研究論文

複合材料積層梁の層間はく離同定手法開発における はく離のモデル化の影響

稲田 貴臣^{*1}, 島村 佳伸^{*2}, 轟 章^{*3}, 小林 英男^{*4}

(2000 年 11 月 14 日受付)

Effect of Delamination Modeling on Development of Delamination Identification Method of Composite Laminated Beams

Takaomi INADA,^{*1} Yoshinobu SHIMAMURA,^{*2} Akira TODOROKI^{*3} and Hideo KOBAYASHI^{*4}

(Received November 14, 2000)

Damage identification methods using vibration data have attracted attention as health monitoring systems of composite laminated structures. In many papers referred to damage identification methods using vibration data, damage is modeled in stiffness degradation regardless of damage modes. In health monitoring of real structures, identifying size and location of slight delamination, which accompany matrix cracks, is important. However, the relationship between the change of natural frequency caused by stiffness degradation and those caused by actual delamination is unknown. Then, unconfirmed applicability of damage identification method with stiffness degradation model to identifying delamination would be introduced. In the present study, the relationship between stiffness degradation and delamination is investigated in terms of factors that control the natural frequency changes of the structures by using FEM. Applicability of damage identification method to delamination identification is also examined.

1. 緒 言

複合材料積層板は層間強度が低く、外部衝撃等により層間にはく離が形成されやすい。層間にはく離は構造の圧縮強度・剛性を大きく低下させるため、構造健全性の評価において層間にはく離の位置、大きさの同定が重要となる。そこで近年、現場での簡便な非破壊検査手法として振動データを利用した損傷同定法が注目されている¹⁻⁸⁾。

振動データを利用した複合材料の損傷同定法として、ニューラルネットワークを利用した手法^{1,8)}、フレキシビリティマトリックスを利用した手法²⁾、動的残差力を利用した手法³⁾がある。これらの手法では、比較的低次

モードの固有振動数や固有モードからニューラルネットワークを利用して直接的に損傷を同定、あるいはフレキシビリティマトリックスや動的残差力を計算し、損傷を同定している。ここで、損傷は剛性低下(弾性定数低下)に置き換えられることが多く、繊維破断をともなうはく離損傷のように弾性定数低下が明確な損傷に対しては有効である。しかし、実機ではマトリックス割れのみを伴う軽微なはく離損傷の同定も重要であり、この場合には明確な弾性定数低下は生じない。この剛性低下で生じる梁の動特性変化と軽微なはく離損傷で生じる梁の動特性変化との関係は確認されておらず、また、開発した損傷同定手法のはく離同定への適用性も検討されていない。そのため、開発した損傷同定手法を実機に適用する場合、剛性低下とはく離の関係の詳細な検討が不可欠である。

本研究ではマトリックス割れのみを伴う軽微なはく離損傷を対象として、はく離を要素の剛性低下に置き換えた場合(要素剛性低下モデル)、3次元的にはく離を作成した場合(はく離モデル)の動特性の変化を有限要素法で解析し、それぞれの動特性の支配因子から両者の関

^{*1-*} 東京工業大学大学院理工学研究科 (152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1)

Graduate School of Science and Engineering,
Tokyo Institute of Technology, 2-12-1, O-okaya-
yama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, Japan

^{*1} 大学院生 Graduate Student, ^{*2} 助手 Research Associate, ^{*3} 助教授 Associate Professor, ^{*4} 教授 Professor

Fig. 1 Stiffness degraded beam model.

係を検討した。簡単のため、CFRP 積層片持ち梁に幅方向貫通はく離が存在する場合を想定し、従来の損傷同定解析で広く利用され、実機でも測定が容易と推測される 1～3 次モードの固有振動数変化にのみ着目した。また、要素剛性低下モデルで開発した損傷同定手法をはく離同定に適用し、同定精度に対するはく離のモデル化の影響を検討した。

2. 固有振動数変化の原理

一様断面の片持ち梁（全長 L ）が自由振動する場合を考える。梁は均質な等方性材料からなるものとしてヤング率を E 、梁の断面 2 次モーメントを I 、単位長さあたりの質量を μ とすると、梁の固有振動数は次式で表される⁹⁾。

$$\omega_i = \left(\frac{\lambda_i}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (i=1, 2, \dots) \quad (1)$$

