複合材料講座

複合材料力学入門 第2章 複合材料の弾性・非弾性挙動

石川 隆 司*

1. 複合材料の弾性特性の特徴—異方性

本講座は、主な専攻が機械工学系でない読者に、できるだけ平易に、複合材料の力学について親しんでいたかという大きな前提の下に始まった。しかし、第1章で福田博先生の懇切な説明¹⁾を戴いても、本章あたりから、複合材特有の分りにくさが時々顔を出すことになり、これをいかに噛み砕いて説明するか、著者には少し荷が勝ちすぎるかと思われるが、最大の努力をしてみた。

複合材料の力学の最大の特徴は、弾性の性質が方向により異なることであり、これを異方性弾性、略して単に異方性と呼ぶ。この他複合材には、微視的に繊維と母材を区別して考えなければならない非均質性や層と層の性質の違いに起因する非均質性があるが、本章では前者は無視し、後者は次章の積層板理論で少し説明される。

まず、図1のような一方向に繊維を並べて樹脂を含浸した一方向材を考える。応力と歪みの一次元的な比例関係式が第1章(3)式に与えられているが、ここでは、これを平面(2次元)に拡張し、異方性、正確に言えば直交異方性という条件下でどうなるかを考察する。繊維の方向に座標系1、直角方向に2をとる。回転角 θ のことは後述する。第1章(3)式の形よりも、歪みを応力で表す形のほうが説明し易いので、ここでは次式から始める。

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

このように添字が出てくると拒否反応を示される方もあるかもしれないが、簡単なことなので我慢して慣れて戴きたい。以下に説明すると、1は繊維方向でL、2は垂直方向でTと書かれることも多い。 ϵ_1 は1方向の伸び歪みを表し σ_1 は1方向の垂直(引張り/圧縮)応力で σ_{11} と

いう表記もある。 σ_6 はこの面でのせん断応力で、伝統的には τ_{12} と書かれている。なお、歪みはテンソルで書く拒否反応を助長する面もあるので(本当はそのほうが簡潔だが)、多くの習慣に従い、工学表記を採用している。

S_{ij} (S_{11} , S_{12} , ... を総称してこう書く。これをコンプライアンス係数と呼ぶ)が第1章で説明したヤング率、ポアソン比とどのような関係になるかを考える。第1章(3)式の逆の関係を繊維方向について書くと

$$\epsilon_1 = \sigma_1 / E_1 \quad (2)$$

となる。ところが、既に説明があったように2方向の引張り応力によって1方向へ収縮するポアソン効果により

$$\epsilon_1 = -\nu_{21} \cdot \sigma_2 / E_2 \quad (3)$$

いう歪みも存在する。ここで ν_{21} は異方性のポアソン比であり、等方性の場合と異なり、常に方向に注意をする必要がある。また添字の付け方にも注意の必要があり、ここでは先の2は応力の、後の1は歪みの方向という付け方を採用する。教科書によっては逆の流儀もあるので注意を要する。次に大切なことは、繊維/直角方向を考えている場合は、せん断応力 σ_6 により1方向の歪みは生じないことである。従って1方向の歪みは(2)、(3)式の和

$$\epsilon_1 = \sigma_1 / E_1 - \sigma_2 \cdot \nu_{21} / E_2 \quad (4)$$

となり、これと(1)式を比べることにより S_{ij} の具体的な値がわかる。実際に書いてみると

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$i, j=1, 2, 6$

となる。ここで S_{66} は面内の繊維に沿うせん断弾性係数 $G_{12}=G_{LT}$ の逆数で表されていることに注意すべきである。また、このような係数の対称性を示す次式が成立し、これを相反定理と呼んでいる。

$$\nu_{21}/E_2 = \nu_{12}/E_1 \quad (6)$$

一次元問題なら(2)式の逆関係である次式が成立するが

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon_1 \quad (7)$$

* Takashi ISHIKAWA: 航空宇宙技術研究所機体部複合材構造研究室長 (181 三鷹市大沢 6-13-1)

