研究論文

境界条件の自由な組合せを考慮した FRP 積層
長方形板の振動解析法

成 田 吉 弘*

(1991 年 8 月 28 日受付)

An Analytical Method for Vibration of Laminated
Composite Rectangular Plates Having Arbitrary
Combinations of Boundary Conditions

Y. NARITA*

(Received August 28, 1991)

This work presents a method of analysis for solving the free vibration of symmetrically laminated composite rectangular plates having any combination of free, simply supported and clamped edges along four sides. This approach uses a Ritz method for the energy functional, and trial functions used for deflections are introduced so as to automatically include geometric boundary conditions for a prescribed boundary. A computer code was developed to calculate natural frequencies and mode shapes for the problem, and was used to demonstrate the effectiveness and accuracy of the present approach.

1. 緒 言

ブリブリを重ね熱処理で成型する等の方法で製造される繊維強化プラスチック (FRP) 積層板は、その高い比強度と比剛性により構造物の軽量化に大きく貢献している。この積層構造は繊維による強い異方性を示すため、従来の等方性体と異なる固有振動数、振動モード、応答性を持ち、構造設計に際しても動特性の考慮が必要となる場合が多い。

基本的な構造要素の形態である長方形板の振動については、等方性板に関し従来から多くの文献が見うけられる¹⁻⁴⁾。積層板を含む異方性長方形板では、周辺が自由⁵⁾、単純支持⁶⁻⁸⁾、固定⁹⁾、片持ち¹⁰⁻¹²⁾の各支持条件を扱った研究がある。しかし FRP 積層長方形板に関しては、

- ①FRP 材料の材料定数
- ②積層の状態 (積層数、各層の繊維角度)
- ③長方形板の寸法 (辺長比、板厚)

④長方形板における 4 辺の境界条件の組合せ

の多くのパラメータがあり、その組合せの多さから、振動数データを集積する設計ハンドブック的な扱いは実際上困難である。したがって必要に応じて、上記のパラメータを入力として計算を行えることが、実用的観点から重要である。有限要素法による定式化¹³⁾は形状の変化には有効であるが、長方形などの基本形状に対しては計算時間、精度などで不利である。

本研究では、上記の①～④の条件を入力データとする簡便で境界条件に関して汎用性のある解析方法を提案する。そこでエネルギー原理に基づき、領域全体の変位関数系を用いる Ritz 法により解析する。平板の振動問題に適用される Ritz 法では多くの場合、変位表現に「はり関数」を使っていた。このため境界条件の組合せごとに異なる三角関数を使う必要があり、支持条件の自由な組合せの計算に同一のプログラムを用いることは実際上困難であった。これに対し本研究では、与えられた支持条件に対応して (幾何的) 境界条件を自動的に満たす二重べき級数を用いる。これにより入力データとして規定された境界の組合せに対して、簡単な単一の積分サブルーチンで処理が可能となった。本手法の有効性を示すため、前述の①～④を入力データとする固有振動数、振動モー

* 北海道工業大学機械工学科教授 (006 札幌市手稲区前田 7 条 15 丁目)

Professor, Department of Mechanical Engineering, Hokkaido Institute of Technology, Teine Maeda 7-15, Sapporo 006, Japan

Fig. 1 Laminated rectangular plate, (a) Cross-section, (b) Coordinate convention, (c) Notation for boundary conditions.

ド計算プログラムを作成し、EWS 上で数値計算を行った。適用例では、いくつかの境界条件の組合せを持つ正方形板に対して固有振動数を求め、既知の結果と比較し、本解の精度を検証した。

2. 解析法

2.1 積層板の曲げ剛性

Fig.1(a) に与えた全体が L 層からなる積層構成の平板を考え、第 k 層上面への中央面からの距離を z_k 、 k 層の中間位置を $\bar{z}_k = (z_k + z_{k-1})/2$ 、全板厚を h とする。さらに Fig.1(b) に示す、各層の材料主軸 1 (繊維方向)、2 軸 (面内の繊維と直角方向) が x, y 軸と成す角度を θ_k とする。この場合、各層での応力-ひずみ関係は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (1)$$