式 (1) において λ_i は固有値であり、 EI を曲げ剛性と呼ぶ。損傷後も質量は不変と仮定すると、損傷発生による梁の曲げ剛性低下にしたがい固有振動数も低下することが式 (1) よりわかる。

ここで、損傷の大きさと損傷量（剛性低下量）を一定とし、損傷位置に対する固有振動数変化を考える。このとき、損傷位置に依存して固有振動数低下量は変化する¹⁾。すなわち、損傷の発生により損傷部分の曲げ剛性が局所的に低下するが、それが梁全体の曲げ剛性に影響しやすい部分とにくい部分が存在する。また、損傷位置と損傷量は一定で損傷の大きさが変化する場合、損傷が大きいほど固有振動数の低下は顕著となる。

このように固有振動数は損傷の位置、大きさに応じて変化するため、損傷同定パラメータとして広く利用されている^{1,8)}。本研究では、実機でも測定が容易と推測される 1～3 次モードの固有振動数変化にのみ着目する。

Table 1 Material properties of unidirectional CFRP lamina.

Longitudinal modulus E_1	91.5 GPa
Transverse modulus $E_2 (=E_3)$	8.5 GPa
Longitudinal shear modulus $G_{12} (=G_{13})$	4.3 GPa
Transverse shear modulus G_{23}	3.15 GPa
Major Poisson's ratio $\nu_{12} (= \nu_{13})$	0.31
Transverse Poisson's ratio ν_{23}	0.35
Density ρ	1,466 kg/m ³

3. はく離損傷解析モデル

本研究では汎用有限要素法プログラム ANSYS Rev. 5.5 を使用し、はく離による梁の固有振動数変化を解析する。前述のとおり、本研究ではマトリックス割れのみを伴う軽微なはく離損傷を対象とする。簡単のため、直交積層 CFRP 梁を対象とし、はく離を一樣な剛性低下に置き換えたモデル（要素剛性低下モデル）、3 次元的にはく離を作成したモデル（はく離モデル）を利用して、はく離の位置、大きさの変化に対する固有振動数変化を解析し、それぞれの支配因子を検討する。

3.1 要素剛性低下モデル

要素剛性低下モデルでは、任意要素の剛性を低下させて損傷を模擬する。モデルの作成が容易であり、複合材料の損傷同定解析で広く利用されている^{1～3)}。本研究では、はく離と等価な分だけ剛性を低下させる。

解析対象は $x=0$ の位置を完全固定した片持ち梁とし、梁の積層構成は $[0_2/90_2]_s$ 、長さ L 、幅 b 、厚さ h はそれぞれ 240 mm、19 mm、1.45 mm とした (Fig. 1 参照)。層ごとに繊維配向角や厚さの定義が可能でモデル化が容易なことから、要素には 8 節点四角形要素の積層シェル要素 (shell 99) を使用し、梁の長手方向 (x 方向) を 50 分割、幅方向 (y 方向) を 2 分割して固有振動数解析を実施した。総要素数は 100、総節点数は 405 である。また、解析に使用した一方向 CFRP ラミナ材料定数を Table 1 に示す。

ここで、はく離発生に伴う曲げ剛性低下量を考える。積層構成 $[0_2/90_2]_s$ の梁を 2 種類の材料からなる組み合わせ梁とみなすと、 0° 層のみで置き換えた梁断面は $E_2/E_1 \cong 0.1$ の関係から Fig. 2(a) のようになる。このモデルにおいて、マトリックス割れを伴う片側 $0/90$ 層間のはく離を 90° 層の消滅と近似した場合 (Fig. 2(b) 参照) の曲げ剛性低下量は約 2% となることから、本研究では任意要素の各層の繊維方向ヤング率 E_1 を一様に 2% 低

Fig. 2 Equivalent cross section of the $[0_2/90_2]_s$ beam assumed to composite beam.

