研究論文

CFRP 積層板端面における摩擦係数

肖 毅^{*1}, 汪 文学^{*2}, 高雄 善裕^{*3}

(1997 年 11 月 6 日受付)

Friction Coefficient of CFRP Composite Laminate Edge

Yi XIAO,^{*1} Wen-Xue WANG^{*2} and Yoshihiro TAKAO^{*3}

(Received November 6, 1997)

A calculation method of M-CLT for the friction coefficient of the CFRP composite laminate edge is proposed based on the experimental friction coefficient of unidirectional lamina with fiber orientation dependency. A high degree algebraic equation for the friction coefficient of the CFRP composite laminate edge is derived by using the Coulomb's friction law and the classical lamination theory. Numerical experiment of a frictional contact problem is performed by means of a nonlinear three-dimensional finite element analysis, and the friction coefficient of the CFRP composite laminate edge are obtained for various contact directions and compared with those obtained from the present calculation method. Good consistency is found between the two kinds of results. Furthermore, a simple calculation example for two beams with frictional contact under uniform pressure is presented to investigate the practical validity of the present method and the effects of different treatments for the friction coefficient on the contact stresses.

1. 緒 言

炭素繊維強化プラスチック (CFRP) 複合材料積層板は、その高い比強度と比剛性及び最適設計の観点から、航空機、自動車などの分野において広く使用されている。これを実際の構造部材として使用する場合、部材間の結合が必要となり、負荷伝達方式の簡易さや機能性からピンあるいはボルトのような機械的継手がよく使われている。このため、接合部における応力状態・破壊様式・強度予測に関する多くの研究が行われてきた¹⁻³⁾。

有限要素法による複合材料積層板接合部の応力解析は、最近、摩擦力を含む非線形接触問題として取り扱われ⁴⁻⁶⁾ており、摩擦力が応力解析の重要なパラメータと

考えられている。しかしこれらの研究においては、異方性体あるいは積層板における摩擦係数を一定値として取り扱っており、複合材料における摩擦の基本的な性質である摩擦係数の繊維方向依存性⁷⁻¹¹⁾が取り入れられていない。

そこで本研究では、一方向強化材単層板の摩擦係数の繊維方向依存性⁷⁻¹¹⁾を前提にし、積層理論に基づいて CFRP 積層板端面における摩擦係数を求める M-CLT 法を提案する。さらに、積層板端面の摩擦係数を 3 次元有限要素法による接触問題として求めた。数値実験として位置付けられる 3 次元有限要素法の結果を M-CLT 法及び簡易法¹²⁾のものと比較し、両方法の妥当性を検討する。最後に、積層板端面の摩擦係数の取扱いが、接触問題に及ぼす影響の簡単な例を示す。

2. 積層板端面の摩擦係数

Fig. 1 のように相手材が CFRP 積層板端面の上を滑る場合、積層板の端面に露出する繊維の形状は各層の繊維方向によって変化する。そこで、接触面の摩擦係数を評価するためには、まず、一方向強化材単層板の摩擦係数の繊維方向依存性とその積層板への適用法という問題を解決しなければならない。前者については、著者ら¹¹⁾の実験結果について簡単に触れ、後者について詳述する。

^{*1} 九州大学大学院工学研究科応用力学専攻大学院生 (812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)

Graduate Student, Department of Applied Mechanics, Kyushu University, 6-10-1, Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka, 812-8581, Japan

^{*2,3} 九州大学応用力学研究所 (816-8580 春日市春日公園 6-1)

Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University, 6-1, Kasugakoen, Kasuga 816-8580 Japan

^{*2} 助教授 Associate Professor, ^{*3} 教授 Professor

Fig. 1 Sliding with friction between composite laminate edge and steel.