となる。ただし、 $C_{11} = E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$ 、 $C_{22} = E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$ 、 $C_{12} = \nu_{12}C_{22} = \nu_{21}C_{11}$ 、 $C_{66} = G_{12}$ である (添字 k 略)。ここで E_1, E_2, G_{12} は、それぞれ第 k 層の 1 軸、2 軸方向の縦弾性係数およびせん断弾性係数、 ν_{12}, ν_{21} はポアソン比である。

いま問題を対称に積層された薄肉平板の微小振動に限定すると、板の面内と面外の変形は非連成化され、曲げ振動に関しては曲げ剛性 D_{ij} ($i, j=1, 2, 6$) を用いるだけで十分である。そこで、全板厚にわたる曲げ剛性

$$D_{ij} = (1/3) \sum_{k=1}^L Q_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (2)$$

さらに各層の厚さが等しい場合には

$$D_{ij} = (h/L) \sum_{k=1}^L Q_{ij}^{(k)} (z_k^2 + (h/L)^2/12) \quad (3)$$

を得る。ここで、 $Q_{ij}^{(k)}$ は各層の $C_{ij}^{(k)}$ が $x-y$ 座標に変換された値である^{14,15)}。

2.2 振動数方程式

曲げ剛性 D_{ij} を持つ薄い長方形板の自由振動を考え、Fig.1(b) に示す座標系をとり、その面外変位 (たわみ) $w(x, y, t)$ を

$$w(x, y, t) = W(x, y) \sin \omega t \quad (4)$$

(ω : 角振動数)

で表すと、平板内に貯えられる最大ひずみエネルギーは、曲率ベクトル

$$\{\kappa\} = \{W_{xx} \ W_{yy} \ 2W_{xy}\}^T \quad (5)$$

(添字は、 x, y に関する偏微分を示す)

を用いて

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \iint_A \{\kappa\}^T \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \{\kappa\} dA \quad (6)$$

となる。また最大運動エネルギーは、 ρ を単位面積当りの平均質量として

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \iint_A W^2 dA \quad (7)$$

となる。以上の式を、無次元長さ

$$\xi = x/(a/2), \quad \eta = y/(b/2) \quad (8)$$

を用いて表す。ここで変位を、各辺の幾何的境界条件を満足する ξ, η 方向の関数 $X_m(\xi), Y_n(\eta)$ の級数の積

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} X_m(\xi) Y_n(\eta) \quad (9)$$

(A_{mn} : 未定係数)

で表す。つぎに式 (9) を式 (5)~(8) に代入したのち、 A_{mn} に関して $T_{\max}, U_{\max}$ から作られる汎関数の極値を持つものを捜す。

$$\partial(T_{\max} - U_{\max}) / \partial A_{mn} = 0 \quad (10)$$

$$(m=0, 1, \dots, M; n=0, 1, \dots, N)$$

その結果、固有値 (無次元化された固有振動数) Ω を含む振動数方程式

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N [d_{11} I^{(2200)} + \alpha^2 d_{12} (I^{(2002)} + I^{(0220)}) \\ & + \alpha^4 d_{22} I^{(0022)} \\ & + 2\alpha d_{16} (I^{(2101)} + I^{(1210)}) \\ & + 2\alpha^3 d_{26} (I^{(0121)} + I^{(1012)}) \\ & + 4\alpha^2 d_{66} I^{(1111)} - \Omega^2 I^{(0000)}] m \bar{m} n \bar{n} \cdot A_{mn} = 0 \\ & (\bar{m}=0, 1, \dots, M; \bar{n}=0, 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (11)$$

を得る。ここで $I_{m \bar{m} n \bar{n}}^{(pqrs)}$ は、定積分

$$I_{m \bar{m} n \bar{n}}^{(pqrs)} = \phi_{m \bar{m}}^{(pq)} \cdot \phi_{n \bar{n}}^{(rs)} \quad (12)$$

