研究論文

多荷重条件下の積層材の強度最適化

福 永 久 雄*

(1990年3月14日受付)

Strength Optimization of Laminated Composites under Multiple Loading

H. FUKUNAGA*

(Received March 14, 1990)

The present paper deals with the strength optimization of laminated composites under multiple loading based upon a mathematical programming method. A method using the transformed design variables with respect to the layer angles is proposed. In order to reduce the non-linearity between the strength constraints and the layer angles, $\cos 2\theta$ or $\sin 2\theta$ is used as the design variable instead of using θ directly. It is shown through several numerical examples that the present method gives reliable optimal results which are less sensitive to initial values used in the optimization.

1. 序

複合材構造は層厚のみならず繊維角も設計できる設計自由度の大きな構造であり、最適設計の手法を用いて数値的に構造設計を行うのにきわめて適した構造でもある。最適設計の観点からは、大きく、強度最適化問題と剛性最適化問題に分類される。強度最適化問題は剛性最適化問題に比べ多数の制約条件を伴う問題であり、従来、全応力設計法や直接最適化法に基づく方法が提案されているが¹⁾、さらに、効率がよく安定した解法が要求されている。本論文では、強度最適化問題で繊維角を効率的に最適化する手法について検討する。

積層材の強度を最大とする積層構成を求める研究は、これまで、多数行われてきたが、ほとんどの研究は予め繊維角を指定して（たとえば、0/90/45/-45 材）その層厚を最適化するものである。層厚に加え繊維角を最適化する研究は少なく、繊維角が多い場合に適用可能な手法はごく限られている²⁻⁴⁾。

面内荷重を受ける積層板において、層厚の最適化に比べ繊維角の最適化はかなり困難であるが、その理由は、面内剛性特性は層厚の一次関数であるのに対し、繊維角については $\cos 2\theta$, $\cos 4\theta$, $\sin 2\theta$, $\sin 4\theta$ を含む複雑な

関数形をしていることにある。そのため、最適化において繊維角を直接に設計変数に用いると、しばしば、局所的な最適点で計算がストップし、初期値依存性の強い結果しか得られないことになる。

単一の面内荷重を受ける積層板の場合は、前報²⁾において、せん断荷重がゼロとなる主荷重方向のバランスト積層材について最適化する手法を提案した。バランスト材では、面内剛性は層厚の一次関数、繊維角については $x_i = \cos 2\theta_i$ を設計変数とすると x_i の二次関数で表示される。主荷重方向の利用とバランスト材に対する変換した設計変数の使用により、剛性と繊維角の非線形性の程度が非常に弱くなり、初期値にほとんど依存しない最適積層構成を求めることができた。しかし、主荷重方向を利用できるのは単一荷重の場合に限定され、多荷重条件では適用できない。

多荷重条件の場合の強度最適化の研究として、層厚と繊維角の最適化に対し、直接に繊維角を設計変数に用いて、Park³⁾ はコンプレックス法を、Watkins ら⁴⁾ は逐次線形計画法を適用している。また、Schmit ら⁵⁾ は、層厚を設計変数とする場合に、内接超球法を適用している。層厚最適化の場合は、層厚ゼロの層をうまく処理する必要²⁾があるにしても、適当な最適化手法を適用することにより、初期値依存性の少ない安定した最適解を得ることが可能である。しかし、層厚に加え繊維角を最適化する場合には、従来の研究におけるように、直接に繊維角を設計変数に用いて最適化しても、初期値依存性の少ない安定した最適解を得ることが難しい。

* 航空宇宙技術研究所機体部主任研究官 (181 三鷹市大沢 6-13-1)
Senior Researcher, Airframe Div., National Aerospace Laboratory, 6-13-1, Osawa, Mitaka 181, Japan

本報では、剛性と繊維角の非線形性を減少させるため、変換した設計変数を使用した多荷重条件下の強度最適化の手法を提案する。直接に繊維角を設計変数に用いるのではなく、 $\cos 2\theta$ か $\sin 2\theta$ を設計変数として積層材の強度最適化を行う。単一あるいは複数の面内荷重を受ける CFRP 積層材について、本手法の有効性を検討するとともに、いくつかの荷重条件のもとで最適な積層構成を調べる。

