研究論文

繊維破断を有する単一繊維複合材料の応力伝達解析

荻原 慎二*, 木村 要一**, 武田 展雄***, 小林 昭*

(1998年9月18日受付)

Stress Transfer Analysis of a Single Fiber Composite with Fiber Breaks

Shinji OGIHARA,* Yuichi KIMURA,** Nobuo TAKEDA*** and Akira KOBAYASHI*

(Received September 18, 1998)

Stress transfer between fiber and matrix in a single fiber reinforced composite with fiber breaks is analyzed. The model is based on a concentric cylinder model and considers an interphase layer between the fiber and matrix. Account is taken of thermal residual stresses arising from a mismatch between the fiber, matrix and interphase. In addition, Poisson's ratio mismatches are also taken into account. Stress and displacement fields in a single fiber composite under uniaxial tension in fiber direction are analyzed. The analytical results are shown for a single fiber composite with interphase of various elastic properties. Young's modulus reduction of composite due to fiber break is also predicted. The analysis would be useful for interpreting experimental data of fragmentation tests.

1. 緒 言

繊維強化複合材料の力学的特性は、繊維、マトリックスの特性だけでなく、界面の性質にも大きく影響される。界面の重要な役割の一つは、複合材料の破壊過程において、繊維破断やマトリックスクラックが発生した場合のマトリックスから繊維への応力伝達であり、これにより複合材料の耐荷性が保たれることになる。この応力伝達に複合材料の強度、靱性が大きな影響を受けることから、界面の性質を定量的に評価し、効果的な複合材料開発を行うことが望まれている。

界面特性の評価法として、様々な方法が提案されている。例えば、複合材料のモデルとして単一繊維複合材料を用いる、単一繊維破断試験 (fragmentation test)、引き抜き (pull-out) 試験、押し込み (indentation) 試験、

マイクロドロップレット (micro-droplet) 試験や、複合材料の繊維直角方向の引張試験、せん断強度測定、等が行われている。中でも単一繊維破断試験が多く行われている。この試験は、試験片に繊維破断が増加しなくなるまで荷重を加えた後に臨界繊維長さを測定し、界面強度を評価しようとするものである。

繊維破断を有する単一繊維複合材料の応力解析は古くから多く行われている。それと単一繊維破断試験とを結びつける研究として Nairn らは fragmentation 試験で得られる繊維破断数のデータを彼らの応力解析を用い解釈する方法を提案している¹⁾。

著者の一人は、異なる繊維表面処理のガラス繊維強化プラスチック複合材料について、単一繊維複合材料と実際の複合材料の損傷挙動と強度、靱性の関係について検討してきた²⁻⁶⁾。同じ繊維・マトリックスの組み合わせでも、繊維表面処理が異なると単一繊維破断試験における繊維破断挙動が変化することから、力学的には界面を界面相としてモデル化することが必要であると考えられる。

一方、McCartney は単一繊維強化複合材料について、一つの繊維破断あるいはマトリックスクラックが発生した場合の界面の応力伝達の解析を行った⁷⁾。この解析は、繊維とマトリックスの熱膨張係数およびポアソン比のミスマッチを考慮した近似弾性解析である。また、対応した変位場も導出されていることから、その妥当性が実験的

* 東京理科大学理工学部 (278-8510 野田市山崎 2641)

Department of Mechanical Engineering, Science University of Tokyo, 2641 Yamasaki, Noda 278-8510, Japan

** 東京理科大学大学院 (278-8510 野田市山崎 2641) Graduate Student, Science University of Tokyo

*** 東京大学国際・産学共同研究センター (153-8904 東京都目黒区駒場 4-6-1) CCR, The University of Tokyo, 4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153-8904, Japan

に確認できる可能性があり、有用であると考えられる。

本研究では、McCartney の解析を単一繊維破断試験のデータ解釈に用いるように拡張した。すなわち、単一繊維複合材料中に複数の繊維破断が発生した場合の解析とし、また繊維、マトリックス間に界面相を考慮するよう拡張した。また、この解析をもとに、繊維破断密度と複合材料ヤング率の関係を導出した。

2. 解 析

2.1 解析モデル

Fig. 1 に示すような繊維破断が発生した繊維/マトリックス間に界面相を有する円筒形モデルを考え、 z 軸が繊維軸と一致するように円筒系座標 (r, θ, z) を定める。円筒形モデルは z 方向に引張応力 σ を受ける。繊維破断は繊維軸方向に対して直角であり、半径方向に貫通する形で等間隔 (L) に発生しているものとする。また、繊維破断先端は繊維/界面相の境界にあるものとする。繊維の半径、界面相及びマトリックスの外半径をそれぞれ R_f , R_i , a とする。繊維、界面相及びマトリックスは、すべて等方弾性体とする。