ただし

$$\phi_{m\bar{m}}^{(pq)} = \int_{-1}^1 \partial \xi^{(p)} X_m / \partial \xi^{(p)} \cdot \partial \xi^{(q)} X_{\bar{m}} / \partial \xi^{(q)} d\xi \quad (13)$$

を表す。また $\alpha = a/b$ は辺長比, $d_{ij} = D_{ij}/D_0$ は剛性比,

$$\Omega = \omega a^2 (\rho/D_0)^{1/2} \quad (14)$$

は無次元化された固有振動数パラメータである。振動数 Ω の中の基準剛性には、積層角変化の影響を受けない、繊維方向の弾性係数 E_1 を基準とする

$$D_0 = E_1 h^3 / 12 (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \quad (15)$$

をとり比較を容易にした。式 (11) は、 A_{mn} に関する連立一次方程式であり、その係数行列の固有値 Ω を求める。本方法では、質量行列は密行列となるがコレスキー分解を利用し、容易に固有値計算ができる。

2.3 境界条件インデックスと変位関数

本方法の特長は、4 辺に境界条件の任意の組合せを許すところにある。このためには自由、単純支持、固定の境界条件を満たす変位関数 $X_m(\xi)$, $Y_n(\eta)$ を導入する必要がある。従来、リッツ法では、はり関数を用いることが多かったが、その場合境界条件ごとに 4 種の三角関数と剛体変位を表す関数が混在し、すべての境界条件の組合せに対し統一的に厳密に積分することは困難であった。そこで本方法では、以下に示す境界条件インデックスを持つ「べき関数」を導入する。

$$\begin{aligned} X_m(\xi) &= \xi^m (\xi+1)^{B_1} (\xi-1)^{B_3} \\ Y_n(\eta) &= \eta^n (\eta+1)^{B_2} (\eta-1)^{B_4} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで $B_1, \dots, B_4$ は、長方形板の辺の境界条件を示すインデックスであり、各辺において $B_i = 0$ (自由辺: F), 1 (単純支持辺: S), 2 (固定辺: C) を示す。例えば、Fig. 1(c) のような固定-単純支持-単純支持-自由 (以後、CSSF と表示) の境界条件を持つ長方形板を扱う場合、 $B_1=2, B_2=B_3=1, B_4=0$ と与える。関数 (16) とインデックス B_i を使用することで、各辺の幾何的境界条件は自動的に満足され、その長方形板に対し汎関数の極小化により固有値が得られる。

式 (16) を用いた場合の積分 $\phi_{m\bar{m}}^{(pq)}$ は

$$\begin{aligned} \phi_{m\bar{m}}^{(pq)} &= \sum_{k=0}^{B_1} \sum_{l=0}^{B_3} \sum_{\bar{k}=0}^{B_1} \sum_{\bar{l}=0}^{B_3} C_{B_1,k} C_{B_3,l} C_{B_1,\bar{k}} C_{B_3,\bar{l}} \\ &\times \frac{2(-1)^{l+\bar{l}} (M_k+p)! (M_{\bar{k}}+q)!}{M_k! M_{\bar{k}}! (M_k+M_{\bar{k}}+1)} \\ &= 0 \quad \text{for } M_k+M_{\bar{k}}=\text{even} \\ &= 0 \quad \text{for } M_k+M_{\bar{k}}=\text{odd} \end{aligned} \quad (17)$$

ただし、

$$C_{B_1,k} = B_1! / (k! (B_1-k)!) \quad (18)$$

$$M_k = m + k + l - p, \quad M_{\bar{k}} = \bar{m} + \bar{k} + \bar{l} - q$$

で与えられ、計算プログラムにおいて単一の積分ルーチンで任意の境界条件の組合せに対して定積分の評価が可能となる。

3. 応用例と考察

前章での解析に基づき、4 辺の境界条件の組合せに任意性を持ち、各層が等厚で単一材料から成る積層板の振動数・振動モード計算プログラムを作成した。これにより、①材料定数、②積層状態、③寸法、④境界条件の組合せ、を入力データとする計算が可能である。計算例では奇数の積層数を採用し、積層角度は単層板 ($L=1$) では θ , 三層板では $(\theta, -\theta, \theta)$ と表現した。材料定数は文献 15) より、強い異方性 ($E_1/E_2=15.4$) を示す