2. 最適設計問題の定式化

Fig.1 に示す面内荷重 (N_x, N_y, N_{xy}) を受ける積層板の強度制約条件下での最小重量設計問題を考える。強度基準として Tsai-Wu 則 ($F_{12}^* = -1/2$) を用い、複数の荷重条件が独立に働く多荷重条件下の問題とする。最適化問題の定式化は、単一荷重下での前報²⁾での定式化とほとんど同じであり次のように表示できる。

【目的関数】 $W = \sum_{i=1}^I h_i$ を最小

【制約条件】 $g_j = V_{kt} - 1 \leq 0 \quad (j=1, 2, \dots, KI)$

$$h_i L \leq h_i \leq h_i U \quad (i=1, 2, \dots, I) \quad (1)$$

【設計変数】 $h_i, \theta_i \quad (i=1, 2, \dots, I)$

ここで、 h_i, θ_i は i 番目層の層厚および繊維角であり、層厚に関しては上下限値が指定されているものとする。また、 V_{kt} は k ($k=1, 2, \dots, K$) 番目の荷重条件に対応する i 番目層の破損条件であり、Tsai-Wu 則では次式となる。

$$V_{kt} = F_{11}\sigma_L + F_{22}\sigma_T + F_{11}\sigma_L^2 + 2F_{12}\sigma_L\sigma_T + F_{22}\sigma_T^2 + F_{66}\tau_{LT}^2 \leq 1 \quad (2)$$

ここで、 $(\sigma_L, \sigma_T, \tau_{LT})$ は繊維方向座標における応力成分であり、制約条件数は層数と荷重条件数とを掛け合わせた KI 個である。

3. 繊維角に関する変換した設計変数

古典積層理論では、面内の合力-歪み関係は次式で示

Fig.1 Symmetric laminate under in-plane loading.

される。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (3)$$

ここで、 $(N_x, N_y, N_{xy})_k$ および $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})_k$ は、 k 番目 ($k=1, 2, \dots, K$) の荷重条件および対応する歪みである。歪みが求まれば各種の応力が求まり、(2)式により制約条件が計算できる。(3)式の面内剛性は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sum_{i=1}^I h_i [U_1 + U_2 \cos 2\theta_i + U_3 \cos 4\theta_i] \\ A_{22} &= \sum_{i=1}^I h_i [U_1 - U_2 \cos 2\theta_i + U_3 \cos 4\theta_i] \\ A_{12} &= \sum_{i=1}^I h_i [U_4 - U_3 \cos 4\theta_i] \\ A_{66} &= \sum_{i=1}^I h_i [U_5 - U_3 \cos 4\theta_i] \\ A_{16} &= \sum_{i=1}^I h_i [U_2/2 \sin 2\theta_i + U_3 \sin 4\theta_i] \\ A_{26} &= \sum_{i=1}^I h_i [U_2/2 \sin 2\theta_i - U_3 \sin 4\theta_i] \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 U_i は剛性に関する不変量である⁹⁾。

面内剛性 A_{ij} は、層厚に関しては一次関数であるが、繊維角に対しては $\cos 2\theta, \cos 4\theta, \sin 2\theta, \sin 4\theta$ からなる複雑な関数である。積層材の層厚に加え繊維角を最適化するとき、直接に繊維角を設計変数とすると、しばしば、局所的な最適点で計算がストップする。そのため、繊維角に対しては、適当な中間変数を導入して、剛性と繊維角との関係の非線形性の程度を下げ、局所的な最適点をできるだけ生じないような解法を必要とする。たとえば、積層パラメータ⁷⁾を中間的な設計変数として用いることができれば剛性と線形関係になる。一般的なアンバラスト積層材に対する積層パラメータと積層構成の関係はまだ未解決の問題であり、また、通常の破損規準は繊維角と直接に関係するため、強度最適化問題で積層パラメータを設計変数に用いることはできない。

単一荷重の場合は、前報²⁾で、せん断荷重がゼロとなる主荷重方向のバラスト材について最適化する手法を報告した。バラスト材では剛性特性において、 $A_{16} = A_{26} = 0$ となり、他の剛性成分は $\cos 2\theta$ と $\cos 4\theta$ のみの関数となるため、 $\cos 2\theta$ を設計変数にすれば $\cos 2\theta$ の二次関数で表示できることになる。この手法は単一荷重の場合は非常に有効な方法であるが、多荷重条件では主荷重方向が存在せず適用することができない。

本報では、繊維角の最適化に関し、中間的に $\cos 2\theta$

Fig.2 Region division and design variables.