繊維、界面相及びマトリックスについて以下の平衡方程式、構成方程式が成立する⁷⁾。

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})}{r} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \quad (2)$$

$$E \varepsilon_{rr} = \sigma_{rr} - \nu (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) + E \alpha T \quad (3)$$

$$E \varepsilon_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) + E \alpha T \quad (4)$$

Fig. 1 A concentric cylinder model with inter-phase.

$$E \varepsilon_{zz} = \sigma_{zz} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) + E \alpha T \quad (5)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{2\mu}, \quad E = 2\mu(1+\nu) \quad (6)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (7)$$

ここで、 E , ν , μ , α は、それぞれヤング率、ポアソン比、せん断弾性係数、熱膨張係数を示す。また、 $T = T_s - T_o$ であり、 T_s は試験温度、 T_o は成形温度、すなわち、応力フリー温度である。

2.2 境界条件

次に境界条件について考える。繊維/界面相及び界面相/マトリックスの境界面は完全接着しているものとし、応力及び変位の連続条件から

$$u_z^f = u_z^i, \quad u_r^f = u_r^i, \quad \text{on } r = R_f, \quad 0 \leq z \leq L \quad (8)$$

$$\sigma_{rr}^f = \sigma_{rr}^i, \quad \sigma_{rz}^f = \sigma_{rz}^i, \quad \text{on } r = R_f, \quad 0 \leq z \leq L \quad (9)$$

$$u_z^i = u_z^m, \quad u_r^i = u_r^m, \quad \text{on } r = R_i, \quad 0 \leq z \leq L \quad (10)$$

$$\sigma_{rr}^i = \sigma_{rr}^m, \quad \sigma_{rz}^i = \sigma_{rz}^m, \quad \text{on } r = R_i, \quad 0 \leq z \leq L \quad (11)$$

円筒形モデル表面が自由表面であることから、

$$\sigma_{rr}^m = 0, \quad \sigma_{rz}^m = 0, \quad \text{on } r = a, \quad 0 \leq z \leq L \quad (12)$$

繊維破断表面では応力はゼロであることより、

$$\sigma_{rz}^f = 0, \quad \sigma_{rz}^i = 0, \quad \sigma_{zz}^f = 0, \quad \text{on } z = 0 \quad (13)$$

$$\sigma_{rz}^f = 0, \quad \sigma_{rz}^i = 0, \quad \sigma_{zz}^f = 0, \quad \text{on } z = L \quad (14)$$

上付き添字 f , i , m はそれぞれ繊維、界面相、マトリックスを示す。これらの添字の付け方は McCartney の方法に準じている (i は本研究で導入した)。

2.3 繊維破断がない場合の応力分布

繊維破断のない場合の σ_{zz}^f , σ_{zz}^i , σ_{zz}^m をそれぞれ σ_f^∞ , σ_i^∞ , σ_m^∞ と書くと

$$\left. \begin{aligned} \sigma_f^\infty &= E_f(\varepsilon - \alpha_f T) - 2\nu_f V_m \frac{\phi}{R_i^2} \\ \sigma_i^\infty &= E_i(\varepsilon - \alpha_i T) - 2\nu_i V_m \frac{\phi}{R_i^2} \\ \sigma_m^\infty &= E_m(\varepsilon - \alpha_m T) + 2\nu_m (V_f + V_i) \frac{\phi}{R_i^2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここで、 ε は円筒形モデルひずみであり、 V_f , V_i , V_m はそれぞれ繊維、界面相、マトリックスの体積含有率を示す。

また、 ϕ は次式で表される。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{2\mu_m} + \frac{1-2\nu_m}{2\mu_m} (V_f + V_i) + \frac{1-2\nu_f}{2\mu_f} V_m \right\} \frac{\phi}{R_i^2} \\ &= (\nu_m - \nu_f) \varepsilon + (1 + \nu_f) \alpha_f T - (1 + \nu_m) \alpha_m T \end{aligned} \quad (16)$$

σ_f^∞ , σ_i^∞ , σ_m^∞ は次式を満たす。

$$V_f \sigma_f^\infty + V_i \sigma_i^\infty + V_m \sigma_m^\infty = \sigma \quad (17)$$

2.4 近似解

$A(z)$, $C(z)$ を z のみの関数とし, 以下のように書けると仮定をする.

$$\sigma_{rz}^f = \left(\frac{V_i + V_m}{R_f^2} \right) C'(z) r + \frac{V_m}{R_i^2} C'(z) r, \quad \sigma_{rr}^f = \sigma_{\theta\theta}^f \quad (18)$$

$$\sigma_{rz}^i = \left(\frac{1}{r} - \frac{V_f}{R_f^2} \right) C'(z) + \frac{V_m}{R_i^2} C'(z) r, \quad \sigma_{rr}^i = \sigma_{\theta\theta}^i \quad (19)$$

$$\sigma_{rz}^m = \left(\frac{1}{r} - \frac{V_f}{R_f^2} \right) C'(z) + \left(\frac{1}{r} - \frac{V_f + V_i}{R_i^2} \right) C'(z), \quad \sigma_{rr}^m = \sigma_{\theta\theta}^m + \frac{A(z)}{r^2} \quad (20)$$

式(18)~(20)のせん断応力の形は, 境界条件(9), (11), (12)を満たす.