Graphite/epoxy (以後 G/E と略)

$$E_1 = 138 \text{ GPa}, \quad E_2 = 8.06 \text{ GPa},$$

$$G_{12} = 7.1 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.30$$

を用いた。また既知の振動数値と比較のため、異方性板の特別な場合である等方性板 ($\nu=0.3$ または $\nu=0.333$) も扱った。

固有振動数の計算に当たっては、変位関数 (9) に用いる級数を特定の項数で打ち切る必要がある。そこで全周が均一条件の FFFF (完全自由板), SSSS (全周単純支持板), CCCC (全周固定板) と、支持条件の混在した CSSF の 4 種類の条件を持つ正方形板 ($\alpha=1$) に対し、 $m \times n$ の項数を変化させた場合の、無次元化された固有振動数 $\Omega = \omega a^2 (\rho/D_0)^{1/2}$ の収束状況を調べた。

Table 1 は、 $m \times n = 4 \times 4, \dots, 10 \times 10$ の項数 (対応する式 (11) の行列次数は 16, $\dots$, 100) を採り計算した、基本次より 5 次までの結果 $\Omega_1 \sim \Omega_5$ を示す。積層構成は G/E の 3 層板 ($30^\circ, -30^\circ, 30^\circ$) とした。その結果、FFFF と CCCC において Ω_5 を除き、 $m \times n = 10 \times 10$ で 4 桁の精度で収束している。これは FFFF では自由端の力学的境界条件 (モーメント、せん断力共に 0) が完全べき級数により精度良く満足されていること、CCCC では境界条件インデックスの導入で二つの幾何的境界条件 (変位、勾配共に 0) が厳密に満足されたことによる。しかし幾何的 (変位 0) と力学的 (モーメント 0) 境界条件の両方を持つ SSSS において、全体的にやや収束が遅い結果となった。また 3 種の支持条件が混在した CSSF は、ほぼ SSSS と同様の収束状況を示した。しかしいずれも本方法では、有限要素法など他の数値的方法に比較して、小さい行列次数で格段に良い収束の早

Table 1 Convergence study of frequencies $\Omega_1 \sim \Omega_5$ of three-layered square plates (G/E material, $(30^\circ, -30^\circ, 30^\circ)$).

$m \times n$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
FFFF					
4×4	5.875	8.074	14.56	21.02	21.78
6×6	5.617	7.222	13.04	17.71	17.93
8×8	5.596	7.179	12.82	17.45	17.51
10×10	5.596	7.179	12.82	17.45	17.50
SSSS					
4×4	11.82	21.82	36.37	41.71	62.73
6×6	11.76	21.60	35.57	35.83	49.51
8×8	11.73	21.58	35.50	35.53	48.80
10×10	11.72	21.57	35.48	35.53	48.74
CCCC					
4×4	21.46	32.81	51.05	52.71	68.39
6×6	21.44	32.78	49.60	52.41	65.80
8×8	21.44	32.77	49.55	52.39	65.68
10×10	21.44	32.77	49.55	52.39	65.67
CSSF					
4×4	12.78	18.08	32.56	40.24	49.48
6×6	12.69	17.73	28.05	38.77	45.15
8×8	12.68	17.71	27.78	38.44	43.82
10×10	12.67	17.70	27.77	38.42	43.75

さを示している。これらの結果より、以降の計算例では 10×10 の項数を採用した。

Table 2(a) においては、等方性正方形板の既知の結果と比較を行った。ここでは、代表的な支持条件である FFFF, SSSS, CCCC, CFFF と、支持方法の混在する SCSF について計算した。このうち対辺が単純支持の SSSS と SCSF は、一方向に正弦波の変位を仮定して変数分離する Levy 型の厳密解が存在するが、本解は 6 桁でその結果に完全に一致している（表には 4 桁のみ示す）。また厳密解のない他の FFFF, CCCC, CFFF も、現在最も精度が良い解と思われる Gorman²⁻⁴⁾ の級数解ときわめて良い一致を示す。