か、 $\sin 2\theta$ を設計変数に用いる手法を提案する。 $\cos 2\theta$ を設計変数とすると、 θ の値により $\sin 2\theta$ の符号が変化する。そこで、Fig.2 に示すように、まず、繊維角の値により $\cos 2\theta$ か $\sin 2\theta$ の符号が変化しない各領域に分割する。たとえば、繊維角が 45° であるとき、その層は領域5に属する。領域5では $\cos 2\theta$ は θ の単調減少関数であり、 $\sin 2\theta$ は正の関数である。この領域では、 $x = \cos 2\theta$ を設計変数に用いることにする。同様に、領域4では $x = \sin 2\theta$ を設計変数とする。そのとき、

領域4:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \sin 2\theta_i, & \cos 2\theta_i &= \sqrt{1-x_i^2} \\ \cos 4\theta_i &= 1-2x_i^2, & \sin 4\theta_i &= 2x_i\sqrt{1-x_i^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

領域5:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \cos 2\theta_i, & \sin 2\theta_i &= \sqrt{1-x_i^2} \\ \cos 4\theta_i &= 2x_i^2-1, & \sin 4\theta_i &= 2x_i\sqrt{1-x_i^2} \end{aligned} \right\}$$

最適化過程で繊維角は異なる領域に移動することが考えられるが、繊維角が過度に隣接領域に移動すると数値的振動を起こしやすいので、収束特性の安定化を図るため move limit を設定する。Table 1 に変換した設計変数と move limit を示す。ここでは、move limit の範囲は $\Delta\theta = 7.5^\circ$ とする。

Fig.3 に最適化のフローチャートを示す。まず、繊維角の初期値に応じて、各層を領域1~7に割り当てる。た

Fig.3 Flow chart for the optimization.

たとえば、初期繊維角が $\theta_1/\theta_2/\theta_3/\theta_4 = 0/90/45/-45$ であるとき、 $\theta_1 \sim \theta_4$ は、それぞれ、領域4, 6, 5, 3に属する。そのとき、Table 1 に示す変換した設計変数、および、move limit を用いて最適化計算を行う。ここでは、ADS プログラム⁸⁾の許容方向法（一次元探索は黄金分割法）を用いる。最適化計算の後では、繊維角が元の領域と隣接する領域に移動することが考えられるので、最適化後の繊維角に応じて新たに設計変数と move limit を設定する。この反復計算を収束するまで繰り返す。

4. 数値計算例

数値計算に用いた炭素繊維/エポキシ材の材料定数を Table 2 に示す。以下の数値例では、まず、単一荷重の場合について前報で用いた手法との比較を行い、次に、多荷重条件下で層厚のみの最適化と繊維角も最適化した

Table 1 Transformed design variables and move limits.

Region	Design variables	Range of θ		Move limits	
		Lower θ_L	Upper θ_U	Lower	Upper
1	$\cos(2\theta)$	-157.5°	-112.5°	$\cos(2(\theta_U + \Delta\theta))$	$\cos(2(\theta_L - \Delta\theta))$
2	$\sin(2\theta)$	-112.5°	-67.5°	$\sin(2(\theta_U + \Delta\theta))$	$\sin(2(\theta_L - \Delta\theta))$
3	$\cos(2\theta)$	-67.5°	-22.5°	$\cos(2(\theta_L - \Delta\theta))$	$\cos(2(\theta_U + \Delta\theta))$
4	$\sin(2\theta)$	-22.5°	22.5°	$\sin(2(\theta_L - \Delta\theta))$	$\sin(2(\theta_U + \Delta\theta))$
5	$\cos(2\theta)$	22.5°	67.5°	$\cos(2(\theta_U + \Delta\theta))$	$\cos(2(\theta_L - \Delta\theta))$
6	$\sin(2\theta)$	67.5°	112.5°	$\sin(2(\theta_U + \Delta\theta))$	$\sin(2(\theta_L - \Delta\theta))$
7	$\cos(2\theta)$	112.5°	157.5°	$\cos(2(\theta_L - \Delta\theta))$	$\cos(2(\theta_U + \Delta\theta))$

Table 2 Material constants of graphite/epoxy composites.