式(1)に式(20)を代入し, 境界条件(12)を考慮することにより

$$\sigma_{rr}^m = \left(\frac{V_f}{R_f^2} r^2 - 1 + \ln \frac{1}{V_f} - \ln \frac{r^2}{R_f^2} \right) C''(z) + \frac{1}{2} \left(\frac{R_f^2}{r^2} - V_f \right) \frac{A(z)}{R_f^2} \quad (21)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^m = \left(\frac{V_f}{R_f^2} r^2 - 1 + \ln \frac{1}{V_f} - \ln \frac{r^2}{R_f^2} \right) C''(z) - \frac{1}{2} \left(\frac{R_f^2}{r^2} + V_f \right) \frac{A(z)}{R_f^2} \quad (22)$$

式(2)に式(20)を代入することにより次式が導かれる.

$$\sigma_{zz}^m = 4 \frac{V_f}{R_f^2} C(z) + \sigma_{zz}^m \quad (23)$$

式(3), (4)より

$$2\mu(\epsilon_{rr} - \epsilon_{\theta\theta}) = \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2\mu r \frac{\partial(u_r/r)}{\partial r} \quad (24)$$

$$E(\epsilon_{rr} - \epsilon_{\theta\theta}) = (1 - \nu)(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - 2\nu\sigma_{zz} + 2E\alpha T \quad (25)$$

マトリックスにおいて, 式(20), (24)を用いることにより次式のように表される.

$$2\mu_m u_r^m = -\frac{A(z)}{2r} + G(z) r \quad (26)$$

ここで, $G(z)$ は, r に関する積分において生じる任意の z の関数である.

式(6), (7), (20)及び(26)を用いて,

$$2\mu_m u_z^m = \left\{ 4C'(z) + \frac{1}{2}A'(z) \right\} \ln \frac{r}{R_i} - \left\{ 2 \left(\frac{V_f}{R_f^2} \right) C'(z) + \frac{1}{2}G'(z) \right\} r^2 + 2\mu_m H_m(z) \quad (27)$$

ここで, $H_m(z)$ は, r に関する積分において生じる任意の z の関数である.

界面相についても同様の手順で式(20)を式(19)に置き換えて求めることができる.

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{V_f}{R_f^2} - \frac{V_m}{R_i^2} \right) r^2 - \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{V_f} - \ln \frac{r R_i}{R_f^2} \right\} C''(z) + \frac{1}{2} \left(\frac{R_f^2}{R_i^2} - V_f \right) \frac{A(z)}{R_f^2} \quad (28)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^m + 2 \left(\frac{V_f}{R_f^2} - \frac{V_m}{R_i^2} \right) C(z) \quad (29)$$

$$2\mu_i u_r^i = \frac{\mu_i}{\mu_m} \left\{ G(z) - \frac{A(z)}{2R_i^2} \right\} r \quad (30)$$

$$2\mu_i u_z^i = 2C'(z) \ln \frac{r}{R_i} - \left[\left(\frac{V_f}{R_f^2} - \frac{V_m}{R_i^2} \right) C'(z) + \frac{\mu_i}{2\mu_m} \left\{ G'(z) + \frac{A'(z)}{2R_i^2} \right\} \right] r^2 + 2\mu_i H_i(z) \quad (31)$$

ここで, $H_i(z)$ は, r に関する積分において生じる任意の z の関数である.

繊維についても同様の手順で式(20)を式(18)に置き換えて求めることができる.

$$\sigma_{rr}^f = \sigma_{\theta\theta}^f = \left\{ \ln \frac{1}{V_f} - \frac{R_i}{R_f} - \frac{1}{2} \left(\frac{V_i + V_m}{R_f^2} + \frac{V_m}{R_i^2} \right) r^2 \right\} \times C''(z) + \frac{1}{2} \left(\frac{R_f^2}{R_i^2} - V_f \right) \frac{A(z)}{R_f^2} \quad (32)$$

$$\sigma_{zz}^f = \sigma_{zz}^m - 2 \left(\frac{V_i + V_m}{R_f^2} + \frac{V_m}{R_i^2} \right) C(z) \quad (33)$$

$$2\mu_f u_r^f = \frac{\mu_f}{\mu_m} \left\{ G(z) - \frac{A(z)}{2R_i^2} \right\} r \quad (34)$$

$$2\mu_f u_z^f = \left[\left(\frac{V_i + V_m}{R_f^2} - \frac{V_m}{R_i^2} \right) C'(z) - \frac{\mu_f}{2\mu_m} \left\{ G'(z) - \frac{A'(z)}{2R_i^2} \right\} \right] r^2 + 2\mu_f H_f(z) \quad (35)$$

ここで, $H_f(z)$ は, r に関する積分において生じる任意の z の関数である.