同じく Table 2(b) に示す G/E 積層板においては、Levy 型の厳密解の存在する SSSS のクロスプライ板 ($0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$) の結果と本解は 4 桁で一致する。アングルプライ板 ($30^\circ, -30^\circ, 30^\circ$) では、本結果は文献 8) の値より全次数にわたり 1~2% の低い数値を与えている。文献 8) も Ritz 法に基づくが、幾何的境界条件を

Table 2 Comparison of frequencies $\Omega_1 \sim \Omega_5$ of isotropic and laminated G/E square plates.

	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
(a) Isotropic plate ($\nu=0.3$, *: $\nu=0.333$)					
FFFF*	13.17	19.22	24.42	34.23	34.23
Ref. 2)	13.17	19.22	24.42	34.23	34.23
SSSS	19.74	49.35	49.35	78.96	98.70
Exact ¹⁾	19.74	49.35	49.35	78.96	98.70
CCCC	35.99	73.39	73.39	108.2	131.6
Ref. 3)	35.98	73.40	73.40	108.2	131.6
CFFF*	3.460	8.358	21.09	27.06	30.56
Ref. 4)	3.459	8.356	21.09	27.06	30.55
SCSF	12.69	33.07	41.70	63.02	72.40
Exact ¹⁾	12.69	33.07	41.70	63.02	72.40
(b) Laminated G/E plate					
SSSS (Cross-ply: $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$)					
	11.29	18.55	33.06	40.11	45.16
Exact ⁸⁾	11.29	18.55	33.06	40.11	45.16
SSSS (Angle-ply: $(30^\circ, -30^\circ, 30^\circ)$)					
	11.72	21.57	35.48	35.53	48.74
Ref. 8)	11.97	21.97	35.88	36.04	49.60

満たす関数を使用した Ritz 法が常に解の上限値を与えることから、常に低い値の本解が高精度と判断される。すなわち Ritz 法により長方形平板の振動を解析する際は、等方性、異方性を問わずべき級数による変位表現が有効と考えられる。

Table 3 は本方法により計算した、36 通りの境界条件の組合せを持つ単層 ($\theta=0^\circ$) の正方形板の固有振動数 $\Omega_1 \sim \Omega_5$ を示す。一辺に 3 種の境界条件（自由、単純支持、固定）を考えると 4 辺では見掛け上 $3^4=81$ 通りの組合せとなる。しかし正方形板を回転させると一致する場合（例えば、CFFF と FFCF など）があり、それを考慮すると 36 通りの組合せですべての場合が求められる。等方性正方形板では 21 通りの組合せであるが¹⁾、異方性の存在により組合せ数が増える結果になっている。

Table 3 では同一の板とみなせる境界条件をまとめ、 Ω_1 の値の小さい順に並べた。ここで (1) FFFF は並進と x, y 軸回り回転の剛体運動のため $\Omega_1 \sim \Omega_3$ に対して、(2) FFFS, FSFF と (3) FFSF, SFFF は x または y 軸回りの回転のため Ω_1 において振動数 0 を与える。一

Table 3 Frequencies Ω_1 - Ω_5 of single-layered G/E orthotropic square plates (unidirectional fiber angle: 0°).

