解 説

均質化法による新しい数値シミュレーション

高 野 直 樹*

1. は じ め に

マイクロレベルで不均質性を有する複合材料の力学的挙動を解析するための様々な手法がこれまでに提案されてきた。それらの大半は、不均質な複合材料を等価な均質材モデルに置き換え、等価物性値を用いて解析するというものである。この均質材モデルへの置換作業を「均質化(homogenization)」とよぶ。均質化のための種々の手法の中で、本稿で紹介する均質化法(homogenization method)は、その理論の厳密さゆえに複合材料の評価・設計における数々の問題への応用発展性を秘めている。特に、変形・応力評価のみならず、成形プロセスシミュレーションや材料設計に適用した場合、これまでにない新しいシミュレーションと設計指針が得られることが期待される。

そこで、均質化法を持つポテンシャルを幅広い研究者・技術者に理解していただくことを目的として、歴史的背景、理論の概要と特色、応用分野の可能性について述べる。

2. 歴 史 的 背 景

複合材料の等価物性値を算出する最も簡単な方法は複合則であろう。二種類の素材の Voigt モデル(並列に配置された一様ひずみ状態)あるいは Reuss モデル(直列に配置された一様応力状態)により、素材の物性値と体積含有率から等価物性値を算出するものである。これらのモデルにより予測された等価弾性係数が、上界(upper bound)と下界(lower bound)であることは Hill¹⁾や Hashin と Shtrikman²⁾により示されている。等価弾性係数のみならず、たとえば樹脂透過係数(permeability)についても一方向繊維強化材に対して体積含有率の関数として簡単な予測式が提案されており³⁾、これも一種の複合則といえよう。しかし、体積含有率にはマイクロレベルでの繊維の配置、すなわち幾何的情報は含まれず、複

雑なマイクロ構造の強化形態をとる幅広い複合材料への適用には問題があることは自明である。また、上下界の予測は有意義であるが、正確な値の予測がしたいという要望が生まれるのも自然である。均質化法はこうした問題点の解決法として有力である。また、複合材料の力学の学問的体系化に大きく貢献するとともに、設計・製造の現場においても役立つものである。

均質化法の理論は、主として 1970 年代後半頃にフランスの数学者 Lions⁴⁾ のグループを中心として構築された。最近では、他の種々の均質化のための手法(たとえば Eshelby の等価介在物理論)と区別するために数学的均質化法(mathematical homogenization method)とよんでいる論文も見受けられる。また、1970 年代の同時期に旧ソ連⁵⁾や米国⁶⁾においても同じ理論体系の構築と数値解析との融合が図られた。1980 年代前半には一方向繊維強化材に対する有限要素法による数値解析結果が発表され、Halpin-Tsai の式との比較などが議論されている⁷⁾。我が国では 1975 年に植村の式が発表されているが、こうした材料力学的アプローチと均質化法のような応用数学的アプローチの接点が生まれたのは、1990 年代に入ってからのことである。特に Guedes と Kikuchi⁸⁾ は、数値解析との融合を明記すべく、均質化法の定式化を弱形式で示し、いくつかの解析例を示した。弱形式での表記は有限要素法の知識がある人には理解が容易である。筆者も、テンソル表記⁹⁾やベクトル・マトリクス表記¹⁰⁾での定式化の解説や有限要素式⁹⁾を示してきた。そこで、本稿では理論の本質を理解いただくためにあえて強形式に立ち回り、極力式を使わずに均質化の真意を伝えることに努める。なお、以下の定式化で太字はベクトルまたはテンソルを意味する。

3. 均質化法の概要

3.1 問題設定と支配方程式

マイクロレベルで不均質性を有する複合材料を考える。この材料よりなる構造体に表面力が作用する時の変形挙動を考える。構造体を記述する通常の座標系(マクロ座標系とよぶ)を $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ とし、構造体の代表寸法を

* Naoki TAKANO: 大阪大学大学院工学研究科生産科学専攻(565-0871 吹田市山田丘 2-1)