2.1 CFRP 一方向材摩擦係数の繊維方向依存性⁽¹⁾

CFRP 一方向材 (T 800 H/3631) 試験片と相手材炭素鋼 (SK-5) の乾燥滑り摩擦係数の繊維方向依存性を Fig. 2 に示す。一方向材の摩擦表面を研磨紙 # 800 (○) と # 1500 (●) 及び # 2400 (△) で粗面化している。いずれにおいても、繊維方向と滑り方向との角度 (θ) の増大とともに摩擦係数は大きくなっている。また、表面の仕上げが粗いほど摩擦係数は大きい。なお、滑り方向(往復)の影響は認められなかった。

2.2 積層板端面の摩擦係数：M-CLT 法

Fig. 1 に示すように、 $2n$ 層からなる対称積層板を考え、その接触境界にも積層理論を適用する。各ラミナの応力-ひずみ関係は、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{61} & \bar{S}_{62} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

と表される。 $\bar{S}_{ij}$ と $\bar{Q}_{ij}$ は、それぞれ全体座標系 0-xyz におけるコンプライアンスマトリックスと剛性マトリックスの成分である。接触面に垂直な応力 $\sigma_y^{(k)}$ とクーロン摩擦係数 $\mu^{(k)}$ の積で定義される k 番目の層の端面せん断応力

$$\tau_{xy}^{(k)} = \mu^{(k)} \sigma_y^{(k)} \quad (3)$$

を式 (2) に代入すると

$$\epsilon_x = \bar{S}_{11}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + A_1^{(k)} \sigma_y^{(k)} \quad (4.a)$$

$$\epsilon_y = \bar{S}_{21}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + A_2^{(k)} \sigma_y^{(k)} \quad (4.b)$$

$$\gamma_{xy} = \bar{S}_{61}^{(k)} \sigma_x^{(k)} + A_3^{(k)} \sigma_y^{(k)} \quad (4.c)$$

Fig. 2 Variation of the coefficient of friction with fiber orientation of unidirectional CFRP lamina for various surfaces.

ここで、 $A_1^{(k)}$ 、 $A_2^{(k)}$ 及び $A_3^{(k)}$ は

$$\left. \begin{aligned} A_1^{(k)} &= \bar{S}_{12}^{(k)} + \mu^{(k)} \bar{S}_{16}^{(k)} \\ A_2^{(k)} &= \bar{S}_{22}^{(k)} + \mu^{(k)} \bar{S}_{26}^{(k)} \\ A_3^{(k)} &= \bar{S}_{62}^{(k)} + \mu^{(k)} \bar{S}_{66}^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

である。垂直ひずみ間の比 f_ϵ を積層板端面の求めるべき等価摩擦係数 μ_c の関数と考え (Appendix A),

$$\frac{\epsilon_x}{\epsilon_y} = f_\epsilon(\mu_c) = \frac{\epsilon_x^N + \mu_c \epsilon_x^S}{\epsilon_y^N + \mu_c \epsilon_y^S} \quad (6)$$

と置くと、式 (4.a) と式 (4.b) より、

$$\sigma_x^{(k)} = \frac{f_\epsilon(\mu_c) A_2^{(k)} - A_1^{(k)}}{\bar{S}_{11}^{(k)} - f_\epsilon(\mu_c) \bar{S}_{21}^{(k)}} \sigma_y^{(k)} \quad (7)$$

ここで ϵ_x^N 、 ϵ_y^N と ϵ_x^S 、 ϵ_y^S は、境界の有限領域に単位垂直荷重と単位せん断荷重がそれぞれ単独に作用する場合の垂直ひずみを示す。式 (7) を代入した式 (4.c) を式 (4.b) で割って整理すると、ひずみ γ_{xy} は