図1 一方向強化材と座標系

2次元問題では(5)式のように行列となっているので、この逆行列を取る必要がある。 S_{ij} は下のような形となっているので逆行列を簡単に計算することができる。

$$\begin{bmatrix} \# & \$ & 0 \\ \$ & \& & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \quad (8)$$

これを reduced stiffness (縮約剛性係数) と呼ぶ²⁾。 Q_{ij} は応力が歪みで表される時の係数であるから、具体的に書き下すと次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ここで、 Q_{ij} の実際の形は、

$$Q_{11} = S_{22} / (S_{11}S_{22} - S_{12}^2), \dots \quad (10)$$

となることを思い出せば、以下のように書かれる。

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{12} &= \nu_{12}E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ &= \nu_{21}E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{22} &= E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}), \quad Q_{66} = G_{12} \end{aligned} \quad (11)$$

Q_{ij} を縮約剛性と呼ぶのは、(5)式相当の形を3次元物体に対して考え、その逆である剛性係数 C_{ij} と Q_{ij} は少し異なるので、それを区別するためと理解される。

また、(5)あるいは(9)、(11)式において、独立な弾性係数は4個であり、 E_1 等を用いた場合は、 E_1 、 ν_{12} 、 E_2 、 G_{12} はそれぞれ独立である。 Q_{ij} で見れば、 Q_{11} 、 Q_{12} 、 Q_{22} 、 Q_{66} が独立と言ってもよい。等方性の場合と比較して見ると、せん断弾性係数 G についてヤング率とポアソン比からこれを表す次の関係が成立して、独立な係数

$$G = E / \{2(1 + \nu)\} \quad (12)$$

は2つとなっていることと大きな違いがある。

2. 直交異方性弾性係数の回転に対する変換公式

前節までは繊維方向とそれに直角方向に固定した1, 2座標系での特性に着目して議論を進めた。この時を異方性の弾性主軸方向の特性と呼び、特徴は上記のようにせ

ん断応力からはせん断歪みだけが生じることである。

本節では、図1に示すように、それから $+\theta$ だけ回転した x, y 座標系での弾性係数がどのように書かれるかについて考える。元の1, 2座標系の応力で新しい x, y 座標系の応力を表す変換式は次のようになる。まず、 $\cos \theta = l$ 、 $\sin \theta = m$ と書いて、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 2lm \\ m^2 & l^2 & -2lm \\ -lm & lm & l^2 - m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = [T(\sigma)] \{\sigma_i\} \quad (13)$$

この式はどの固体力学の教科書にもある基本であり、ここでは、まずこれを容認して戴きたい。それでは不満な読者の方への一番簡単な説明は、応力がテンソルであることを証明した上で、テンソルの変換公式へ実際の方向余弦を代入したものと理解するというところであろう。余談ながらここで注意すべき事実は、米国学部学生への複合材力学の標準的教科書である文献2)では、図1に相当する図の回転角の正負が適当でなく、少なくとも図と式が一致していないという誤りがあったことである。新版では訂正済みかもしれないが、敢えて述べておく。

歪みの変換式は、本講ではテンソルでなく工学歪みを使用していることを思い起こせば、次式のようにになる。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & lm \\ m^2 & l^2 & -lm \\ -2lm & 2lm & l^2 - m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = [T(\varepsilon)] \{\varepsilon_i\} \quad (14)$$

後の議論に必要なになるので、(13)、(14)式の逆の関係、すなわち1, 2座標系の量を x, y 座標系で表すのはどのような式になるかを考察する。逆関係なので(13)、(14)式の逆行列を正直に計算してもよいが、図1の幾何的考察から、 x, y 系から1, 2系への回転角は $-\theta$ であるから、(13)、(14)式に $-\theta$ を代入すればこれらが求まる。具体的には m の奇数次の項のみ符号が逆になる。これをそれぞれ、 $[T(\sigma)]^{-1}$ 、 $[T(\varepsilon)]^{-1}$ と表すことにする。

以上の準備が整ったので、 x, y 系での弾性係数 $\overline{Q}_{ij}$ がどのようなか考察する。ここで上線は変換後の量を意味する。まず、(13)式を一度書き、(9)式を適用する。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [T(\sigma)] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = [T(\sigma)] [\overline{Q}_{ij}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