下させてはく離による剛性低下を模擬した。便宜上、剛性低下領域（以降、損傷と呼ぶ）の位置、大きさはそれぞれ梁の全長で正規化した値 l/L , a/L で表現する。例えば、Fig. 1 の場合には、損傷の位置、大きさはそれぞれ 0.3, 0.12 となる。

3.2 層間はく離モデル

層間はく離モデルでは各層のヤング率は変更せず、3 次元的にはく離き裂をモデル化した (Fig. 3 参照)。梁の寸法、積層構成等は Fig. 2 の要素剛性低下モデルと同一であるが、はく離き裂を作成するために 2 つの梁を貼り合わせて作成した。その手順を以下に示す。

まず、積層シェル要素を用いて積層構成が $[0_2/90_4]$ と $[0_2]$ の 2 つの梁を作成し、積層構成が $[0_2/90_2]_s$ となるようにこれらを上下に重ねる。このとき、上側の梁 ($[0_2/90_4]$) の節点を梁下面、下側の梁 ($[0_2]$) の節点を梁上面に配置し、上下の要素の節点を同一位置に配置する。そして、はく離部以外では上下の要素の節点同士を完全に結合し、はく離部では上下の梁が同位相で振動するように拘束を加え、一部の片側 $0/90$ 層間にはく離を有する CFRP 積層梁を模擬した。はく離部においてその他の自由度の拘束はなく、はく離上下の梁はそれぞれ独立に伸縮可能である。なお、 90° 層のマトリックス割れが固有振動数に与える影響は小さいと考えられるため、本モデルでは考慮していない。要素分割は要素剛性低下モデルと同一であり、梁が 2 枚となるため総要素数は 200、総節点数は 810 となる。

4. 応答曲面による損傷同定法

固有振動数変化から損傷の位置、大きさを直接同定する逆問題に、従来はニューラルネットワークが利用されてきた^{1,8)}。しかし、ニューラルネットワークでは学習に多くの時間が必要であり、得られた入出力関係の統計的検定は不可能であるため、教師信号以外の解は必ずしも保証されていない。また、実機では高精度な損傷同定

Fig. 3 Delaminated beam model.

よりも簡単ですばやい同定が望ましいと考えられ、本研究では応答曲面法を利用する。応答曲面法は逆問題に対してもニューラルネットワークとほぼ同等の性能であることが確認されている¹⁰⁾。

応答曲面法は影響因子を用いた応答の近似式を求めるために適用される手法であり、製品プロセスの最適化など品質工学の分野で古くから用いられてきた¹¹⁾。応答曲面法は最小二乗法による曲面回帰と、誤差の小さい応答曲面を得るための測定点を決定する実験計画からなる。今回は単純構造の片持ち梁が対象であるため、実験計画は利用していない。

簡単なことから、応答曲面には多項式が利用されることが多い。例として、2 次多項式の応答曲面を考える。このとき、応答曲面は次式で表される。

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j x_j + \sum_{j=1}^n \beta_{jj} x_j^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \beta_{ij} x_i x_j \quad (2)$$

この式は簡単な線形回帰モデルに変換可能であり、未知係数 β は最小二乗法で計算できる。

ここで、 k 個の測定点とその応答 y_i ($i=1, \dots, k$) が与えられている場合を考える。このとき、 p 個の変数の重回帰モデルは次式で表現される。

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kp} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{Bmatrix}$$

ここで、 $\mathbf{y}$ は k 個のモデルから解析された応答の列ベクトルで、 $\mathbf{X}$ は k 個の測定点の集合である。また、 $\boldsymbol{\beta}$ は重回帰の係数ベクトルであり、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は誤差ベクトルであ

る。

最小二乗法より、 β の期待値は次式で表される。

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (4)$$

応答曲面の近似精度を評価するための指標として、重回帰分析等で使用されている自由度修正済み決定係数がある。一般に、モデルの総平方和 S_{yy} は次式のように回帰による平方和 SS_R と残差平方和 SS_E に分解できる。

$$S_{yy} = SS_R + SS_E \quad (5)$$

このとき、自由度修正済み決定係数は次式で表される。

$$R_{\text{adj}}^2 = 1 - \frac{SS_E}{S_{yy}} \cdot \frac{k-1}{k-p} \quad (6)$$

したがって、近似精度が高いほど R_{adj}^2 の値が 1 に近づく。

本研究では、梁の固有振動数から損傷（はく離）の位置、大きさを同定する逆問題に対して応答曲面法を適用する。式 (2) において説明変数 x を 1~3 次モードの固有振動数とし、被説明変数 y が損傷の位置、大きさの応答曲面をそれぞれ作成する。ただし、損傷の位置、大きさと固有振動数変化との関係は複雑なことから、応答曲面には 3 次多項式を利用する。