次に構成方程式(5), (25), 残りの境界条件(8), (10), (13), (14)をできる限り満足させることにより $A(z)$, $C(z)$, $G(z)$, $H_m(z)$, $H_i(z)$ 及び $H_f(z)$ を決定する.

しかしながら, 構成方程式(5), (25)を厳密に満たすことはできない. そこで, 平均化することによりこれらを満たすように書き換える. まず, 繊維, 界面相, マトリックスにおける関数 $f(r, z)$, $i(r, z)$, $m(r, z)$ の平均をそれぞれ次のように定義する.

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{\pi R_f^2} \int_0^{R_f} 2\pi r f(r, z) dr \quad (36)$$

$$\bar{i}(z) = \frac{V_f}{\pi R_f^2 V_i} \int_{R_f}^{R_i} 2\pi r i(r, z) dr \quad (37)$$

$$\bar{m}(z) = \frac{V_f}{\pi R_f^2 V_m} \int_{R_i}^a 2\pi r m(r, z) dr \quad (38)$$

繊維について式(7), (36)を用いて, 式(5), (25)の条

件をそれぞれ次式のように書き換えられる。

$$\frac{2E_f}{R_f} u_r^f(R_f, z) = (1 - \nu_f) \{ \bar{\sigma}_{rr}^f(z) + \bar{\sigma}_{\theta\theta}^f(z) \} - 2\nu_f \bar{\sigma}_{zz}^f(z) + 2E_f \alpha_f T \quad (39)$$

$$E_f \frac{d\bar{u}_z^f}{dz} = \bar{\sigma}_{zz}^f(z) - \nu_f \{ \bar{\sigma}_{rr}^f(z) + \bar{\sigma}_{\theta\theta}^f(z) \} + E_f \alpha_f T \quad (40)$$

式(37)を用いることにより、同様に界面相について次のように示される。

$$\begin{aligned} \frac{2E_i}{R_f^2} \frac{V_f}{V_i} \{ R_i u_r^i(R_i, z) - R_i u_r^i(R_f, z) \} \\ = (1 - \nu_i) \{ \bar{\sigma}_{rr}^i(z) + \bar{\sigma}_{\theta\theta}^i(z) \} \\ - 2\nu_i \bar{\sigma}_{zz}^i(z) + 2E_i \alpha_i T \end{aligned} \quad (41)$$

$$E_i \frac{d\bar{u}_z^i}{dz} = \bar{\sigma}_{zz}^i(z) - \nu_i \{ \bar{\sigma}_{rr}^i(z) + \bar{\sigma}_{\theta\theta}^i(z) \} + E_i \alpha_i T \quad (42)$$

式(38)を用いることにより、同様にマトリックスについて次のように示される。

$$\begin{aligned} \frac{2E_m}{R_f^2} \frac{V_f}{V_m} \{ a u_r^m(a, z) - R_i u_r^m(R_i, z) \} \\ = (1 - \nu_m) \{ \bar{\sigma}_{rr}^m(z) + \bar{\sigma}_{\theta\theta}^m(z) \} - 2\nu_m \bar{\sigma}_{zz}^m(z) \\ + 2E_m \alpha_m T \end{aligned} \quad (43)$$

$$E_m \frac{d\bar{u}_z^m}{dz} = \bar{\sigma}_{zz}^m(z) - \nu_m \{ \bar{\sigma}_{rr}^m(z) + \bar{\sigma}_{\theta\theta}^m(z) \} + E_m \alpha_m T \quad (44)$$

式(43)に式(21)～(23)及び(26)を代入することにより、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_m} G(z) = (1 - \nu_m) \left[\left\{ (1 + V_f + V_i) + \frac{2(V_f + V_i)}{V_m} \right. \right. \\ \left. \left. \times \ln(V_f + V_i) \right\} C''(z) - \frac{V_f}{R_f^2} A(z) \right] / 2E_m \\ - \frac{\nu_m}{E_m} \left\{ \sigma_m^\infty + 4 \frac{V_f}{R_f^2} C(z) \right\} + \alpha_m T \end{aligned} \quad (45)$$

同様に、式(39)に式(32)～(35)を代入し次式を導く。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_m} \left\{ G(z) - \frac{A(z)}{R_i^2} \right\} = (1 - \nu_f) \left[\left\{ \ln \frac{1}{V_f} - \ln(V_f + V_i) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \left(V_i + V_m + \frac{V_f V_m}{V_f + V_i} \right) \right\} C''(z) \right. \\ \left. + \frac{V_f V_m}{V_f + V_i} \frac{A(z)}{R_f^2} \right] / 2E_f - \frac{\nu_f}{E_f} \left\{ \sigma_f^\infty - 2 \frac{V_i + V_m}{R_f^2} \right. \\ \left. + \frac{V_m}{R_f^2} \right\} C(z) + \alpha_f T \end{aligned} \quad (46)$$