$$E_L=142 \text{ GPa}, E_T=10.8 \text{ GPa}, G_{LT}=5.49 \text{ GPa}, \nu_L=0.3$$

$$F_L=1.568, F_L'=1.341, F_T=0.057, F_T'=0.212, F_{LT}=0.08 \text{ (GPa)}$$

場合の比較を示す。

4.1 単一荷重条件の場合

Table 3 に、8 種類の単一荷重条件の場合について、最小重量および最適な積層構成を示す。強度基準としては Tsai-Wu 則 ($F_{12}^*=-1/2$) を使用する。設計変数は $\theta_1/\theta_2/\theta_3/\theta_4$ 積層材の繊維角および層厚の計 8 個、制約条件数は各繊維角に対応する 4 個である。層厚の下限値として 0.01 を用いる。繊維角に対しては Table 1 に示す変換した設計変数を用い、Fig. 3 のフローチャートに従い収束するまで反復計算を行う。各荷重条件について、Table 3 脚注に示す 4 種類の初期値を用いる。また、Table 3 に、収束するまでの反復回数、および、最適解におけるアクティブ（クリティカル）な制約条件を合せ示す。

荷重条件 4 を除いては、各初期値に対して最終重量はほとんど同じ重量を与える。荷重条件 1 と 7 の場合は、前報²⁾で示したと同様に、同時破損積層構成が最適な積層構成を与える。同時破損積層の条件は、

$$\sum_{i=1}^4 h_i \cos 2\theta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^4 h_i \sin 2\theta_i = 0,$$

$$h_i \geq 0 \quad (6)$$

であり、荷重条件 1 と 7 の最適積層構成は (6) 式の関係を満たす。

荷重条件 2 と 8 では、初期値により、最適積層構成は異なるがほとんど同じ重量を与える。また、荷重条件 3, 5, 6 では、最適積層構成もほとんど同じ積層構成に収束する。一方、荷重条件 4 では、初期値により異なる局所最適点に達する。

本手法は、繊維角が異なる領域に変動することを考慮して、反復計算により繊維角の最適化を行っており、収束するまでに必要な反復回数は荷重条件により 1~4 回程度である。

次に、前報²⁾で提案した手法との比較を行う。Fig. 4 に各荷重条件に対する最終重量の比較を示す。ここで、次の 4 通りの方法を用いる。

- 1) 0/90/45/-45 材の層厚最適化 (層厚下限値 0)
- 2) 0/90/45/-45 材の層厚最適化 (層厚下限値 0.01)
- 3) $\theta_1/\theta_2/\theta_3/\theta_4$ 材の繊維角、層厚最適化 (本手法)
- 4) 主荷重方向における $(+\theta_1/+ \theta_2)$ バランス材の

Fig. 4 Comparison of final weights for the single loading case.

繊維角、層厚最適化

Fig. 4 において、■部は初期値による最小重量のばらつき（収束の不安定性）を示す。荷重条件 2 と 5 で、層厚に加え繊維角を最適化することの重要性が見られる。手法 3 と 4 はほとんど同じ重量を与えるが、手法 3 では反復計算を用いているのに対し、手法 4 では一回の最適化計算で済む。また、手法 3 の最適積層構成が若干の初期値依存性を示すのに対し、手法 4 は初期値依存性のない安定した収束特性を示す。このように、単一荷重の場合の繊維角最適化の方法としては、主荷重方向に座標変換してバランス材について最適化する方法がより優れている。

なお、荷重条件 2 で見られるように、手法 4 による重量は手法 3 による重量より少し大きい。このように、最適積層構成は主荷重方向におけるバランス材でないことがわかる。しかし、主荷重座標においては荷重は対称性を有しており、最適積層構成も対称性のあるバランス材のなかにあるものと考えられるが、この数値例は Tsai-Wu 則自体が保有する非対称性 (F_{12}^* がゼロでない性質) によるものと考えられる。

4.2 多荷重条件の場合

独立に複数の荷重が働く多荷重条件下での最小重量設計問題を考える。この場合は、主荷重方向が存在せず、前節での手法 4 は適用できない。ここでは、層厚の最適化の結果と本手法の比較を行う。荷重条件として、次の 3 通りのケースを取り上げる。

Table 3 Optimal laminate configurations of $(\theta_1)_{h_1}/(\theta_2)_{h_2}/(\theta_3)_{h_3}/(\theta_4)_{h_4}$ laminates (single loading).