5. 結果と考察

5.1 固有振動数変化の解析

Fig. 1 の要素剛性低下モデルにおいて、損傷の大きさを 0.04~0.14 の範囲（刻み幅：0.02）、位置を 0~1 の範囲（刻み幅：0.1）で変化させたときの 1~3 次モードの固有振動数変化を順に Fig. 4(a)~(c) に示す。また、Fig. 3 の層間はく離モデルにおいて、はく離の位置・大きさを同様に变化させたときの 1~3 次モードの固有振動数変化を順に Fig. 5(a)~(c) に示す。簡便のため、損傷の大きさが 0.04（○印）、0.08（△印）、0.12（◆印）の 3 種類の結果のみを示した。損傷（はく離）に伴う各モードの固有振動数変化の様子を明確にするため、Fig. 4, 5 では横軸に梁の全長で正規化した損傷（はく離）位置をとり、縦軸に $[-1, 1]$ の範囲に正規化した梁の固有振動数 $\bar{\omega}_{(i)}$ （ $i=1, 2, 3$ ）を示した。ここで、任意のはく離を有する梁の固有振動数を $\omega_{(i)}$ とすると、正規化固有振動数 $\bar{\omega}_{(i)}$ は次式で計算される。

$$\bar{\omega}_{(i)} = \frac{2\omega_{(i)} - (\omega_{\max(i)} + \omega_{\min(i)})}{\omega_{\max(i)} - \omega_{\min(i)}} \quad (i=1, 2, 3) \quad (7)$$

式(7)において、 $\omega_{\max(i)}$ 、 $\omega_{\min(i)}$ はそれぞれ前述の解析範囲内における損傷（はく離）梁の固有振動数の最大値、最小値であり、 $\bar{\omega}_{(i)}$ は $\omega_{(i)} = \omega_{\max(i)}$ のときに最大値 1、 $\omega_{(i)} = \omega_{\min(i)}$ のときに最小値 -1 をとる。

(a) 1st mode

(b) 2nd mode

(c) 3rd mode

Fig. 4 Effect of damage location on natural frequencies of the stiffness degraded beam model.

損傷（はく離）位置に対する固有振動数変化を考える。Fig. 4, 5 より大きさが一定の場合、高次モードであるほど固有振動数変化は複雑となる。Fig. 4 では変位モード形状の腹に相当する部分、すなわち、2 次モード (Fig. 4(b)) では 0.5 付近、3 次モード (Fig. 4(c)) では 0.3, 0.7 付近に損傷がある場合の固有振動数低下量が大きいのにに対し、Fig. 5 の同じ位置における固有振動数低下はほとんどない。変位モード形状の腹（2 次モー

(a) 1st mode

(b) 2nd mode

(c) 3rd mode

Fig. 5 Effect of delamination location on natural frequencies of the delaminated beam model.

ドでは $x/L=0.5$ 付近, 3次モードでは $x/L=0.3, 0.7$ 付近)では変位が極大であると同時に, ひずみが極大, せん断力が極小となることから, Fig. 4に示す要素剛性低下モデルの固有振動数変化は損傷部のひずみ, Fig. 5に示すはく離モデルの固有振動数変化はせん断力の大きさに依存すると推測される。ここで, Tracyらによるはく離梁の曲げ剛性解析では, 剛性低下量ははく離部に作用するせん断力に支配されると報告されている¹²⁾。し

たがって, 実際のはく離に伴う梁の固有振動数変化は, はく離モデルの解析結果と定性的に近いと推測される。なお, 損傷(はく離)の大きさに対しては, モードに関係なく損傷が大きいくほど固有振動数低下量が増大する。位置が一定ならば, 損傷が大きいくほど梁全体の剛性に及ぼす影響が大きいためである。

以上より, 実際のはく離に伴う梁の固有振動数低下量は, はく離の大きさだけでなくせん断力の大きさで決定される。これに対し, はく離を等価な剛性低下に置き換えた要素剛性低下モデルの固有振動数低下量は損傷の大きさとひずみの大きさで決定され, 各振動モードの梁のひずみ分布とせん断力分布は異なるため, 実際のはく離による固有振動数変化を模擬できない。