図1 ミクロ・マクロ座標系と RVE

L とする。構造体の挙動はミクロな不均質性の影響を受けたものになるが、構造体の全域にあるミクロな不均質性を直接的にすべて考慮することは計算能力から不可能である。そこで、図1のように構造体の中のある微小領域におけるミクロな不均質性を考え、この微小領域の特性を評価しさえすれば、その特性により構造体の全体挙動を代表的に表現できるとする。この代表的な微小領域を RVE (representative volume element) あるいはユニットセルとよぶ。すなわち、1つの RVE により複合材料を等価な均質材モデルに置き換える。均質材モデルであるから、構造体の全域において同じ RVE が存在していると考えることになり、RVE が周期的に配列していると考え、RVE の代表寸法を l とする。構造体の代表寸法との比を

$$\varepsilon = \frac{l}{L} \quad (1)$$

と定義すれば、一般に $\varepsilon \ll 1$ である。そこで、RVE において表現するミクロな不均質性を記述するのに便利なミクロ座標系 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ を定義し、

$$y_i = \frac{x_i}{\varepsilon} \quad (2)$$

により関連づける。ミクロ座標系はミクロ-マクロのスケール比 ε により正規化された座標系となる。また、RVE

の領域を Y とする ($\mathbf{y} \in Y$)。

構造体の領域を $\Omega (\mathbf{x} \in \Omega)$ ，表面力 $\mathbf{t}$ が作用する境界を Γ_t とすれば、物体力を考慮した静的問題は、

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon + \mathbf{f}^\varepsilon = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{on } \Gamma_t \end{cases} \quad (3)$$

と記述される。ここで、応力などの物理量はスケール比に依存したものとなるため、上添字に ε をつけている。また、素材の構成式 (応力-ひずみ関係式) をミクロレベルで考え、構成式と弾性テンソルを

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) \\ \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{y}) \end{cases} \quad (4)$$

のように書く。 $\mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)$ は変位 $\mathbf{u}^\varepsilon$ を微分して得られるひずみを表す。式 (4) の第2式の意味は、左辺においてマクロ座標系ではミクロな不均質性を表現するのに不便なためスケール比に依存するだけ表現しているのに対し、右辺ではミクロ座標系を使えば明確に素材の特性を (例えば繊維と樹脂の区別を) 表現できるということである。構成式はあくまで素材レベルで定義されるものであることに留意されたい。

3.2 漸近展開式

均質化法では、式 (3) を解くために、次の漸近展開式を用いる。

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (5)$$

この式の意味は後に説明を加えるが、 $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ はミクロな不均質性と同じ周期をもつ $\mathbf{y} \in Y$ に関する周期関数である (これを Y-periodic とよぶ)。式 (5) より、ひずみと応力は式 (2) を考慮して以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{e}^y(\mathbf{u}^0) + \{\mathbf{e}^x(\mathbf{u}^0) + \mathbf{e}^y(\mathbf{u}^1)\} \\ &\quad + \varepsilon \{\mathbf{e}^x(\mathbf{u}^1) + \mathbf{e}^y(\mathbf{u}^2)\} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \boldsymbol{\sigma}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (7)$$

ただし、式 (6) において上添字の $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ は微分をどの座標系に関して行うかを明示したものである。以上の漸近展開式を式 (3) の支配方程式に代入し、 ε の指数ごとに整理し、考察を加えると、

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) \quad (8)$$

を得る。すなわち、 $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ は $\mathbf{y}$ に独立であり、均質材モデルで置き換えて得られる構造体の平均的な (あるいは均質化された) 変位である。このことから、式 (5) の漸近展開式について説明を加える。

構成式をミクロレベルで考えたように、変位もミクロレベルで考えたものを真の変位とすれば、図2のようにミクロな不均質性の影響により周期的に変動したものに

図2 漸近展開式の説明 (1)

なるはずである。漸近展開式の第1項 $u^0(x)$ はその平均的な変位であり、それからのずれが漸近展開式の第2項になる。第2項は微小項となり、ミクロ座標系 y で記述した方が便利であり、式(2)の座標系の変換則によりスケール比を乗じたものとなる。

また別の説明を行うならば、図3(a)のように繊維強化材のRVEをとり、引張やせん断変形させた時の挙動を考える。均質材モデルにより解析したならば、得られる変形 $u^0(x)$ は図3(b)のようになり、繊維と母材の区別はできなくなる。破線のような繊維の変形の推測は正しくない。図3(a)の真の解と均質材モデルによる解の差は図3(c)のようになる。この差はミクロな不均質性により生じる項であり、これが漸近展開式の第2項である。