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = & \frac{\bar{S}_{61}^{(k)} (f_\epsilon(\mu_c) A_2^{(k)} - A_1^{(k)}) + A_3^{(k)} (\bar{S}_{11}^{(k)} - f_\epsilon(\mu_c) \bar{S}_{21}^{(k)})}{\bar{S}_{21}^{(k)} (f_\epsilon(\mu_c) A_2^{(k)} - A_1^{(k)}) + A_2^{(k)} (\bar{S}_{11}^{(k)} - f_\epsilon(\mu_c) \bar{S}_{21}^{(k)})} \\ & \times \epsilon_y \end{aligned} \quad (8)$$

式 (6) と式 (8) を式 (1) に代入すると、

$$\sigma_y^{(k)} = f_M(\mu_c) \epsilon_y \quad (9)$$

ここで、

$$\begin{aligned} f_M(\mu_c)^{(k)} &= f_\epsilon(\mu_c) \bar{Q}_{21}^{(k)} + \bar{Q}_{22}^{(k)} + \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ & \times \{ (\bar{S}_{61}^{(k)} (f_\epsilon(\mu_c) A_2^{(k)} - A_1^{(k)}) \\ & + A_3^{(k)} (\bar{S}_{11}^{(k)} - f_\epsilon(\mu_c) \bar{S}_{21}^{(k)})) \\ & / (\bar{S}_{21}^{(k)} (f_\epsilon(\mu_c) A_2^{(k)} - A_1^{(k)}) \\ & + A_2^{(k)} (\bar{S}_{11}^{(k)} - f_\epsilon(\mu_c) \bar{S}_{21}^{(k)})) \} \end{aligned} \quad (10)$$

Fig. 3 Finite element geometry of a sliding steel along laminate edge. $\odot$: joint used for contact, $\otimes$: free joint.

積層板全体の摩擦係数は、式 (3) と式 (9) より、

$$\mu_c = \frac{\sum_{k=1}^{2n} (z_k - z_{k-1}) \mu^{(k)} f_M(\mu)^{(k)}}{\sum_{k=1}^{2n} (z_k - z_{k-1}) f_M(\mu)^{(k)}} \quad (11)$$

この μ_c に関する高次代数方程式を解けば、 μ_c が求められる (Appendix B)。以降、この方法を M-CLT (Modified-Classical Lamination Theory) 法と呼ぶ。

参考文献 12) で示された簡易方法 (Appendix C) では、式 (9) あるいは式 (1) に換え、端面に垂直なヤング率 $E_y^{(k)}$ を使い、初等材料力学的に、

$$\sigma_y^{(k)} \cong E_y^{(k)} \varepsilon_y^{(k)} \quad (12)$$

としている。

3. 3次元有限要素法による接触問題解析

M-CLT 法及び簡易法の妥当性を検証するために、接触摩擦の 3 次元有限要素法解析 (3D-FEM) を行う。

Fig. 3 に示すような炭素鋼コの字型ブロック (Y 軸に対称であるため、図は解析モデルの 1/2 を示す) を CFRP 積層板試験片に押し付け、その接触・摩擦を有限要素法汎用コード MARC-K6 を使って解析した。解析モデルの厚みは 1.0 mm、 P は 1.5 N、また、図中の寸法の単位は mm である。

本コードでは接触界面の境界条件をラグランジェ未定乗数法によって導入している。Fig. 3 の拡大部分に接触点の構成方法を示す。積層板の各層を板厚方向に 3 分割

Table 1 Material properties of CFRP lamina and mild steel¹³⁾

Material properties	Unidirectional CFRP/Epoxy T800H/3631	Mild steel SK-5
E_1 (GPa)	165	210
E_2 (GPa)	8.9	210
E_3 (GPa)	8.9	210
G_{12} (GPa)	4.9	—
G_{23} (GPa)	2.85	—
G_{13} (GPa)	4.9	—
ν_{12}	0.34	0.31
ν_{23}	0.54	0.31
ν_{13}	0.34	0.31