5.2 損傷同定解析

複合材料積層構造の健全性評価では, 層間はく離の位置, 大きさの同定が重要となる。本節では, 要素剛性低下モデルで作成した損傷同定手法をはく離同定に適用し, 同定精度に対するはく離のモデル化の影響を検討する。

まず, 要素剛性低下モデルの解析結果から応答曲面を作成し, それを直接はく離同定に利用する場合を考える。手順を以下に示す。

5.1節で求めた要素剛性低下モデルの固有振動数解析結果(データ数: 54点)を利用して, 固有振動数から損傷の位置, 大きさを同定する応答曲面をそれぞれ作成する。ただし, 実機では高精度のはく離同定が要求されないことと, 簡便性を考慮して水準を利用した。損傷位置は $0 < l/L \leq 0.33$, $0.33 < l/L \leq 0.66$, $0.66 < l/L < 1$ の3水準, 大きさは $0 < a/L \leq 0.07$, $0.07 < a/L \leq 0.11$, $0.11 < a/L \leq 0.15$ の3水準とし, 水準化後のデータから応答曲面を作成した。同定用パラメータはそれぞれ式(7)を用いて $[-1, 1]$ に正規化した1~3次モードの固有振動数とし, 応答曲面には3次多項式を利用した。作成した応答曲面の R^2_{adj} 値は位置, 大きさの順にそれぞれ 0.936, 0.682 である。

応答曲面の近似精度を確認するため, 要素剛性低下モデルの固有振動数から位置を同定した結果を Fig. 6(a)に, 大きさを同定した結果を Fig. 7(a)に示す。ここで, 同定に使用したデータは応答曲面作成に使用したものと同一である。そして, はく離同定性能の検証のため, 5.1節で求めたはく離モデルの固有振動数から位置を同定した結果を Fig. 6(b)に, 大きさを同定した結果を Fig. 7(b)に示す。ここで, 要素剛性低下モデルとはく離モデルでは固有振動数低下量(絶対値)が異なるた

(a) Regressed from SD model data – identified for SD model data

(a) Regressed from SD model data – identified for SD model data

(b) Regressed from SD model data – identified for DL model data

(b) Regressed from SD model data – identified for DL model data

(c) Regressed from DL model data – identified for DL model data

(c) Regressed from DL model data – identified for DL model data

Fig. 6 Identification results of damage (delamination) locations (SD model: stiffness degraded beam model, DL model: delaminated beam model).

Fig. 7 Identification results of damage (delamination) sizes (SD model: stiffness degraded beam model, DL model: delaminated beam model).

め、はく離モデルの固有振動数であらかじめ式 (7) を用いて $[-1, 1]$ に正規化後のデータを各応答曲面に代入した。Fig. 6, 7 では横軸に実際の水準をとり、縦軸には同定された水準の割合を全体で 100% となるように表示した。ただし、あらかじめ規定したどの水準にも含まれない場合は Out と表現した。

要素剛性低下モデルの固有振動数に対する位置の同定率、すなわち、実際の水準と同定された水準が一致した割合は水準 1 から順に 94.4%, 100%, 100% (Fig. 6 (a) 参照)、大きさの同定率は水準 1 から順に 72.2%, 94.4%, 88.9% (Fig. 7(a) 参照) であり、位置、大きさともに高い同定率を有する。しかし、はく離モデルの固有振動数に対する位置の同定率は水準 1 から順に

38.9%, 33.3%, 55.6% (Fig. 6(b) 参照)、大きさの同定率は水準 1 から順に 16.7%, 11.1%, 5.6% (Fig. 7(b) 参照) と (a) に比べて大幅に低下しており、実用的でない。さらに、大きさについては実際よりも小さく同定される傾向がある。前述のとおり、要素剛性低下モデルとはく離モデルでは固有振動数低下の支配因子が異なるため、同定用パラメータとして 1~3 次モードの固有振動数を用いる場合、要素剛性低下モデルの解析結果で作成した応答曲面によるはく離同定は不可能である。