Boundary conditions	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
(1) FFFF	0	0	0	5.150	5.686
(2) FFFS, FSFF	0	2.512	3.919	8.697	12.71
(3) FFSF, SFFF	0	2.610	7.735	15.41	17.03
(4) FFFC, FCFF	0.895	2.978	5.604	10.10	15.69
(5) FFSS, FSSF, SFFS, SSFF	1.288	5.547	14.20	15.89	19.79
(6) FFSC, FCSF, SFFC, SCFF	1.778	7.043	15.97	17.05	20.67
(7) FSFS	2.509	5.518	10.04	14.02	22.60
(8) FSSS, SSFS	3.505	11.15	17.41	23.74	23.92
(9) FFCF, CFFF	3.514	4.740	9.116	18.35	22.02
(10) FFCS, FSCF, CFFS, CSFF	3.851	7.051	15.11	22.42	25.76
(11) FSFC, FCFS	3.922	6.547	12.71	16.29	25.12
(12) FFCC, FCCF, CFFC, CCFF	4.071	8.333	17.80	22.51	26.49
(13) FSSC, FCSS, SSFC, SCFS	4.724	13.68	17.86	25.51	27.56
(14) FSCS, CSFS	5.236	12.08	23.71	24.34	29.38
(15) FCFC	5.695	7.867	15.70	18.90	25.60
(16) FSCC, FCCS, CSFC, CCFS	6.147	14.47	24.06	28.09	30.74
(17) FCSC, SCFC	6.313	16.55	18.46	27.41	31.72
(18) FCCC, CCFC	7.450	17.22	24.52	32.19	32.37
(19) SFSF	9.859	10.98	15.20	24.04	38.26
(20) SFSS, SSSF	10.15	13.01	20.43	33.32	39.75
(21) SFSC, SCSF	10.26	13.95	22.73	37.04	39.80
(22) SSSS	11.29	17.13	28.69	40.74	45.16
(23) SSSC, SCSS	11.83	19.03	32.08	40.97	46.13
(24) SCSC	12.61	21.31	35.83	41.27	47.31
(25) SFCF, CFSF	15.41	16.27	19.67	27.41	40.74
(26) SFCS, SSCF, CFSS, CSSF	15.63	17.84	24.11	35.97	50.20
(27) SFCC, SCCF, CFSC, CCSF	15.71	18.57	26.12	39.47	50.24
(28) SSCS, CSSS	16.48	21.18	31.55	47.84	51.05
(29) SCCC, SCCS, CSSC, CCSS	16.87	22.77	34.68	51.24	52.46
(30) SCCC, CCSC	17.43	24.73	38.19	51.48	56.66
(31) CFCF	22.36	23.01	25.64	32.14	44.23
(32) CFCS, CSCF	22.53	24.20	29.27	39.77	56.45
(33) CFCC, CCCF	22.58	24.75	30.97	42.98	61.09
(34) CSCS	23.16	26.82	35.72	50.83	62.61
(35) CSCC, CCCS	23.44	28.10	38.52	55.21	62.77
(36) CCCC	23.85	29.72	41.73	59.97	62.98

般的に、周辺での拘束の度合が「自由→単純支持→固定」と増大するにつれ、 $\Omega_1 \sim \Omega_5$ は大きくなる。しかしその程度は、異方性の方向と拘束の大きい辺の配置により異なる。

例えば、等方性正方形板で同一の振動数値を与える (7) FSFS と (19) SFSF では、強辺（繊維）方向の対辺で支持する SFSF が Ω_1 について 4 倍近い値を与える。

Fig. 2 Effects of varying θ upon the frequencies Ω of G/E square plates, (a) Plate with Simply supported -Free -Simply supported -Free edges (SFSF plate), (b) Plate with Clamped -Simply supported -Free -Free edges (CSFF plate). (Solid lines: Single layer, Broken lines: Three layer.)

Fig. 3 Mode shapes and corresponding frequencies Ω of the three-layer graphite/epoxy (G/E) plates ($\theta, -\theta, \theta$) with SFSF boundary conditions.

る。

Fig. 2 は、(a)対辺が単純支持された SFSF と、(b)境界条件の混在した CSFF の正方形 G/E 板において、繊維角度 θ を $0^\circ \sim 90^\circ$ に変化させた場合の振動数の挙動を表す。図中の実線は単層 (θ)、破線は三層 ($\theta, -\theta, \theta$) の振動数を示す。両方の正方形板ともに基本振動数 Ω_1 では層数による差異はないが、二次以上の振動数では三層板がより大きい振動数を与え、境界条件、モード次数により特定の θ で最大の差異を持つ。