式(46)に式(45)を代入し式(15)、(16)を用いることにより、次のように示される。

$$A = -2\phi - 2\beta C(z) + \gamma R_f^2 C''(z) \quad (47)$$

ここで、

$$\alpha = \frac{1 + \nu_m}{E_m} \frac{V_f}{V_f + V_i} + \frac{1 - \nu_m}{E_m} V_f + \frac{1 - \nu_f}{E_f} \frac{V_f V_m}{V_f + V_i} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \beta = \left\{ \frac{2\nu_f}{E_f} \left(V_i + V_m + \frac{V_f V_m}{V_f + V_i} \right) + \frac{4\nu_m}{E_m} V_f \right\} / \alpha \quad (49) \\ \gamma = \left[\frac{1 - \nu_m}{E_m} \left\{ (1 + V_f + V_i) + \frac{2(V_f + V_i)}{V_m} \ln(V_f + V_i) \right\} \right. \\ \left. - \frac{1 - \nu_f}{E_f} \left\{ \ln \frac{1}{V_f} - \ln(V_f + V_i) - \frac{1}{2} \left(V_i + V_m + \frac{V_f V_m}{V_f + V_i} \right) \right\} \right] / \alpha \end{aligned} \quad (50)$$

式(44)に式(21)～(23)及び(27)を代入して次式を導く。

$$\begin{aligned} H_m'(z) = \left[\frac{2(1 + \nu_m)}{E_m} \left\{ \frac{1}{V_m} \ln(V_f + V_i) + 1 \right\} \right. \\ \left. + \frac{(1 + V_f + V_i)}{E_m} - \frac{2\nu_m(V_f + V_i)}{E_m V_m} \ln(V_f + V_i) \right] C''(z) \\ + \frac{1}{8\mu_m} \left\{ \frac{1}{V_m} \ln(V_f + V_i) + 1 \right\} A''(z) + \frac{R_f^2}{8\mu_m V_f} (1 + V_f + V_i) G''(z) \\ + \frac{4V_f}{E_m R_f^2} C(z) + \frac{\nu_m V_f}{E_m R_f^2} A(z) + \frac{\sigma_m^\infty}{E_m} + \alpha_m T \end{aligned} \quad (51)$$

式(40)に式(32)、(33)及び(35)を代入して次式を導く。

$$\begin{aligned} H_f'(z) = \left[\frac{\nu_f}{E_f} \left\{ \ln(V_f + V_i) - \ln \frac{1}{V_f} \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{2E_f} \left(V_i + V_m + \frac{V_f V_m}{V_f + V_i} \right) \right] C''(z) \\ - \frac{1}{16\mu_m} \frac{V_f}{V_f + V_i} A''(z) + \frac{R_f^2}{8\mu_m} G''(z) \\ - \frac{2}{E_f} \left(\frac{V_i + V_m}{R_f^2} + \frac{V_m}{R_i^2} \right) C(z) \\ - \frac{\nu_f}{E_f} \frac{V_f V_m}{V_f + V_i} \frac{A(z)}{R_f^2} + \frac{\sigma_f^\infty}{E_f} + \alpha_f T \end{aligned} \quad (52)$$

式(10)に式(27)、(31)を代入し、次式を導く。

$$\begin{aligned} H_m(z) = \left(\frac{V_f + V_i}{\mu_m} - \frac{V_f + V_i - V_m}{2\mu_i} \right) C'(z) \\ + \frac{1}{8\mu_m} A'(z) + H_i(z) \end{aligned} \quad (53)$$

また、式(8)に式(31)、(35)を代入し、次式を導く。

$$\begin{aligned} H_i(z) = \left[\frac{1}{2\mu_f} \left(V_i + V_m + \frac{V_f V_m}{V_f + V_i} \right) - \frac{1}{2\mu_i} \left\{ 2 \ln \frac{R_f}{R_i} \right. \right. \\ \left. \left. - \left(V_f - \frac{V_f V_m}{V_f + V_i} \right) \right\} \right] C'(z) + H_f(z) \end{aligned} \quad (54)$$

式(53)、(54)より、 $H_i(z)$ を消去し、 z に関して1階微分することにより次式が導かれる。

$$\begin{aligned} H_m'(z) - H_f'(z) = \left\{ \frac{V_f + V_i}{\mu_m} + \frac{1}{2\mu_f} \left(V_i + V_m + \frac{V_f V_m}{V_f + V_i} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2\mu_i} \left(2 \ln \frac{R_f}{R_i} + V_i - V_m + \frac{V_f V_m}{V_f + V_i} \right) \right\} \\ \times C''(z) + \frac{A''(z)}{8\mu_m} \end{aligned} \quad (55)$$