ここで、(14)式の逆の関係である次式を最右辺に代入する。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = [T(\varepsilon)]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

そうすると、 $\sigma_x \dots$ を $\varepsilon_x \dots$ で表す式の係数として、次式

$$\overline{Q_{ij}} = [T(\sigma)][Q_{ij}][T(\varepsilon)]^{-1} \quad (17)$$

が得られた。ここで、この具体的な形を求めるために、(17)式の下線点線部を TQ_{ij} とおいて計算を実行し、結果を示してみよう。これは(9)×(13)式という3×3行列の積だから、

$$TQ_{ij} = \begin{bmatrix} l^2 Q_{11} + m^2 Q_{12} & l^2 Q_{12} + m^2 Q_{22} & 2lmQ_{66} \\ m^2 Q_{11} + l^2 Q_{12} & m^2 Q_{12} + l^2 Q_{22} & -2lmQ_{66} \\ lm(Q_{12} - Q_{11}) & lm(Q_{22} - Q_{12}) & (l^2 - m^2)Q_{66} \end{bmatrix} \quad (18)$$

これに(14)式の m の1次の項の正負を変えたものを右から掛けると $\overline{Q_{ij}}$ の内容が定められる。一例として $\overline{Q_{11}}$ は

$$\overline{Q_{11}} = l^4 Q_{11} + 2l^2 m^2 Q_{12} + m^4 Q_{22} + 4l^2 m^2 Q_{66} \quad (19)$$

となる。これを他の項についても実行すれば、 $\overline{Q_{ij}}$ が求められる。これを書き下せば次のようになる。

$$\overline{Q_{12}} = l^2 m^2 (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) + (l^4 + m^4) Q_{12} \quad (20)$$

$$\overline{Q_{22}} = m^4 Q_{11} + 2l^2 m^2 Q_{12} + l^4 Q_{22} + 4l^2 m^2 Q_{66} \quad (21)$$

$$\overline{Q_{66}} = l^2 m^2 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}) + (l^2 - m^2)^2 Q_{66} \quad (22)$$

$$\overline{Q_{16}} = l^3 m (2Q_{66} - Q_{11} + Q_{12}) - lm^3 (2Q_{66} - Q_{22} + Q_{12}) \quad (23)$$

$$\overline{Q_{26}} = lm^3 (2Q_{66} - Q_{11} + Q_{12}) - l^3 m (2Q_{66} - Q_{22} + Q_{12}) \quad (24)$$

(15)式でなく(14)式から出発し、(5)式を用いれば、 S_{ij} の変換式が得られるが、ここでの記述は省略する。

我が国の過去の教科書、例えば文献3)では、変換式の記述はここで止っていた。しかし、最近ではこの形で放置せずに、Fourier級数的な考え方と弾性不変量を導入して、これらを書換えることが普通である。 $\cos \theta$, $\sin \theta$ のべき乗についての以下のような三角関数の性質を利用すると

$$\cos^4 \theta = 3/8 + 1/2 \cdot \cos 2\theta + 1/8 \cdot \cos 4\theta, \dots \quad (25)$$

例えば(19)式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \overline{Q_{11}} &= \{3/8 \cdot Q_{11} + (Q_{12} + 2Q_{66})/4 + 3/8 \cdot Q_{22}\} \\ &\quad + (Q_{11} - Q_{22})/2 \cdot \cos 2\theta + \{1/8 \cdot Q_{11} \\ &\quad - (Q_{12} + 2Q_{66})/4 + 1/8 \cdot Q_{22}\} \cdot \cos 4\theta \\ &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \end{aligned} \quad (26)$$

ここで $U_1 \sim U_3$ は定数、 $\cos 2\theta$, $\cos 4\theta$ の係数で、弾性不変量として定義される。(20)式以下についても同様にし

$$\begin{aligned} \overline{Q_{12}} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta, \quad \overline{Q_{66}} = U_5 - U_3 \cos 4\theta \\ \overline{Q_{22}} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\ \overline{Q_{16}} &= -1/2 \cdot U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta \\ \overline{Q_{26}} &= -1/2 \cdot U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta \end{aligned} \quad (27)$$