3.3 ミクロ・マクロ方程式

漸近展開式を支配方程式に代入して整理した結果、

$$\operatorname{div}_y \sigma^0 = 0 \quad \text{in } Y \quad (9)$$

を得る。下添字はミクロ座標系 y に関して微分を行うものであることを意味しており、RVE に対して周期境界条件を与えて解く方程式である。支配方程式(3)の第1式と比較すれば、物体力に関する項がない。物体力は外力の一つであるから、これがない式(9)は周期境界条件の下での自己平衡を表している。この点は直接 RVE に分布力や変位を与えて有限要素解析する場合と大きく異なるキーポイントの一つである。

では外力との平衡についてはどのように記述されるかと言えば、式(9)の解である応力 σ^0 の RVE 領域での体積平均として定義される

$$\Sigma = \langle \sigma^0 \rangle \quad (10)$$

を用いて、

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x \Sigma + \langle f \rangle = 0 & \text{in } \Omega \\ \Sigma \cdot n = t & \text{on } \Gamma_t \end{cases} \quad (11)$$

のように導かれる。この導出において均質材モデルの特性として、

(a) 実際の変形

(b) 均質材モデルによる変形

(c) 不均質性による変形

図3 漸近展開式の説明 (2)

$$\Sigma = E^H e^x(u^0) \quad (12)$$

なる均質化された弾性テンソル E^H が導出される。 Σ はいわゆるマクロ応力であり、 $e^x(u^0)$ はマクロひずみである。上式の解法や均質化された弾性テンソルの計算法については文献⁸⁻¹⁰⁾に詳しいので本稿では細かいことは省く。式(11)、(12)だけを見れば、古典的な複合材料の力学と変わるところはないが、自己平衡を満たす応力の体積平均として定義されたマクロ応力が外力と平衡すると考える、というのが均質化の本質である。マクロ応力は式(10)のように定義されるものであり、RVEのとり方に依存する曖昧な量である。むしろミクロレベルで構成式とともに考える応力 $\sigma^0(x, y)$ の方が素性のはっきりした量と言える。

解析においては、ミクロ方程式(9)とマクロ方程式(11)を連成して解く。原則から言えば、構造体の全域においてミクロレベルで応力 $\sigma^0(x, y)$ を解かないと、その体積

平均である Σ もわからないので、解析コストは天文学的な数字となり解析は到底不可能となるが、均質化法はミクロ-マクロ連成を RVE の周期境界条件も取り込んで定式化の中で考察してあるので、逐次的に解析を進めることができる。これが均質化法の便利な点である。応力の計算手順としては、 Σ が構造体の全域 Ω においてまず求まり、次に必要な部位 $x \in \Omega$ においてのみ $\sigma^0(x, y)$ を簡単に知ることができる。均質化法という応用数学理論が、我々のニーズに応じた形式に編纂されていることに感心する。

3.4 均質化における留意事項

均質材モデルに置き換えるための厳密な理論である均質化法から、均質化が可能となる条件が次の2点であることが理解できる。

- (1) RVE の周期性が満足される領域に適用できる。
- (2) マクロ場が一様である領域に適用できる。

周期性の考え方は3.1の最初にふれた通りである。また、RVE による解析において、境界条件の設定の重要性を論じた文献¹¹⁻¹³⁾からも、周期境界条件を考慮した均質化法の有効性が理解できる。また、周期性は幾何的配置のみならず、応力やひずみなどの物理量についても要求される。RVE の周期繰返し構造として表現できる領域では、マクロ応力やマクロひずみは一様でなくてはならないことがわかる。

上記の2つの条件は、均質化法に限らず、他の手法においても必要であるし、実験的に等価物性値を測定する際にも、理論との整合性を考えるなら必要である。たとえば、実験において式(12)を考える際に、応力の定義(式(10))にも留意が必要であるし、一様場の条件が満足される必要があることが改めて認識される。さらなる議論は、これらの点について理論・実験・数値解析の立場から考察した文献¹⁴⁻¹⁶⁾を参照されたい。

4. 成形プロセスシミュレーションへの応用例

Guedes と Kikuchi による均質化法の論文⁸⁾以来、複合材料のミクロ-マクロ連成応力解析に関する論文が主に計算力学分野の雑誌に多数発表されてきた。損傷進展解析、粘弾塑性解析、大変形解析や熱伝導との連成解析などである。それらのレビューは文献¹⁷⁻¹⁹⁾を参照されたい。外力を負荷した場合の変形・応力解析にとどまらず、ミクロ構造に基づくシミュレーションが重要かつ有効と思われる成形プロセスシミュレーションへの応用例を紹介する。本誌に「先進複合材料の知的基盤整備とその戦略」と題した解説²⁰⁾が掲載され、その中の一つに成形プ