式(55)に式(51), (52)を代入し, 関数 $C(z)$ の4階の微分方程式を得る.

$$R_f^4 C''''(z) - 2a_1 R_f^2 C''(z) + b_1^2 C(z) = 0 \quad (56)$$

ここで,

$$a_1 = -\frac{G}{2F}, \quad b_1 = \left(\frac{H}{F}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (57)$$

さらに, F , G 及び H は次のように定義される.

$$F = \frac{1-\nu_m}{8E_m} \frac{1+V_i}{V_f} \left\{ (1+V_f+V_i) + \frac{2(V_f+V_i)}{V_m} \ln(V_f+V_i) - V_f \gamma \right\} + \frac{\gamma}{8\mu_m} \left\{ \frac{1}{V_m} \ln(V_f+V_i) + \frac{V_f}{2V_f+V_i} \right\} \quad (58)$$

$$G = \frac{2+V_m+\nu_m(V_m-V_f-2V_i)}{E_m} \frac{1+2\nu_f}{2E_f} \times \left(V_i+V_m+\frac{V_f V_m}{V_f+V_i} \right) + \frac{1}{2\mu_i} \left(V_i-V_m + \frac{V_f V_m}{V_f+V_i} \right) + \left(\frac{1}{2\mu_i} - \frac{\nu_f}{E_f} \right) \ln V_f + \left[\frac{2}{E_m V_m} \left\{ (1+\nu_m) \left(1-\frac{\beta}{4} \right) - \nu_m(V_f+V_i) \right\} - \frac{\nu_f}{E_f} - \frac{1}{2\mu_i} \right] \ln(V_f+V_i) + \frac{\beta}{4E_m} \left\{ (1-\nu_m)(1+V_i) - (1+\nu_m) \frac{V_f}{V_f+V_i} \right\} + \gamma \left(\frac{\nu_m V_f}{E_m} + \frac{\nu_f}{E_f} \frac{V_f V_m}{V_f+V_i} \right) \quad (59)$$

$$H = \left\{ \frac{4V_f}{E_m} + \frac{2}{E_f} \left(V_i+V_m+\frac{V_f V_m}{V_f+V_i} \right) - 2\beta \left(\frac{\nu_m V_f}{E_m} + \frac{\nu_f}{E_f} \frac{V_m V_f}{V_f+V_i} \right) \right\} \quad (60)$$

この微分方程式の一般解は

$b_1 > a_1$ のとき

$$C(z) = \left(C_1 \cos \frac{q}{R_f} z + C_2 \sin \frac{q}{R_f} z \right) e^{\frac{p}{R_f} z} + \left(C_3 \cos \frac{q}{R_f} z + C_4 \sin \frac{q}{R_f} z \right) e^{\frac{p}{R_f} z} \quad (61)$$

$b_1 = a_1$ のとき

$$C(z) = (C_1 + C_2 z) e^{\frac{p}{R_f} z} + (C_3 + C_4 z) e^{\frac{p}{R_f} z} \quad (62)$$

$b_1 < a_1$ のとき

$$C(z) = C_1 e^{\frac{p+q}{R_f} z} + C_2 e^{\frac{p-q}{R_f} z} + C_3 e^{\frac{-p+q}{R_f} z} + C_4 e^{\frac{-p-q}{R_f} z} \quad (63)$$

ここで, パラメータ p, q は $p \geq 0, q \geq 0$ であり,

$$p = \left\{ \frac{(a_1 + b_1)}{2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad q = \left\{ \frac{|a_1 - b_1|}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (64)$$

で与えられる.

境界条件(13), (14)及び式(18), (19), (33)より

$$C'(0) = 0, \quad C(0) = \sigma_f^\infty / \left\{ 2 \left(\frac{V_i + V_m}{R_f^2} + \frac{V_m}{R_i^2} \right) \right\} = C \quad (65)$$

$$C'(L) = 0, \quad C(L) = \sigma_f^\infty / \left\{ 2 \left(\frac{V_i + V_m}{R_f^2} + \frac{V_m}{R_i^2} \right) \right\} = C \quad (66)$$

境界条件(65), (66)より, 関数 $C(z)$ の4階の微分方程式の一般解の任意定数 C_1, C_2, C_3, C_4 を以下のように決定できる. 本研究の計算例では, $b_1 < a_1$ なので以下, その場合について示す. 他の場合については容易に導出できる.

$$C_1 = -C \left\{ -1 + e^{\frac{L(p-q)}{R_f}} \right\} \frac{(p-q)}{2M} \quad (67)$$

$$C_2 = -C \left\{ -1 + e^{\frac{L(p+q)}{R_f}} \right\} \frac{(p+q)}{2M} \quad (68)$$

$$C_3 = -C e^{\frac{L(p-q)}{R_f}} \left\{ -1 + e^{\frac{L(p+q)}{R_f}} \right\} \frac{(p+q)}{2M} \quad (69)$$

$$C_4 = -C e^{\frac{L(p+q)}{R_f}} \left\{ -1 + e^{\frac{L(p-q)}{R_f}} \right\} \frac{(-p+q)}{2M} \quad (70)$$