し、層間共通点を除く 2 点を接触点とした。この接触点で接触、滑り、分離の条件を制御している。摩擦係数を求めるためには、板厚方向に様な滑り摩擦状態が必要である。しかし、各層の摩擦係数が異なるため、板厚方向に接触状態の不一致が生じやすい。安定した様な滑り摩擦状態を得るために、負荷増分を小さくして計算した。

クロスプライ積層板 $[0/90/90/0]_s$ 及び擬似等方性積層板 $[0/+45/-45/90]_s$ を解析した。解析モデルの対称性を考慮し、前者はモデルの 1/4、後者はモデルの 1/2 を分割し、3 次元 8 節点ソリッド要素を使用した。解析に使った CFRP 一方向材と相手材の材料定数及び摩擦係数は Table 1 と Fig. 2 の通りである。実際の使用状況を考え、精密機械加工に対応する研磨紙 #800 仕上げの摩擦係数を使用した。

3 次元接触問題の有限要素法解析解より、積層板端面の摩擦係数は

$$\mu_c = \frac{\sum_{i=1}^{2n} F_x^{(i)}}{\sum_{i=1}^{2n} F_y^{(i)}} \quad (13)$$

ここで、 $F_x^{(i)}$ 及び $F_y^{(i)}$ は、Fig. 3 の拡大部分における接触点節点力の滑り方向 (x) 成分と垂直方向 (y) 成分である。

4. 結果と検討

Fig. 4 に、代表的な積層板 $[0/90/90/0]_s$ と $[0/+45/-45/90]_s$ の材料軸方向が変化した場合の積層板端面の摩擦係数を示す。横軸は材料軸方向の変化を示し (対称性より前者は 45° 、後者は 22.5° 分を表示すればよい)、滑り方向と積層板表面層の繊維方向のなす角度 α で定

Fig. 4 Comparison of coefficient of friction by four methods.

義する。表面層の繊維方向が滑り方向と一致しているとき、 $\alpha=0^\circ$ となる。本論文で提案したM-CLT法の式(11) (○)、初等材料力学による簡易計算式(C-2) (△)、単純平均 (□)の結果を3D-FEMによる解析 (◇)の結果と比較すると、単純平均の結果が3D-FEMの結果と大きく異なることがわかる。特に擬似等方性材では α の効果がほとんど認められない。単純平均の結果はAppendix Cの(C-2)式の $E_y^{(k)}$ を除いた厚さの重みだけをつけた計算によるものなので力学的な意味が薄いと言える。

次に、M-CLT法の式と簡易式の結果を比較する。[0/90/90/0]_sの場合、両者の差は小さく、3D-FEMの結果と傾向的にも、値の上でも ($\alpha=0^\circ$ では7%ほど大きい)がほぼ等しい。[0/+45/-45/90]_sの場合、両者とも傾向的には3D-FEMと同じであるが、値は3D-FEMの結果より大きい。最も差が大きい $\alpha=0^\circ$ では簡易式で20%弱、M-CLT式で10%弱の差が生じている。 $\alpha=22.5^\circ$ 付近の差は3%程度である。

M-CLT法では、接触境界領域でも、各層のひずみが同じであると仮定している。しかし、3D-FEM解析結果から各層のひずみが同じではないことがわかる。Fig. 5(a) (b)は積層板[0/90/90/0]_sと[0/+45/-45/90]_sの接触面における各層の垂直ひずみ ϵ_y である。[0/90/90/0]_sの場合、各層の垂直ひずみの相対差が最も大きいのは $\alpha=0^\circ$ で、最も小さいのは $\alpha=45^\circ$ である。これに対応し、 $\alpha=0^\circ$ で、式(11)による摩擦係数が3D-FEMによる値より大きく、 $\alpha=45^\circ$ ではほぼ等しくなっている。

Fig. 5 Distributions of the strain ϵ_y at contact surface of laminates for $P=1.5$ N.