ロセスの低コスト化とプロセスシミュレーションの重要性があげられていることは読者の記憶にも新しいであろう。

4.1 編物複合材料の深絞り成形シミュレーション

当初、線形問題に対して提示された均質化法は、上記のように実問題への適用が試みられる中で種々の非線形問題の解法として拡張されてきた。その中で、大変形問題の定式化を行い¹⁴⁾、深絞り成形シミュレーションを行った結果²¹⁾の概要を紹介する。繊維強化複合材料の深絞り成形は一部の実験結果が報告されているのみで、まだ実用の域には達していないが、新しい成形法の開発にシミュレーションを役立てるという一例として紹介する。

対象としては、熱可塑性樹脂を母材とする編物複合材料を取りあげる。具体的にはアラミド繊維とポリプロピレンとする。プロセスとしては、編布とポリプロピレンシートを用いてホットプレスにより編物複合材料の定型平板を作製した後、任意の形状に深絞りにより成形する。この時、材料設計の因子としては素材の選定、編み構造があげられ、プロセス設計の因子として成形温度な

(a) 繊維束と樹脂のモデル

(b) 繊維束のモデル

図4 編物複合材料のRVEモデル

どがあげられる。成形温度は主に母材の特性に関係する。いずれも、ミクロレベルで考慮される因子である。母材の特性が重要であるという点で、いわゆる布のドレープシミュレーションとは異なる。また、織布のドレープシミュレーションで無視されている繊維の伸びも、編布の場合には無視できない。そこで、連続体力学に基づく均質化法により大変形挙動を解析する。図4に編物複合材料のRVEの有限要素モデルを示す。3次元六面体要素により分割されており、要素数は5,792、節点数は6,665である。RVE内で2層の積層がなされている。繊維束は繊維体積含有率60%として素材の物性値から直交異方性材料としてモデル化されている。

成形過程は443 Kの等温過程とした。443 Kにおいて

は、ポリプロピレンのヤング率を測定すると約7 MPa程度しかなく、編物複合材料の引張試験を行うと、大変形して、一様場を得ることが極めて困難である¹⁴⁾。一方、均質化法による大変形解析であれば、多軸応力下で、周期性を満足した一様場の模擬を行うことができる。また、せん断変形を加えた場合には、編物複合材料の直交性が失われ、等価な均質材モデルの特性を表現するためのパラメータの数が多く、もはや実験的に厳密な均質化作業を行うことは不可能となる。均質化法では、均質化された弾性テンソルの21成分が計算されるので、このような心配はない。そこで、弾性テンソルの21成分のパラメータを、面内の2軸のマクロひずみの成分に関して計算し、データベース化した。この均質化された弾性パラメ

図5 編物複合材料の深絞り成形シミュレーション

図 6 編物複合材料の深絞り成形品におけるマイクロ構造の観察結果

表 1 深絞り成形における実験とシミュレーションの比較

		b/a	c/a
成形前		0.57	0.31
成形前	シミュレーション	0.78	0.36
	実験	0.77	0.39

ータを用いて、深絞り成形シミュレーションを行った結果を図5に示す。マクロモデルの要素ごとに RVE を定義し、増分解析のステップごとに更新することにより、マイクロ-マクロ連成を考慮した。したがって、図5に示すように、成形品の部位ごとにマイクロ構造の変形を予測することができている。底部 A ではマイクロ構造の変形は小さく、側部 B では編物の wale 方向に大きく伸ばされている。C 部では、せん断変形が生じている。これらの変形状態は、実験結果とも定性的・定量的に一致することが確認された²¹⁾。定量的比較の一例として、図6に側部 B におけるマイクロ構造の変形状態の CCD カメラによる観察結果を示し、代表寸法の比較を表1に示す。

これまで、均質化法の理論の厳密性は示されてきたものの、実験との比較については、織物複合材料の弾性係数の比較があった程度であった。本例のように大変形後のマイクロ構造の変形解析の妥当性が示されたことで、理論や解析の信頼性は増すものと考ええる。マイクロ構造の変形状態が予測できるということは、成形品中の剛性分布も計算されており、ひずみや応力の予測とともに、成形品の特性評価に生かすことができる。また、上述の設計因子の影響について詳細に検討することができるので、材料設計、プロセス設計の両面においてシミュレーションが活用できる。