(a)対辺が単純支持された SFSF 板では、単層では $\theta = 60^\circ$ 、三層板では $\theta = 55^\circ$ 付近で、3 次と 4 次のモードが交わる。片持 (CFFF) 板では振動数が接近したあと離れていく現象 (curve veering) がよく見られるが¹²⁾、SFSF 板では交差している。(b)CSFF 板では、こうした現象は見られず、全体になめらかな変化を示す。

Fig. 3 は、SFSF の境界条件を持つ三層正方形板 ($\theta, -\theta, \theta$) において、 $\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ のときの振動モード形を与える。これらに対応する固有振動数は、Fig. 2(a) の図中の $\bigcirc$ に示した。モード図中の太い実線は変位 0 の節線を示し、他の細線は $\bullet$ 点における最大変位の 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 倍の等振幅線を表す。各図では、1 次モードは節線がなく θ に対しわずかな変位分布の変化を示し、2 次モードは θ により節線の傾斜が異なる。3 次、4 次モードは前述したように $\theta = 45^\circ$ と 65° の間で順番が入れ替わっている。

4. む す び

境界条件の任意の組合せを考慮した複合材積層長方形板の振動解析法を提案した。

(1) このため古典積層理論により積層板の等価曲げ剛性を求め、異方性薄板理論に基づきひずみエネルギーを導いた。これと運動エネルギーから作られる汎関数を、変位関数中の未定係数により極小化し振動数方程式を求めた。

(2) 長方形板の 4 辺の境界条件を入力値として扱うため、境界条件インデックスの考え方を導入した。このインデックス B_i ($=0$: 自由辺, 1 : 単純支持辺, 2 : 固定辺, を表す) に対応して幾何的境界条件を自動的に満たす変位関数を提案した。

(3) 以上の理論的方法を用いて、材料定数、積層状態 (積層数、繊維角度)、寸法、境界条件の組合せを入力データとする、対称積層長方形板の固有振動数、振動モードの計算プログラムを作成した。とくに(2)で提案したインデックスと変位関数の使用により、単一の積分ルーチ

ンで振動数方程式の積分が統一的に計算可能となった。

(4) 数値計算において、Graphite/epoxy 材から成る積層板につき固有振動数の収束状況を調べ、多くの場合に高次振動数にわたるまで 4 桁の収束を得た。また等方性板と積層板の既知の結果と比較し、きわめてよい一致をみた。以上の検証から、本解の精度と方法の有効性が明らかとなった。

参 考 文 献

- 1) A.W. Leissa : *J. Sound & Vib.*, **31** (1973), 257-293.
- 2) D.J. Gorman : *J. Sound & Vib.*, **57** (1978), 437-447.
- 3) D.J. Gorman : *J. Appl. Mech.*, **44** (1977), 743-749.
- 4) D.J. Gorman : *J. Sound & Vib.*, **49** (1976), 453-467.
- 5) K.S. Sivakumaran : *J. Sound & Vib.*, **125** (1988), 211-225.
- 6) D. Mohan & H.B. Kingsbury : *J. Acoust. Soc. Am.*, **50** (1971), 266-269.
- 7) P.S. Nair & S. Durvasula : *J. Acoust. Soc. Am.*, **55** (1974), 998-1002.
- 8) A.W. Leissa & Y. Narita : *Compo. Struct.*, **12** (1989), 113-132.
- 9) M.J. Maurizi & P.A. Laura : *J. Sound & Vib.*, **26** (1973), 299-305.
- 10) E.F. Crawley & J. Dugundji : *J. Sound & Vib.*, **72** (1980), 1-10.
- 11) D.W. Jensen & E.F. Crawley : *AIAA J.*, **22** (1984), 415-420.
- 12) Y. Narita & A.W. Leissa : *J. Sound & Vib.* (to appear).
- 13) 鈴木浩平, 松本金矢, 座古 勝 : 日本機械学会論文集, **55**, 551C (1989), 533-539.
- 14) R.M. Jones : *Mechanics of Composite Materials*, Scripta, Washington D.C. (1975).
- 15) J.R. Vinson & R.L. Sierakowski : *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, Martinus Nijhoff, Dordrecht (1986).