ここで U_1 , U_2 , U_3 は(26)式から明らかであり、 U_4 , U_5 は

$$\begin{aligned} U_4 &= (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66})/8 \\ U_5 &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66})/8 \end{aligned} \quad (28)$$

である。これで $\overline{Q_{ij}}$ の弾性不変量を用いた表記が分った。

このようにして得られた θ 方向 (off-axis) の弾性係数の特徴は、(27)式から明らかのように一般の θ では $\overline{Q_{16}} \neq 0$, $\overline{Q_{26}} \neq 0$ となることである。この時、図1の板は引張り力によりせん断変形を生ずる。これを面内カップリング状態と呼ぶ。このことは複合材の力学を考える際に変重要で、次節の弾性係数測定に関する議論の伏線ともなっている。

3. 直交異方性弾性の例示としての弾性係数測定法

前節までに述べてきた直交異方性の弾性特性を理解するよい練習問題として、また実用的にこれを測定する必要があるという背景から、本節の議論は重要である。まず、繊維方向と直角方向のヤング率・ポアソン比の測定は容易である。図2のように、それぞれの方向の試験片を母板から切出して、これに歪みゲージあるいは伸び計を取り付けて試験機に装着する。これに負荷をして単軸引張り状態すなわち σ_1 のみ非零もしくは σ_2 のみ非零の状態を作り、荷重の測定値から応力を求め、(1), (5)式にあてはめて、 E_1 , E_2 , ν_{12} , (ν_{21}) を計算すればよい。本講では試験規格を議論する意図はないので、タブの有無、実際の荷重増加ステップなどの点は触れないが、一つだけ指摘しておきたいのは、歪みゲージを貼る場合には試験片反りのキャンセルのための表裏ゲージが不可欠

図2 繊維方向と直角方向の弾性係数測定

図3 セン断弾性係数を得るための繊維と45°の方向の弾性係数測定

ということである。表裏ゲージの平均をとるだけでデータの質が相当に改善されることは是非御記憶願いたい。

さて、一方向材の4つの独立な弾性係数のうちの3つは既知となったが、残る一つである G_{12} をどうして測定すればよいだろうか。一方向材薄肉円筒の振り試験は理想的だが、試験コストの点で非現実的である。これを解決する手段が、図3の45°方向試験片に対して計測したヤング率 E_{45} 、 ν_{45} と、等方性の場合と良く似た形の次式

$$G_{12} = E_{45} / \{2(1 + \nu_{45})\} \quad (29)$$

を用いることである。この式は S_{ij} の変換式を操作することによって簡単に得ることができる。注意すべきは、この式の右辺は45°方向の量、左辺は繊維方向固定座標系の量であること、この式は45°のみで成立つことである。標準的教科書である文献2)、3)には(29)式を用いた計算法は記載されておらず、代りに次式が記されている。

$$G_{12} = 1 / (4/E_{45} - 1/E_1 - 1/E_2 + 2\nu_{12}/E_1) \quad (30)$$

もちろんこの式を用いても G_{12} を求められるが、賢明な諸氏には既に御推察のように、(30)式には図2の2種類の試験片からの測定値も必要であり、複合材の弾性特性が体積含有率の関数であることから派生する弾性係数の変動も無視できない。この点、(29)式では、45°方向試験片のデータだけから G_{12} を得られる有利さがあり、断然優れているといえる。ただ、45°方向の引張り試験の実施に際しては、以下の事項に十分留意する必要がある。

留意事項とは、前節の末尾に述べたように、このような off-axis の試験での面内カップリング特性により、引張り応力によりせん断歪みが生ずることに起因する現象である。例えば無限に長い45°方向の板試験片を引張ると、図4(a)に示すように、 $\overline{S}_{16}$ に比例するせん断歪みを

図4 繊維から離れた方向 (off-axis) に引張った場合の一方向強化材の変形の特徴。(a) 無限に長く、一様な応力の生じている場合、(b) 末端があり、その回転が拘束されている場合

