽立ちが見られることから、含浸が十分でなく界面での接着が不完全であったものと推測される。この交織複合材の横方向ヤング率の実験結果は、界面すべりの計算結果と比較的よい一致を示している。こ

Fig. 4 Transverse Young's modulus vs. volume fraction of carbon fiber. Theoretical results; perfect adhesion (---), free slippage (—), and cavity formation (— · —) at the fiber/matrix interface, are compared with the experimental results of the specimen made from; prepreg sheet (●), and cloth woven using the warp of carbon fiber and the weft of PEEK fiber (○).

Table 1 Elastic constants of the constituents.

	Young's modulus (GPa)		Shear modulus (GPa) G_T	Poisson ratio	
	E_L	E_T		ν_{LT}	ν_{TT}
Carbon fiber	225.4	20.58	7.74	0.31	0.33
PEEK		3.01	1.06		0.42

の交織複合材では、樹脂の含浸が不十分で界面に空隙を生じている部分と、樹脂と繊維が完全接着している部分とが入り混じっているものと考えられ、この試料の弾性挙動を界面すべりのモデルで説明することが妥当であるとは断定できない。しかし、従来の界面で空隙を形成するモデルでは実際の試料の弾性率よりもかなり低い計算結果になってしまう。このため今回の界面すべりの解析は、界面での接着が不完全な複合材の横方向弾性挙動を予測するうえで、空隙形成モデルよりは現実的な計算法として用いることができるものと考えられる。

6. 結 言

一方向繊維強化複合材について、繊維とマトリクスの界面での接着が不完全な場合を扱った前報の界面すべりの解析法を、横等方性繊維と横等方性マトリクスからなる複合材にも適用できるように拡張した。この解析法は繊維強化複合材の繊維が、炭素繊維やアラミド繊維のように弾性率に異方性（横等方性）をもつ場合に有効である。

実験では、2種類の一方向炭素繊維/PEEK 複合材を作製し、横方向ヤング率の測定結果を今回の解析方法を用いた数値計算結果と比較した。実験に用いた複合材の繊維体積分率 (V_f) は、試料作成方法によって限定されるため、 V_f による弾性率の変化を実験的に明らかにす

ることはできなかった。しかし、測定した範囲内では、プリプレグより作製した試料の横方向ヤング率は完全接着の計算値とよい一致を示し、交織布より作製した試料では完全接着よりも界面すべりの計算結果に近い値を示した。これは、交織布では炭素繊維 3,000 本で1本の糸（経糸）を形成しており、このため PEEK の糸（緯糸）が融けたとき、繊維間への樹脂の含浸が不十分なためと考えられる。

以上の結果より本報告の界面すべりの解析法は、繊維/マトリクス界面の接着が不完全な場合、複合材の横方向弾性率を予測するために実用的な方法といえる。

参 考 文 献

- 1) 高橋清久, 久山徹也: 日本複合材料学会誌, 15 (1989), 78-84.
- 2) 久山徹也, 金 雄二, 高橋清久: 日本複合材料学会誌, 15 (1989), 116-121.
- 3) Z. Hashin & B.W. Rosen: *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 31 (1964), 223-232; errata, 32 (1965), 219.
- 4) J.D. Eshelby: *Progress in Solid State Physics*, ed. by F. Seitz & D. Turnbull, Vol. 3, Academic Press, New York (1956), pp. 79-107.
- 5) Z. Hashin: *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 46 (1979), 543-550.