付 録

論文中の Tables 1, 2 において、本方法による正方形板の固有振動数の収束状況を調べ、厳密解、他の著者の数値例との比較を行った。本法は互いに独立性の低い変位関数列を用いているため、長方形板構造としての一般的な辺長比 (例えば、 $1/3 < a/b < 3$) から離れるに伴い、解析精度が落ちる可能性が考えられる。また本論文の数値例は、すべて倍精度演算により得られた結果であるが、本法はパソコンでも計算可能な小規模な演算に一つ

Table A-1 Comparison of frequencies Ω_1 - Ω_5 for cross-ply G/E rectangular plates with large aspect ratio (SSSS, three layer (0° , 90° , 0°), () : Exact solution).

	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
(a) $a/b=10$	<u>315.35168434</u> (315.35184945)	<u>328.59596985</u> 328.59480948	<u>354.89250195</u> 354.89280844	<u>398.76459740</u> 398.76308040	<u>464.45043366</u> 463.74864388)
(b) $a/b=15$	<u>704.55293549</u> (704.55301438)	<u>716.81375324</u> 716.81185989	<u>739.33711969</u> 739.33832133	<u>774.88111289</u> 774.88245439	<u>827.02433259</u> 826.54898594)

Table A-2 Comparison of frequencies Ω_1 - Ω_5 for cross-ply G/E square plates obtained by using double and single precision (SSSS, three layer (0° , 90° , 0°), () : Single precision).

$m \times n$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
4×4	<u>11.29250804</u> (11.29250717)	<u>18.58988973</u> 18.58977699	40.27467507 40.27458954	<u>45.32383569</u> 45.32390976	<u>45.49066445</u> 45.49063492)
6×6	<u>11.28971891</u> (11.28971863)	<u>18.55010605</u> 18.55048180	<u>33.48840419</u> 33.48846054	<u>40.11507157</u> 40.11481476	<u>45.15956271</u> 45.15958786)
8×8	<u>11.28971086</u> (11.28971291)	<u>18.54994777</u> 18.54853630	<u>33.06798748</u> 33.06924057	<u>40.11438468</u> 40.11204529	<u>45.15886901</u> 45.15972519)
10×10	<u>11.28972907</u> (11.28971291)	<u>18.54994015</u> 18.54853630	<u>33.06199866</u> 33.06924057	<u>40.11439184</u> 40.11204529	<u>45.15887325</u> 45.15972519)
Exact	11.28971701 (11.28971672)	18.54994576 18.54994583	33.06195944 33.06195831	40.11438400 40.11438370	45.15886804 45.15886688)

の特色があり、単精度でも結果の精度が保証されることが望ましい。そこで付録では、これらの点について数値実験による検証を行った。

A-1. 辺長比が大きい場合の解の収束について

Table A-1 は、クロスプライ積層板がかなり大きい辺長比 ($a/b=10, 15$) を持つ場合の固有振動数 $\Omega_1 \sim \Omega_5$ を示す。境界条件は全周単純支持とし、G/E 材の3層のクロスプライ積層 ($0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$) とした。この積層板に対しては厳密解が存在するため、その数値を () に与え、本結果と厳密解が一致した桁をアンダーラインで示した。その結果、4次の高次に至るまで厳密解と5桁で一致しており、本解析法は大きい辺長比に対してもかなり有効であることがわかる。

A-2. 単精度演算による解の精度について

Table A-2 は、全周単純支持の3層クロスプライ ($0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$) G/E 正方形板の固有振動数 $\Omega_1 \sim \Omega_5$ について、すべて単精度の演算で行った結果と倍精度演算の数値を比較している。() 内に示す数値は単精度、それ以外は倍精度演算による結果を与える。 $m \times n$ は、変位関数 (9) で用いる項数、アンダーラインを付した桁は倍精度、単精度演算による結果が、それぞれの精度による厳密解と一致した桁を示す。8×8以上の項数を採用した場合には、単精度でも基本振動数で7桁、さらに5次振動数に到るまで4桁で一致している。したがって本方法は単精度演算でも実用上、十分な精度の結果を与えている。