生ずる。ところが、当然実際の試験では試験片は有限長さであり、試験片末端の回転を拘束したとすると、誇張して描けば図4(b) のようになる変形状態が引き起こされる。このため、真の弾性係数 $E^*(\theta)$ と、中央部で測定されたみかけの弾性係数 $E^+(\theta)$ の間に相違が生ずる。この問題は文献4)に適切な境界条件下での正解が与えられており、それを参考にすると $E^*(\theta)$ との関係は次のようになる。

$$E^*(\theta) = E^+(\theta) / (1 - \eta)$$

ここに

$$\eta = 6\overline{S}_{16}^2 / [\overline{S}_{11} \{6\overline{S}_{66} + \overline{S}_{11}(l/b)^2\}] \quad (31)$$

つまり、試験片の細長比 l/b (b : 半幅) が大きくなれば E^+ と E^* の差は小さくなる。通常の CFRP の S_{ij} を代入すると、 $\theta = 45^\circ$ で $l/b = 20$ のとき、 $\eta = 0.005$ 程度である。 $l/b = 40$ とすれば $\eta = 0.001$ 以下となって他の実験誤差に消えることが期待できる。従って、全幅での比 $l/(2b) = 20$ 程の試験片を用意すれば、面内カップリング現象による E_{45} の誤差要因は相当に減少する。このことを踏まえて、実際の一方向材母板から試験片を切出す板取り計画の参考例を図5に示す。このようにすれば45°方向試験片の長さ要件を満足し易くなることもわかる。

図5 一方向強化材の4つの独立な弾性係数を求めるのに適した試験片の板取りプラン

4. 一方向材の非線形弾性挙動

複合材の特質である異方性弾性挙動について述べたが、破壊までに複合材はどのような性質を示すのであろうか。実際の構造物に用いる積層材ではこの挙動は極めて複雑で、未だ研究対象になっているので本節では触れない。その代り、基礎知識として一方向材がどのように非線形特性を示すかを簡単に説明することに限定する。

まず、複合材の非線形性で最初に認識されたのは繊維に沿うせん断応力が作用した時の非線形性である。文献2)に例示されているせん断応力-歪み線図を図6に示す。このように長繊維強化複合材では、強化繊維の種類を問わず、比較的早い時点で応力-歪み曲線に非線形性が現れる。このことをできるだけ簡単な形で早期に定式化したのが文献5)であり、高次弾性理論から導かれる次式により記述されると仮定している。

図6 一方向強化材に繊維に沿うせん断応力が作用した場合の非線形挙動の例

図7 一方向強化材繊維方向の引張り応力が作用した場合の非線形挙動の例

$$\varepsilon_6 = S_{66}\sigma_6 + S_{6666}\sigma_6^3 \quad (32)$$

この式は簡単ではあるが、実際の挙動をこれだけで説明しようとするとは少し無理がある。その他の方法として、アルミ合金の応力-歪み関係の記述のために考えられた Ramberg-Osgood 型構成式を、この非線形性の記述に応用する研究⁶⁾や、最近では、C.T. Sun らによる塑性ポテンシャル借用の記述法⁷⁾等が提案されているが、本講座の範囲を越えると思われるので、これらについて興味のある方は原論文を参照されることをお勧めするに止める。

もう一つの非線形性で、CFRP の場合に実用的にはあるいは上記のせん断の非線形性よりも重要かも知れないのは、炭素繊維それ自身の特性に起因する硬化型の材料非線形性である。本講著者らもその研究⁸⁾を行ったが、そこで提示した一方向 CFRP 材繊維方向の応力-歪み曲線を図7に示す。このように CFRP では高強度型、高弾性型を問わず、応力-歪み曲線は軽く下に凸な曲線となり、弾性係数を、この曲線の微係数と定義すれば、応力の小さいレベルでは弾性係数が応力とともに増大する傾向がある。圧縮では普通の方法のように弾性係数が応力とともに減少する。また、この特性は負荷/除荷でほとんど同じ経路をたどる、真の意味で非線形弾性挙動を示すことも分っている。この特性を記述するのに、著者らは文献6)の思想を拡張した次式が最も相応しい⁸⁾と考えた。

$$E_1 = 1 / (S_{11} + 2S_{111}\sigma_1 + 3S_{1111}\sigma_1^2) \quad (33)$$

$V_f = 60\%$ 程度の CF/エポキシ材の測定から上を求めた

例は、

$$E_1 = 1000 / \{6.689 + 0.982(\sigma_1 - 1.10)^2\} \quad (34)$$

[単位：GPa 準拠]