(N_x, N_y, N_{xy})		Laminate configurations								$W = \sum h_i$	I.N.	Critical constraints
		θ_1 (deg.)	θ_2 (deg.)	θ_3 (deg.)	θ_4 (deg.)	h_1	h_2	h_3	h_4			
Case 1 (1, 1, 0)	1	13.3	-42.6	43.5	103.3	0.65	0.69	0.73	0.75	2.822	1	1, 2, 3, 4
	2	-2.9	-51.2	50.6	92.2	0.89	0.59	0.73	0.62	2.822	1	1, 2, 3, 4
	3	2.4	-39.4	38.9	87.2	0.62	0.73	0.59	0.89	2.822	1	1, 2, 3, 4
	4	-30.1	27.4	60.0	92.4	0.92	0.85	0.21	0.85	2.822	1	1, 2, 3, 4
Case 2 (1, 0, 1)	1	28.2	-37.5	28.2	86.3	0.09	0.74	2.26	0.01	3.096	2	2
	2	27.7	-37.2	28.1	86.0	0.01	0.74	2.34	0.01	3.096	3	2, 4
	3	27.8	-37.5	28.4	86.0	0.64	0.74	1.71	0.01	3.097	2	2, 4
	4	-22.3	35.5	35.5	100.1	0.01	1.94	0.40	0.75	3.096	2	1, 4
Case 3 (1, 1, 1)	1	45.0	43.7	45.1	45.1	0.01	0.01	1.25	0.01	1.276	4	1, 2, 3, 4
	2	43.4	-134.7	45.1	45.3	0.01	0.01	1.25	0.01	1.276	3	1, 2, 3, 4
	3	44.8	-133.4	44.9	46.6	0.01	0.01	1.25	0.01	1.276	4	1, 2, 3, 4
	4	43.5	43.9	48.9	48.9	0.01	1.02	0.24	0.01	1.279	3	1, 2, 3, 4
Case 4 (1, 1, 0.5)	1	16.3	16.3	75.0	77.2	0.97	0.16	0.01	1.03	2.162	4	1, 2, 4
	2	30.5	-81.2	30.5	98.8	0.62	0.25	1.06	0.46	2.389	2	1, 2, 3, 4
	3	10.7	10.7	72.3	72.3	0.85	0.15	0.34	0.83	2.172	3	1, 2, 3, 4
	4	-3.9	61.8	61.8	61.8	0.76	0.60	0.65	0.31	2.316	2	1, 2, 3, 4
Case 5 (1, 0, 0.5)	1	21.9	21.3	23.2	23.7	0.76	0.01	0.61	0.01	1.392	2	2, 4
	2	22.7	20.6	22.3	24.1	0.81	0.01	0.56	0.01	1.392	2	2, 4
	3	21.7	20.8	23.4	24.4	0.74	0.01	0.63	0.01	1.393	2	2, 4
	4	22.2	22.5	22.7	22.7	0.01	1.36	0.01	0.01	1.391	2	1, 2, 3, 4
Case 6 (1, -1, 0)	1	-0.1	-34.9	35.0	90.1	1.69	0.01	0.01	0.98	2.690	2	4
	2	0.8	-45.2	44.6	88.6	1.72	0.01	0.01	0.95	2.693	1	4
	3	-0.3	-36.0	37.6	90.5	1.70	0.01	0.01	0.97	2.691	1	4
	4	1.2	2.5	70.3	86.5	0.39	1.31	0.01	0.97	2.681	3	4
Case 7 (-1, -1, 0)	1	0.0	-45.0	45.0	90.0	0.19	0.19	0.19	0.19	0.757	1	1, 2, 3, 4
	2	-2.1	-47.4	48.0	91.6	0.21	0.17	0.20	0.17	0.757	1	1, 2, 3, 4
	3	1.6	-41.9	42.6	87.9	0.17	0.20	0.17	0.21	0.757	1	1, 2, 3, 4
	4	-30.7	28.4	59.9	91.6	0.25	0.24	0.04	0.24	0.757	1	1, 2, 3, 4
Case 8 (-1, -1, 0.5)	1	1.1	-45.0	39.3	88.9	0.14	0.44	0.01	0.15	0.746	1	2
	2	-3.2	-40.6	40.3	92.3	0.13	0.40	0.01	0.20	0.745	1	2
	3	0.4	-46.0	46.0	89.3	0.14	0.45	0.03	0.12	0.746	1	2
	4	-31.9	42.1	65.8	89.6	0.51	0.01	0.01	0.21	0.743	2	1, 4

* Lower bound : 0.01 for layer thicknesses.