(a) 格子充填配置

(a) 六方充填配置

図 7 一方向繊維強化複合材料の RVE モデル

4.2 樹脂透過係数の解析

複雑形状の賦形性とプロセスの低コスト化を狙った RTM 成形に関する研究が最近盛んに行われている。諸外国ではすでにマクロな立場で均質材モデルとして扱う RTM 成形シミュレーションのソフトウェアが開発されている。RTM 成形シミュレーションの基礎式の一つにダルシー則 (Darcy's law) があり、その係数を樹脂透過係数 (permeability) とよぶ。諸外国ではすでに、樹脂透過係数に関する実験的・解析的研究や種々の強化基材に対する樹脂透過係数のデータベース化がなされているのに対し、我が国では少なくとも学界レベルでは後れをとっているように感じる。

樹脂の挙動を考えるには、均質化法を非構造問題に適用する必要がある。筆者らは、固体 (繊維) の変形と樹脂流動の相関を考慮した固液複合体用の均質化法²²⁾を用い、樹脂等価性の評価を行ってきた。複雑なマイクロ構造をとる種々のテキスタイル複合材料への応用については文献²³⁾に発表済みである。本稿では、従来より簡単な

図8 樹脂透過係数の予測結果と従来の予測式との比較

予測式がある一方向繊維強化複合材料の樹脂透過係数を均質化法により予測した結果について記す。

図7に、一方向繊維強化複合材料の2種類の充填状況に対するRVEの有限要素モデルを示す。繊維体積含有率を変化させていくつかのモデルに対して均質化法により計算した樹脂透過係数を、Kozeny-Carmanの式およびGebartの式³⁾と比較した結果を図8にまとめて示す。図の縦軸は樹脂透過係数を繊維半径の2乗で除して示している。ただし、Kozeny-Carmanの式の適用にあたっては、Kozeny定数として文献より11.0という値を引用して用いている。Gebartの式は、2種類の繊維充填状況の違いが予測できる式である。図より、均質化法による予測結果が妥当であることがわかる。

構造問題と同様に、非構造問題においても任意の複雑なマイクロ構造が扱えるという利点に変わりはなく、樹脂透過係数は2階のテンソルとして一般的な定義がなされている。また、周期性の条件やマクロ場の一様性の条件の取扱いについても同様である。均質化法によれば、予備実験を一切行うことなく樹脂透過係数を予測できるため、既存のRTM成形シミュレーションのソフトウェアのプリプロセッサとして直ちに使用することができる。織り方の異なる基材の比較や、基材の置き方などの設計に役立てることができる。

さらに、応力解析の場合と同様の手順で、マクロ解析の後に必要な箇所だけマイクロな流れ場を解析することもでき、RTM成形シミュレーションのポストプロセッサとして実際のマイクロ場を知ることできると考え、現在研究を進めている。樹脂透過係数はマイクロ場の平均値にしかすぎず、重要な情報が体積平均をとる際に失われる

(a) RVE

(b) RVEの周期繰返し構造

図9 ポアソン比が負となる材料のマイクロ構造の設計例

ことがあろうが、平均をとる前の実際のマイクロ場を直接評価することができれば、基材の設計に加え、樹脂注入口の位置決定などのプロセス設計にも役立つと期待している。

5. ミクロ構造設計

均質化法の能力の一つは、マイクロ構造が与えられた時に、等価なマクロな特性を予測することである。逆に、所望のマクロ特性を与えた時に、それを実現するようなマイクロ構造を求めようという逆解析を行うのが、均質化法によるマイクロ構造設計の考え方である。このような設計問題への均質化法の展開は、複合材料の挙動解析に適用されるより早くから考えられている。それらのレビューは文献²⁴⁾を参照されたい。

一例として、ミシガン大学のKikuchiら²⁵⁾によるポアソン比が負となる材料のマイクロ構造設計結果を図9に示す。つまり、材料のマイクロ構造が、図9(b)のようなRVEの周期繰返し構造としてある時には、材料のマクロなポ

アソン比が負になるということである。これは多孔質材として実現された例である。同様の計算は、2種類の素材を考えて、線膨張係数に対しても報告されている。

さらに筆者らは、単一のマイクロ構造 (RVE) の周期繰返しだけでなく、構造中に多種類の RVE が存在する時、RVE の分布をも設計しようとする傾斜マイクロ構造設計の概念と設計法を提案してきた²⁴⁾。傾斜マイクロ構造設計の実現のために、均質化法と有限要素法という CAE 技術を、CAD や RP (rapid prototyping) と融合してきた。