[0/+45/-45/90]_sの場合も同様な各層ひずみの相対差が認められる。その差が比較的小さい $\alpha=27^\circ$ で、両摩擦係数の差も小さくなる。 $\alpha=45^\circ$ と $\alpha=0^\circ$ を比較すると、同一繊維方向となる単層板間のひずみにわずかな違いが認められる。これは $\alpha=45^\circ$ が[+45/90/0/-45]_sに対応すること、つまり積層構成の3次元効果によるものと理解できる。初等材料力学による簡易法とM-CLT法の結果が、クロスプライの場合ほぼ等しいのは、その剛性マトリックスのカップリング項が小さく、式(1)と式(12)の差が小さいためである。擬似等方性材では、その剛性マトリックスのカップリング項が有意な値を示し、式(1)と式(12)に差が生じてくる。特に $\alpha=0^\circ$ においては、 $\pm 45^\circ$ 層のshear couplingが σ_y に寄与し、この結果、簡易法はM-CLT法より10%弱、合計で3D-FEMより20%弱大きい摩擦係数を予測する。

以上の考察より、提案したM-CLT法は代表的な積層板であるクロスプライ及び擬似等方性板端面の摩擦係数を0~10%の誤差範囲で予測できることがわかる。

Fig. 6 Frictional contact between two beams of steel and CFRP under uniform compression.

5. 摩擦係数の取扱い方による 接触解析への影響—計算例

ここでは接触解析によく使われている重ねはりの接触問題^{14,15)}を計算例として用い、2次元FEMの解析により、摩擦係数の取扱い方が接触解析に与える影響を示す。

両端を単純支持された2枚の重ねはりに等分布荷重 $p_0 = 0.5$ MPa が Fig. 6 のように作用している^{14,15)}。ここでは、平面応力状態を仮定し、上部はりを等方性の鋼、下部はりをCFRP積層板とする。計算に使用した材料定数は前節と同じものである。また、等方性とした従来の結果^{14,15)}と比較し、接触問題の解の精度を確認した。

Fig. 7 は積層板 $[0/90/90/0]_s$ と $[0/+45/-45/90]_s$ の接触面近傍の無次元化応力分布をそれぞれ $x \leq 0$ と $x \geq 0$ に示す。中心を除く全接触点で滑りが発生している。摩擦係数として、 $\mu_c = 0.0$ の他、M-CLT法と単純平均法によるものを用いた。 $[0/90/90/0]_s$ の場合、 $\mu_c^{M-CLT} = 0.366$ (M-CLT 法式 (11) による結果)、 $\mu_c^{AV} = 0.272$ (単純平均の結果)、 $[0/+45/-45/90]_s$ の場合、 $\mu_c^{M-CLT} = 0.325$ 、 $\mu_c^{AV} = 0.262$ である。摩擦が σ_y を除く積層板の接触面近傍応力に比較的大きな影響を与えることがわかる。摩擦の影響は σ_y と τ_{xy} については、鋼の剛性がCFRP積層板のものより大きいために、はり端部付近で、 σ_x については、曲げ応力が大きくなる中央部で著しい。

6. 結 論

本研究では、CFRP積層複合材端面の摩擦係数を求めるため積層理論に基づくM-CLT法を示した。一方向強化材単層板の摩擦係数の繊維方向依存性を積層理論を使

(a) Normal stress σ_x

(b) Normal contact stress σ_y

(c) Shear contact stress τ_{xy}

Fig. 7 Normalized stress distributions along x -axis of laminates $[0/90/90/0]_s$ and $[0/+45/-45/90]_s$.