となる。このような応力の2次分数関数形は相補歪みエネルギー関数というものから得られるが、詳しいことは省略する。もちろん、応力 σ_1 が零のとき、線形弾性体の関係である(2)あるいは(5)式が得られるのは重要である。

実用的にこの事実が意味を持つのは、繊維の弾性係数のカタログ値と体積含有率 V_f を用いて一方向材の E_1 を複合則(1章(22)式)から導き出す時である。繊維弾性係数のカタログ値は、破断に至るまでの割線(セカント)係数で記述されている場合が多く、これと複合則からの理論値と応力が小さいところでの実験値が一致しない経験をお持ちの読者もあるかと思われる。著者らが研究を開始した動機の一つも、その不一致の追究であった。また、圧縮応力の大きくなったところでの諸強度問題にも、このことが影響している可能性もあると推測される。

一方向材直角方向の非線形性に関しては、従来では十分な非線形性を示す前に破断する場合が多く、議論の必要性は少なかったが、熱可塑複合材等の高靱性複合材の出現により、今後重要度は増大するであろう。ただ、理論的には、既出の理論でカバーできると考えられる。

5. 強度理論に関するコメントと結言

一方向材の非線形性挙動の延長上に破壊挙動がある。これを簡単に設計の道具として記述するための理論は既にいくつか提示されてきた。本講では、この再記述は止めて、解説文献(例えば9))を挙げるに止め、その代りにこの強度理論の適用の際の注意事項のみを述べる。

まず最初に知らなければならないのは、既出の諸理論は、一種の実験公式にすぎないものということである。この点で、例えば1~2節までの理論は、ある仮定を容認した場合に数学的真実であったことと本質的に異なる。また、提案者が有名であったために問題が有りなが

ら過大評価されてきた点等も有り得よう。この点、例えば Tsai-Wu の理論¹⁰⁾等が金科玉条のようになって、諸ソフトの中に入取られている現状は少々不満がある。これ以降は著者の見解であるが、航空機の複合材構造のように $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ 層がほとんどの場合は最大歪み則で十分であろう。FW 压力容器のような繊維配向角の場合にのみ理論による差異を真剣に検討する必要がある。著者は繊維方向の破壊モードのみを区別した Hashin の理論¹¹⁾に工学的本質性を見出しているが、FW 部品にこれが適切かどうかの見極めには今後の研究が必要である。

本講を閉じるに際しての結言を以下に述べる。限られた分量の中で、複合材の弾性挙動の根本である直交異方性弾性と、少し進んだテーマである非線形性について、極力基礎に遡って説明を行った。大胆に省略したところもあるので、興味を持たれた方は是非既刊の教科書などを参考とすることを勧めする。本講が読者の方のお役に立てば、著者の最も幸いとするところである。

参 考 文 献

- 1) 福田 博：日本複合材料学会誌，22 (1996)，19-25.
- 2) R.M. Jones： *Mechanics of Composite Materials*, Scripta, Washington, D.C. (1975).
- 3) 林 毅(編)：複合材料工学，日科技連，東京 (1971).
- 4) N.J. Pagano, *et al.*： *J. Compos. Mater.*, 2 (1968)，18.
- 5) H.T. Hahn & S.W. Tsai： *J. Compos. Mater.*, 7 (1973)，102.
- 6) 久能和夫，他：日本航空宇宙学会誌，39 (1991)，410.
- 7) C.T. Sun & J. L. Chen： *J. Compos. Mater.*, 23 (1989)，1009.
- 8) 石川隆司，他：日本複合材料学会誌，12 (1986)，8.
- 9) 石川隆司，他：日本複合材料学会誌，13 (1987)，2.
- 10) S.W. Tsai & E.M. Wu： *J. Compos. Mater.*, 5 (1971)，58.
- 11) Z. Hashin & A. Rotem： *J. Compos. Mater.*, 7 (1973)，448.