** Initial points $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, h_1, h_2, h_3, h_4)$

1 - (0, -45, 45, 90, 1, 1, 1, 1), 2 - (0, -45, 45, 90, 2, 1, 2, 1), 3 - (0, -45, 45, 90, 1, 2, 1, 2),

4 - (-30, 30, 60, 90, 1, 1, 1, 1), θ_i (deg.).

*** I.N. -- Iteration number.

- (a) $(N_x, N_y, N_{xy}) = (1, 1, 1), (2, 1, 0), (0, 0, -1.5)$ また、次の3通りの方法を用いたときの最適解を比較する。
 (b) $(N_x, N_y, N_{xy}) = (2, 0.5, 1), (-1.5, 0.5, -1), (1, 0.5, 1.5)$ 1) 0/90/45/-45 材の層厚最適化 (層厚下限値 0)
 (c) $(N_x, N_y, N_{xy}) = (1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1)$ 2) 0/90/45/-45 材の層厚最適化 (層厚下限値 0.01)

Table 4 Optimal laminate configurations of 0/90/45/-45 laminates (multiple loading).

(N_x, N_y, N_{xy})		Thickness components				$W = \sum h_i$	Critical constraints (ki)
		h_0	h_{90}	h_{45}	h_{-45}		
Case 1 (1, 1, 1) (2, 1, 0) (0, 0, -1.5)	A1	0.65	0.00	2.42	2.00	5.066	14, 23, 33
	A2	0.65	0.00	2.42	2.00	5.062	14, 23, 33
	A3	0.65	0.00	2.42	2.00	5.063	14, 23, 33
	A4	0.65	0.00	2.42	2.00	5.062	14, 23, 33
	A5	0.65	0.00	2.42	2.00	5.062	14, 23, 33
	B1	1.11	0.01	2.37	1.96	5.458	14, 22, 33
	B2	1.11	0.01	2.37	1.96	5.458	14, 22, 33
	B3	1.11	0.01	2.37	1.96	5.458	14, 22, 33
	B4	1.11	0.01	2.37	1.96	5.458	14, 22, 33
	B5	1.11	0.01	2.37	1.96	5.458	14, 22, 33
	A1	1.36	1.27	3.05	0.96	6.629	12, 21, 34
	A2	1.36	1.26	3.05	0.96	6.629	12, 21, 34
	A3	1.33	1.33	3.13	0.85	6.628	12, 21, 34
	A4	1.38	1.23	3.00	1.03	6.633	12, 21, 34
	A5	1.36	1.26	3.05	0.96	6.630	12, 21, 34
Case 2 (2, 0.5, 1) (-1.5, 0.5, -1) (1, 0.5, 1.5)	B1	1.36	1.27	3.05	0.96	6.629	12, 21, 34
	B2	1.36	1.26	3.05	0.96	6.629	12, 21, 34
	B3	1.33	1.33	3.13	0.85	6.628	12, 21, 34
	B4	1.38	1.27	3.00	1.03	6.633	12, 21, 34
	B5	1.36	1.26	3.05	0.96	6.630	12, 21, 34
	A1	0.65	0.00	1.57	1.04	3.264	24, 34
	A2	0.65	0.00	1.56	1.05	3.262	24, 34
	A3	0.96	0.15	1.65	0.90	3.654	12, 22, 34
	A4	0.65	0.00	1.56	1.05	3.262	24, 34
	A5	0.96	0.15	1.63	0.92	3.653	12, 22, 34
	B1	0.96	0.15	1.61	0.93	3.653	12, 22, 34
	B2	0.96	0.15	1.63	0.92	3.653	12, 22, 34
	B3	0.96	0.15	1.63	0.92	3.653	12, 22, 34
	B4	0.96	0.15	1.60	0.95	3.656	12, 22, 34
	B5	0.96	0.15	1.63	0.92	3.653	12, 22, 34
Case 3 (1, 0, 0) (0, -1, 0) (0, 0, 1)	A1	0.65	0.00	1.57	1.04	3.264	24, 34
	A2	0.65	0.00	1.56	1.05	3.262	24, 34
	A3	0.96	0.15	1.65	0.90	3.654	12, 22, 34
	A4	0.65	0.00	1.56	1.05	3.262	24, 34
	A5	0.96	0.15	1.63	0.92	3.653	12, 22, 34
	B1	0.96	0.15	1.61	0.93	3.653	12, 22, 34
	B2	0.96	0.15	1.63	0.92	3.653	12, 22, 34
	B3	0.96	0.15	1.63	0.92	3.653	12, 22, 34
	B4	0.96	0.15	1.60	0.95	3.656	12, 22, 34
	B5	0.96	0.15	1.63	0.92	3.653	12, 22, 34
	A1	0.65	0.00	1.57	1.04	3.264	24, 34
	A2	0.65	0.00	1.56	1.05	3.262	24, 34
	A3	0.96	0.15	1.65	0.90	3.654	12, 22, 34
	A4	0.65	0.00	1.56	1.05	3.262	24, 34
	A5	0.96	0.15	1.63	0.92	3.653	12, 22, 34