ここで,

$$M = p \left\{ e^{\frac{L(p+q)}{R_f}} - e^{\frac{L(p-q)}{R_f}} \right\} - q \left\{ 1 - e^{\frac{2pL}{R_f}} \right\} \quad (71)$$

繊維, 界面相及びマトリックスの変位 u_r は, 式(26), (30), (34)より求めることができる. また, 繊維, 界面相及びマトリックスの変位 u_z は, 式(40), (42), (44)を用いて平均化することにより決定することができる.

以上より応力及び変位を求めることができる.

2.5 繊維破断発生に伴うヤング率の低下予測

前述において, Fig. 1に示すような繊維破断が発生した円筒形モデルの応力及び変位場を解析した. ここでは, それらをもとに繊維破断を有する円筒形モデルのヤング率を求める.

繊維破断が発生した円筒形モデルの z 方向のひずみを ϵ_c とすると, 次式が成り立つと考えられる.

$$\bar{u}_z^m(L/2) = \frac{L}{2} \epsilon_c \quad (72)$$

ここで, $\bar{u}_z^m(z)$ はマトリックスの z 方向の平均変位であり, 式(21)~(23)を式(44)に代入することにより次式で与えられる.

$$\bar{u}_z^m(z) = \epsilon z + \frac{\nu_m}{E_m} \left\{ V_f \gamma - (1+V_f+V_i) - \frac{2(V_f+V_i)}{V_m} \ln(V_f+V_i) \right\} C'(z) - \frac{2V_f}{E_m} (2-\nu_m \beta) \frac{\bar{C}(z) - \bar{C}(0)}{R_f^2} \quad (73)$$

ただし,

$$\bar{C}(z) = \int_z^\infty C(x) dx \quad (74)$$

式(73)において、関数 $C''(z)$, $\bar{C}(z)$, $\bar{C}(0)$ は全ての項に係数 C を持つ形で次式のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} C'(z) &= CS'(z) \\ \bar{C}(z) &= C\bar{S}(z) \\ \bar{C}(z) &= C\bar{S}(0) \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

式(72), (73)及び(75)より、次式が得られる。

$$\varepsilon_c = \varepsilon + \frac{\sigma_f^0 R_f^2}{L\{V_i + V_m + V_f V_m / (V_f + V_i)\}} \xi \quad (76)$$

ここで、 ξ は次式のように定義される。

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\nu_m}{E_m} \left\{ V_f \gamma - (1 + V_f + V_i) - \frac{2(V_f + V_i)}{V_m} \right. \\ &\quad \times \ln(V_f + V_i) \Big\} S'(L/2) \\ &\quad - \frac{2V_f(2 - \nu_m \beta)}{E_m} \frac{\bar{S}(L/2) - \bar{S}(0)}{R_f^2} \end{aligned} \quad (77)$$

式(15)₁を式(76)に代入

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= \varepsilon + \frac{R_f^2 \xi}{L\{V_i + V_m + V_f V_m / (V_f + V_i)\}} \\ &\quad \times \left\{ E_f(\varepsilon - \alpha_f T) - 2\nu_f V_m \frac{\phi}{R_i^2} \right\} \end{aligned} \quad (78)$$

式(16)より

$$\frac{\phi}{R_i^2} = \lambda \{ (\nu_m - \nu_f) \varepsilon + (1 + \nu_f) \alpha_f T - (1 + \nu_m) \alpha_m T \} \quad (79)$$

ただし、

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_m} + \frac{V_f + V_i}{k_m} + \frac{V_m}{k_f} \right), \quad k = \frac{\mu}{1 - 2\nu} \quad (80)$$

式(78), (79)より、

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= \left[1 + \frac{R_f^2 \xi \{ E_f - 2\nu_f V_m \lambda (\nu_m - \nu_f) \}}{L\{V_i + V_m + V_f V_m / (V_f + V_i)\}} \right] \varepsilon \\ &\quad - \frac{R_f^2 \xi \{ E_f \alpha_f + 2\nu_f V_m \lambda \{ (1 + \nu_f) \alpha_f - (1 + \nu_m) \alpha_m \} \} T}{L\{V_i + V_m + V_f V_m / (V_f + V_i)\}} \end{aligned} \quad (81)$$

ここで、

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_A} + \alpha_A T \quad (82)$$

Table 1 Material properties used in the analysis.