って取り入れ、摩擦係数を未知数とする高次代数方程式を得た。この数値解析により、摩擦係数を求めた。また、積層板端面の3次元有限要素法(3D-FEM)による摩擦を含む接触解析を行い、ひずみ分布と積層板としての摩擦係数を求めた。M-CLT法及び初等材料力学的簡易法による結果を3D-FEMによるものと比較し、M-CLT法

及び簡易法の妥当性などについて、以下の結論を得た。

1) クロスプライの場合、M-CLT 法と簡易法による摩擦係数はほぼ等しく、3D-FEM による結果より 0~7% 大きくなる。[0/+45/-45/90]_s 擬似等方性材では、M-CLT 法で 3~10%、簡易法で 3~20% 大きくなる。10% を最大誤差にすれば、M-CLT 法が妥当となる。

2) 簡易法と M-CLT 法の違いは、前者における剛性マトリックスのカップリング項の無視に起因する。このため、カップリング項の小さいクロスプライでは両者の差は小さくなり、カップリング項の大きい擬似等方性では差が大きくなる。

3) M-CLT 法と 3D-FEM 解析の違いは、厚さ方向のひずみが一定であるという前者の仮定が端面で必ずしも成立していないためである。

4) M-CLT 法による摩擦係数が実際の接触問題解析に与える影響を確認した。

参 考 文 献

- 1) L.I. Eriksson : *J. Comp. Mat.*, **24** (1990), 1246-1269.
- 2) 濱田泰以, 前川善一郎, 春名一志 : 日本機械学会論文集中集(A), **57**, 543 (1991), 2715-2721.
- 3) H.S. Wang, C.L. Hung & F.K. Chang : *J. Comp. Mat.*, **30** (1996), 1284-1313.
- 4) L.I. Eriksson : *Comp. Struct.*, **6** (1986), 57-75.
- 5) E.K. Yogeswaren & J.N. Reddy : *Comput. Struct.*, **30** (1988), 1067-1077.
- 6) W.H. Chen, S.S. Lee & J.T. Yeh : *Comp. Struct.*, **30** (1995), 287-297.
- 7) J.P. Giltrow & J.K. Lancaster : *Wear*, **16** (1970), 359-374.
- 8) 築添 正, 大前伸夫 : 日本機械学会論文集中集(A), **43**, 367 (1977), 1115-1122.
- 9) T. Tsukizoe & N. Ohmae : *Friction and Wear of Polymer Composites*, ed. by K. Friedrich, Elsevier, Amsterdam and New York (1986), Chap. 7, pp. 205-231.
- 10) M. Cirino, K. Friedrich & R.B. Pipes : *Wear*, **121** (1988), 127-141.
- 11) 肖 毅, 松原監壮, 汪 文学, 高雄善裕 : 第 26 回 FRP シンポジウム講演論文集 (1997), pp. 64-67.
- 12) 肖 毅, 汪 文学, 高雄善裕 : 九州大学応用力学研究所所報, **81** (1997), 1-13.
- 13) 宮入裕夫, 池上皓三, 加藤晴久, 加部和幸, 後藤卒土民, 塩田一路, 安田榮一編 : 複合材料の事典, 朝倉書店, 東京 (1991).
- 14) 矢川元基, 平山 浩, 安藤良夫 : 日本機械学会論文集中集(A), **46** (1980), 1220-1228.
- 15) 葛 紀夫, 山地成一 : 日本機械学会誌, **76**, 651 (1973), 348-358.

- 16) S.P. Timoshenko & J.N. Goodier : *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company, New York (1970).

Appendix A : ϵ_x^N , ϵ_y^N , ϵ_x^S , ϵ_y^S について

Fig. A-1 に示す (a) 摩擦を含む弾性接触問題を (b) 鉛直荷重 $N=1$ と (c) 摩擦力 $S=1$ に置き換える。線形弾性論の重ね合せ原理により、

$$\frac{\epsilon_x}{\epsilon_y} = \frac{\epsilon_x^N + \mu_c \epsilon_x^S}{\epsilon_y^N + \mu_c \epsilon_y^S} = f_e(\mu_c) \quad (6)$$

式 (6) 中の ϵ_x^N , ϵ_y^N , ϵ_x^S , ϵ_y^S を解析的に求めるの是一般には困難である。そこで、有限要素法汎用コード MARC-K6 を用いた 2 次元解析 (2D-FEM) を行い、接触領域での平均ひずみ値として求めた。また、計算精度

Fig. A-1 A two-dimensional model of (b) N + (c) S from (a) elastic contact.