* Lower bound : 0 (case A), 0.01 (case B).

** Initial points : 1 - (2, 2, 2, 2), 2 - (2, 1, 2, 1), 3 - (1, 2, 3, 4), 4 - (4, 3, 2, 1), 5 - (1, 3, 2, 4).

*** Critical constraints ki : k -loading number, i -layer number.

3) $\theta_1/\theta_2/\theta_3/\theta_4$ 材の繊維角, 層厚最適化 (本手法)

このとき, 設計変数の数は, それぞれ, 4, 4, 8 個であり, 制約条件数は, 12 個である.

(1) 0/90/45/-45 材

Table 4 に 0/90/45/-45 材の層厚最適化の結果を示す. 同表脚注に示す 5 通りの初期値および 2 通りの層厚の下限値 (A: 下限値 0, B: 下限値 0.01) を用いる. また, 同表に示すように, 最適結果でアクティブ (クリティカル) な制約条件を ki (k : 荷重番号, i : 層番号) で表す. 荷重条件 3A を除いては, 最終の重量および最適積層構成とも, 初期値にかかわらず同一の結果に収束する. 荷重条件 3A では, 初期値 A1, A2, A4 は大局的な最適値に収束し, 初期値 A3, A5 は局所的な最適値に到達する. 層厚の下限値が重量に及ぼす効果は, 荷重ケース 1 と 3 で表れるが, 前報²⁾ で求めた単一荷重の場合に比べその効果は小さい. これは, 相反する荷重条件が多くあるほど, 最適な積層構成が方向性のより少ない積層構成に近付いていくことによる.

(2) $\theta_1/\theta_2/\theta_3/\theta_4$ 材

Table 5 に変換した設計変数に基づく $\theta_1/\theta_2/\theta_3/\theta_4$ 材についての最適結果を示す. 最適計算は Fig. 3 に示す反

復計算に基づいており, 最適解を得るのに必要な反復回数も同表に示す. また, 用いた初期値は同表脚注に示す 4 通りであり, 層厚の下限値は 0.01 である. すべての荷重条件について, 異なる初期値から出発しても最終の重量はほぼ同じとなる. 最適な積層構成については, 荷重条件 2 では同一の積層構成に収束し, 荷重条件 1 では初期値 4 による結果だけが少し異なった積層構成を示す. また, 荷重条件 3 では, 初期値 1 と 3, 初期値 2 と 4 が, 二つの異なる積層構成に達する.

(3) 最小重量の比較

Fig. 5 に 3 通りの方法を用いた場合の最小重量の比較を示す. 図は初期値によるばらつきを示す. 層厚に加え繊維角を最適化する効果は荷重条件 2 に見られるが, 単一荷重の場合ほどは顕著でない.

5. 結 論

本論文では, 面内荷重を受ける積層材の強度最適化において, 繊維角に関して変換した設計変数を用いる手法を提案した. すなわち, 強度制約条件と繊維角の間の非線形性を減少させるため, 繊維角の値により各領域に分割し, 各領域で $\cos 2\theta$ か $\sin 2\theta$ を設計変数として用い

Table 5 Optimal laminate configurations of $(\theta_1)_{h_1}/(\theta_2)_{h_2}/(\theta_3)_{h_3}/(\theta_4)_{h_4}$ laminates (multiple loading).