	Young's modulus (GPa)	Poisson's ratio	Thermal expansion coefficient ($\times 10^{-6}/^\circ\text{C}$)
Glass fiber	73.5	0.25	5.0
Epoxy resin	3.66	0.35	60.0
Interphase layer	E_i	0.35	60.0

式(82)を式(81)に代入し、式(83)の形に変形することにより、繊維破断を有する円筒形モデルの応力-ひずみ関係が得られる。

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma}{E_c} + \alpha_c T \quad (83)$$

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{E_A} \left[1 + \frac{R_f^2 \xi \{ E_f - 2\nu_f V_m \lambda (\nu_m - \nu_f) \}}{L\{V_i + V_m + V_f V_m / (V_f + V_i)\}} \right] \quad (84)$$

$$\alpha_c = \alpha_A \left[1 + \frac{R_f^2 \xi \{ E_f - 2\nu_f V_m \lambda (\nu_m - \nu_f) \}}{L\{V_i + V_m + V_f V_m / (V_f + V_i)\}} \right] \quad (85)$$

ここで、 E_c , α_c はそれぞれ繊維破断を有する円筒形モデルの z 方向のヤング率、熱膨張係数である。

3. 解析結果及び考察

材料としては直径 $13.0 \mu\text{m}$ の E ガラス繊維をエポキシ樹脂に埋め込んだ単一繊維複合材料を想定して解析を行った。解析に用いたガラス繊維、界面相、エポキシ樹脂の材料定数を Table 1 に示す。界面相のポアソン比及び熱膨張係数はマトリックスであるエポキシ樹脂と同じ値に仮定した。また、界面相の肉厚は $0.5 \mu\text{m}$ (界面相外半径 $R_i = 7.0 \mu\text{m}$) とし、 $T = -80^\circ\text{C}$ とした。

Fig. 2 に、繊維の軸方向応力の繊維軸方向の変化を示す。縦軸に応力値を、横軸には繊維破断間隔 L で無次元化した z 座標を示す。ここで、繊維破断は $z=0, z=L$ において発生している。 $\varepsilon = 1.0\%$, $L = 0.5 \text{ mm}$, $V_f = 0.01$ とした。繊維破断表面では、応力がゼロになっている。また、繊維破断から離れるにしたがい、界面相からの応力伝達により、繊維における引張応力が増加し、繊維破断

Fig. 2 Axial stress distribution in fiber ($V_f = 0.01$).

Fig. 3 Shear stress distribution in interphase at $r=0.00675$ mm ($V_f=0.01$).

Fig. 4 Effect of interphase Young's modulus on composite Young's modulus reduction ($V_f=0.001$).

間隔中心において最大値をとる。界面相のヤング率が高いほど大きな引張応力をとることが確認できる。

Fig. 3 に、界面相内のせん断応力の繊維軸方向の分布を示す。Fig. 2 と同様、縦軸に応力値、横軸に繊維破断間隔 L で無次元化した z 座標を示す。また、 $\epsilon=1.0\%$ 、 $L=0.5$ mm、 $V_f=0.01$ とした。せん断応力は、界面相のヤング率が高いほど大きく、これは Fig. 2 における繊維の引張応力の増加が界面相のヤング率が高いほど大きいことと対応している。このことから、界面相のヤング率が高いほど界面せん断応力伝達性に優れることがわかる。

Fig. 4 は、繊維破断発生に伴うヤング率の低下に及ぼす界面相のヤング率の影響を示したものである。縦軸にヤング率の低下率を、横軸に試験片 1 cm 当たりの繊維破断数で定義した繊維破断密度を示す。ここで、 $V_f=0.001$ とした。界面相のヤング率が小さいほど、単一繊維複合材料のヤング率の低下率が大きいことがわかる。

4. 結 言

本研究では、単一繊維破断試験で用いられる単一繊維複合材料について、繊維破断が発生した界面相を有する

円筒形モデルを考え、応力及び変位場を求めた。

この解析をもとに、単一繊維複合材料で得られたデータを解釈し、界面特性の評価を行うことが可能になると考えられる。

参 考 文 献

- 1) J.A. Narin & Y.C. Liu : *Composite Interfaces*, **4** (1997), 241-267.
- 2) N. Takeda, D.-Y. Song, K. Nakata & T. Shioya : *Composite Interfaces*, **2** (1994), 143-155.
- 3) D.-Y. Song, N. Takeda, T. Shioya & K. Nakata : *Composites: Part A*, **27A** (1996), 357-364.
- 4) F.M. Zhao, N. Takeda & N. Ikuta : *Proc. 5th Japan Int. SAMPE Symp.* (1997), pp. 743-748.
- 5) F.M. Zhao, N. Takeda & N. Ikuta : *Recent Advancement of Interfacial Materials Science on Composite Materials '97*, Sigma Publishing Co., Tokyo (1997), pp. 523-526.
- 6) F.M. Zhao & N. Takeda : *Proc. 7th Int. Conf. Composite Interface* (1998), pp. 196-197.
- 7) L.N. McCartney : *Proc. R. Soc. Lond.*, **A425**, (1989), 215-244.