Fig. A-2 Stress distribution under normal load along finite boundary.

Fig. A-3 Normal strains in laminate $[0/90/90/0]_s$ for various off-axis.

の確認のため、擬似等方性積層板における平均応力を弾性論による結果¹⁶⁾と比較した(Fig. A-2). 2D-FEMによる応力比 σ_x/σ_y の誤差は平均5%に収まる. Fig. A-3はクロスプライから得られた ϵ_x^N などの値である. ϵ_x^N と ϵ_y^N は単調に増減しているが³⁾, ϵ_x^S と ϵ_y^S はピークを持つ. 擬似等方性の場合 $\epsilon_x^N = \epsilon_y^N$ であるが, クロスプライの解析方法と統一を図るために, 2D-FEMの結果を使い, $\epsilon_x^N = -0.00009128$, $\epsilon_y^N = -0.0001132$, $\epsilon_x^S = \epsilon_y^S = 0$ を使用した.

Appendix B: μ_c の数値解析

式 (11) の分母を払い, その左辺と右辺の差を

$$F(\mu_c) = \mu_c \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) f_M(\mu_c)^{(k)} - \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) \mu^{(k)} f_M(\mu_c)^{(k)} \quad (\text{B-1})$$

と置く. $F(\mu_c)$ を $\mu(\theta=0^\circ) \leq \mu_c \leq \mu(\theta=90^\circ)$ で図示し, $F(\mu_c)=0$ より μ_c を決定する. なお, $\mu(\theta=0^\circ)$ は Fig. 2 における $\theta=\theta^0$ での μ 値である. $\alpha=0^\circ$ のクロスプライの $F(\mu_c)$ を Fig. B-1 に示す. $\mu_c=0.366$ と求められる.

Fig. B-1 $F(\mu_c)$ for cross-ply of $\alpha=0^\circ$.

Appendix C: 積層板摩擦係数の簡易計算法¹²⁾

Fig. 1 に示すような $2n$ 層からなる対称積層板全体の摩擦係数 μ_c は

$$\mu_c = \frac{\sum_{k=1}^{2n} (z_k - z_{k-1}) \tau_{xy}^{(k)}}{\sum_{k=1}^{2n} (z_k - z_{k-1}) \sigma_y^{(k)}} \quad (\text{C-1})$$

ここで, せん断応力は

$$\tau_{xy}^{(k)} = \mu^{(k)} \sigma_y^{(k)} \quad (3)$$

である. また, 垂直応力を材料力学的に

$$\sigma_y^{(k)} \cong E_y^{(k)} \epsilon_y^{(k)} \quad (12)$$

と近似し, さらに各層のひずみは等しい(つまり, $\epsilon_y^{(k)} = \epsilon_y$) と仮定し, 式 (3), (12) を式 (C-1) に代入すると

$$\mu_c = \frac{\sum_{k=1}^{2n} (z_k - z_{k-1}) \mu^{(k)} E_y^{(k)}}{\sum_{k=1}^{2n} (z_k - z_{k-1}) E_y^{(k)}} \quad (\text{C-2})$$

積層板の摩擦係数 μ_c は各層の単純平均ではなく, 接触面に垂直な方向のヤング率 $E_y^{(k)}$ の重み付き平均となる. なお, $E_y^{(k)}$ は一方向材の繊維方向(1方向)から $\theta + \frac{\pi}{2}$ 傾いた Y 方向の縦弾性率で,

$$\frac{1}{E_y} = \frac{1}{E_1} \sin^4 \theta + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{E_2} \cos^4 \theta \quad (\text{C-3})$$

より求められる. ここで, E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} は一方向材の主軸方向の材料定数である.