次に、要素剛性低下モデルを利用してはく離同定に必要なパラメータ、応答曲面の次数を決定した後、はく離モデルの解析データで応答曲面を再度作成し、はく離を

同定する場合を考える。

5.1節で求めたはく離モデルの固有振動数解析結果を利用して、前述の方法にしたがい固有振動数からはく離の位置、大きさを同定する応答曲面をそれぞれ作成した。作成した応答曲面の R_{adj}^2 値は位置、大きさの順にそれぞれ 0.258, 0.793 である。

はく離モデルの固有振動数に対する位置の同定結果を Fig. 6(c)、大きさの同定結果を Fig. 7(c) に示す。ここで、同定に使用したデータは応答曲面作成に使用したものと同一である。位置の同定率は水準1から順に 44.4%, 100%, 50.0%, 大きさの同定率は水準1から順に 94.4%, 77.8%, 94.4% である。位置の同定率は Fig. 6(a) に比べて低く、また、実際の位置水準に関係なく水準2に同定される傾向が強い。一方、大きさについては、Fig. 7(a) と同等の同定率を有している。したがって、はく離の大きさは1~3次モードの固有振動数から同定可能であるが、位置の同定にはパラメータの追加が必要である。

以上より、要素剛性低下モデルの固有振動数変化と実際のはく離による固有振動数変化は異なるため、要素剛性低下モデルの固有振動数変化で開発した損傷同定手法によるはく離同定は不可能である。この場合、実際よりも小さく同定される危険性がある。また、はく離モデルの解析結果で作成した応答曲面を用いてもはく離位置の同定が困難なことから、要素剛性低下モデルの解析結果で損傷同定法を検討する場合、実際のはく離同定に必要なパラメータを正しく選択できない。この場合、損傷同定手法の再検討が必要となり、コストの増加は避けられない。したがって、はく離同定手法の開発には、はく離を適切に模擬した解析モデルが必要である。

6. 結 言

マトリックス割れのみを伴う軽微なはく離損傷を対象として、はく離を剛性低下に置き換えた場合と実際のはく離による梁の固有振動数変化を解析し、その支配因子から両者の関係を検討するとともに、剛性低下に置き換

えて開発した損傷同定手法のはく離同定への適用性を検討した。得られた結論を以下に示す。

(1) 実際のはく離による梁の固有振動数低下の支配因子は、はく離の大きさとはく離部に作用するせん断力であるのに対し、剛性低下に置き換えた場合の支配因子は損傷の大きさとひずみであり、剛性低下では実際のはく離による固有振動数変化を再現できない。

(2) はく離を剛性低下に置き換えて開発した損傷同定手法によるはく離同定は不可能であり、はく離同定手法の開発には実際のはく離を適切に模擬した解析モデルが必要である。

参 考 文 献

- 1) 邊 吾一, 西 恭一, 黄 一正, 藤川由美: 機論 A, **62**, 602 (1996), 2338-2343.
- 2) 邊 吾一, 山口達也, 福田行義, 青木義男, K.C. Park: 機論 A, **66**, 644 (2000), 721-726.
- 3) 荻 芳郎, 福永久雄, 亀山正樹: 日本複合材料学会誌, **26**, 6 (2000), 236-242.
- 4) 福永久雄, 関根英樹, 笹島圭輔, 胡 寧: 機論 C, **65**, 635 (1999), 2617-2622.
- 5) 金原 勲, 影山和郎, 鈴木敏郎, 大沢 勇, 伊出浩司: 材料, **43**, 487 (1994), 476-481.
- 6) S.K. Thyagarajan, M.J. Schulz & P.F. Pai: *J. Sound & Vibration*, **210**, 1 (1998), 162-170.
- 7) J. Maeck & G. De Roeck: *Key Engineering Materials*, **167-168** (1999), 320-327.
- 8) 例えば, A. Chukwujekwu Okafor, K. Chandrasekhara & Y.P. Jiang: *Smart Mater. Struct.*, **5** (1996), 338-347.
- 9) 近藤恭平: 工学基礎 振動論, 培風館 (1993), pp. 126-133.
- 10) 轟 章: 第4回最適化シンポジウム講演論文集, 日本機械学会 (2000), pp. 217-222.
- 11) R.H. Myers & D.C. Montgomery: *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*, John & Sons, Inc. (1995).
- 12) J.J. Tracy: *Thin-Walled Structures*, **6** (1988), 371-383.