(N_x, N_y, N_{xy})		Laminate configurations								$W = \sum h_i$	I.N.	Critical constraints (ki)
		θ_1 (deg.)	θ_2 (deg.)	θ_3 (deg.)	θ_4 (deg.)	h_1	h_2	h_3	h_4			
Case 1 (1, 1, 1) (2, 1, 0) (0, 0, -1.5)	1	-19.1	-45.9	42.5	134.1	0.70	1.50	2.59	0.19	4.976	2	11, 12, 14, 22, 23, 24, 33
	2	-19.2	-45.8	42.5	134.2	0.70	1.62	2.59	0.07	4.976	2	11, 12, 14, 22, 23, 24, 33
	3	-19.3	-45.8	42.5	42.5	0.70	1.69	1.87	0.72	4.976	5	11, 12, 22, 23, 24, 33, 34
	4	-41.6	-0.9	43.8	135.3	2.08	0.40	2.54	0.01	5.018	3	11, 23, 33
Case 2 (2, 0.5, 1) (-1.5, 0.5, -1) (1, 0.5, 1.5)	1	-1.6	-77.2	36.9	85.9	0.90	1.23	3.10	0.01	5.236	2	12, 21, 23, 31, 32
	2	-1.7	-77.1	36.9	89.8	0.90	1.23	3.10	0.01	5.236	2	12, 21, 23, 31, 32
	3	-1.7	-77.1	36.9	74.5	0.90	1.23	3.10	0.01	5.236	3	12, 21, 23, 31, 32
	4	-1.7	37.0	37.0	102.9	0.91	2.83	0.26	1.24	5.233	2	14, 21, 22, 23, 31, 34
Case 3 (1, 0, 0) (0, -1, 0) (0, 0, 1)	1	10.8	-42.2	10.1	47.6	0.14	1.04	0.54	1.49	3.209	3	14, 22, 24, 32
	2	11.0	-18.1	39.0	107.0	0.01	0.98	1.67	0.52	3.178	1	14, 24, 32, 34
	3	10.7	-42.2	10.2	47.6	0.16	1.04	0.52	1.49	3.209	3	14, 22, 24, 32
	4	-18.0	38.9	38.9	107.0	0.98	1.16	0.51	0.52	3.177	2	14, 24, 31, 34

* Lower bound : 0.01 for layer thicknesses.

** Initial points : $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, h_1, h_2, h_3, h_4)$

1—(0, -45, 45, 90, 1, 1, 1, 1), 2—(0, -45, 45, 90, 2, 1, 2, 1), 3—(0, -45, 45, 90, 1, 2, 1, 2),

4—(-30, 30, 60, 90, 1, 1, 1, 1), θ_1 (deg.).

*** I.N.—Iteration number.

**** Critical constraints ki : k —loading number, i —layer number.

Fig.5 Comparison of final weights for the multiple loading case.

る。この手法により、単一荷重条件の場合と多荷重条件の場合の強度最適化の数値例を示した。

単一荷重条件の場合は、前報で提案した主荷重方向におけるバランス材について最適化する手法が、本手法より優れている。一方、多荷重条件下では、本手法により繊維角と層厚の最適化を行い、層厚のみの最適化の場

合との比較を行った。本手法は、若干の初期値依存性を示すが、数回の反復回数で最適な積層構成を求めることができ、繊維角の最適化に対しかなり有効に機能する。

本研究に際し ADS プログラムを使わせて頂いた VMA エンジニアリング Vanderplaats 博士に感謝致します。

参 考 文 献

- 1) 福永久雄：日本複合材料学会誌，16 (1990)，75-82，115-122.
- 2) 福永久雄，G.N. Vanderplaats：日本複合材料学会誌，16 (1990)，102-109.
- 3) W.J. Park：J. Compos. Mater.，21 (1987)，532-535.
- 4) R.I. Watkins & A.J. Morris：Comp. Methods Appl. Mech. Eng.，60 (1987)，233-251.
- 5) L.A. Schmit & B. Farsi：Int. J. Numer. Methods Eng.，7 (1973)，519-536.
- 6) S.W. Tsai & H.T. Hahn：Introduction to Composite Materials, Technomic Publ., Westport (1980).
- 7) 福永久雄：日本複合材料学会誌，12 (1986)，65-72.
- 8) G.N. Vanderplaats & H. Sugimoto：Int. J. Comput. Struct.，24 (1986)，13-21.