今後、このような数値的に生み出された新しいマイクロ構造を実現するような製造法の研究が追隨してくることを期待する。

6. おわりに

均質化法という応用数学理論により、複合材料のマイクロ不均質性を考慮した新しい数値シミュレーションの道が開けることを幅広い読者に理解いただくために、理論の本質の解説と成形プロセスシミュレーションとマイクロ構造設計への応用事例を紹介した。いずれの応用分野においても、新しい知見を与え、材料開発の助けとなるものと期待している。難しい理論を考えるのは数学者や計算工学者かも知れないが、それを使いこなすのは材料開発に携わる者でなければならない。実験をする際にも、均質化の本質を理論に学べば、実験方法の工夫もできる。本稿が互いのギャップを埋める一助になれば幸いである。これをきっかけに、理論や数値シミュレーションの本道に多くの研究者・技術者が参入され、大きな発展を遂げることを期待してやまない。なお、本稿における理論の記述にあたっては文献²⁶⁾を参考にしたことを付記する。

参考文献

- 1) R. Hill : *Proc. Phys. Solids* (1951), 349-354.
- 2) Z. Hashin & S. Shtrikman : *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, 2 (1963), 127-140.
- 3) B.R. Gebart : *J. Composite Mater.*, **26**, 8 (1992), 1100-1133.
- 4) J.L. Lions : *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control*, Science

- Press (1981).
- 5) N. Bakhvalov & G. Panasenko : *Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media*, Kluwer Academic Publishers (1984).
- 6) I. Babuska : *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, Springer-Verlag (1976), pp. 137-153.
- 7) G. Duvaut : *Trends and Application of Pure Mathematics to Mechanics*, Springer-Verlag (1984), pp. 35-62.
- 8) J.M. Guedes & N. Kikuchi : *Computer Methods Appl. Mech. Eng.*, **83** (1990), 143-198.
- 9) N. Takano, Y. Uetsuji, Y. Kashiwagi & M. Zako : *Modelling Simulation Mater. Sci. Eng.*, **7**, 2 (1999), 207-231.
- 10) 高野直樹, 座古 勝 : 日本機械学会論文集, **61**, 583 A (1995), 589-594.
- 11) S.J. Hollister & N. Kikuchi : *Computational Mech.*, **10** (1992), 73-95.
- 12) S.J. Pecullan, L.V. Gibiansky & S. Torquato : *J. Mech. Phys. Solids*, **47** (1999), 1509-1542.
- 13) 中谷彰宏, 北川 浩, 西山英俊 : 日本機械学会論文集, **64**, 628 A (1998), 2889-2894.
- 14) N. Takano, Y. Ohnishi, M. Zako & K. Nishiyabu : *Int. J. Solids Struct.*, **37** (2000), 6517-6535.
- 15) N. Takano, M. Zako & M. Ishizono : *J. Computer-Aided Mater. Design*, **7**, 2 (2000), 111-132.
- 16) 高野直樹, 座古 勝 : 日本複合材料学会第 24 回複合材料シンポジウム講演要旨集 (1999), pp. 83-84.
- 17) 高野直樹, 座古 勝 : 計算工学, **1**, 4 (1996), 212-219.
- 18) 高野直樹, 座古 勝 : 材料, **46**, 1 (1997), 97-102.
- 19) 高野直樹 : 有限要素法のための材料モデリング, 日本機械学会講習会教材, 99-95 (2000), pp. 21-28.
- 20) 平野一美 : 日本複合材料学会誌, **26**, 1 (2000), 3-8.
- 21) 高野直樹, 座古 勝 : 日本複合材料学会 2000 年度研究発表講演会予稿集 (2000), pp. 35-36.
- 22) K. Terada, T. Ito & N. Kikuchi : *Computer Methods Appl. Mech. Eng.*, **153** (1998), 223-257.
- 23) 高野直樹, 寺田賢二郎, 座古 勝, 吉岡智美 : 日本複合材料学会誌, **26**, 5 (2000), 171-178.
- 24) 高野直樹, 座古 勝, 中川雅也 : 日本複合材料学会誌, **26**, 1 (2000), 9-16.
- 25) N. Kikuchi : 私信 (2000).
- 26) 寺田賢二郎 : 複合材/不均質体の数値解析セミナー教材, 富士総合研究所 (1999).