研究論文

層間剝離伝播挙動解析のための連続的な応力分布を
仮定したインターフェイス要素

間島 理*, 末益 博志**

(2002年12月20日受付)

An Interface Element with Continuous Traction to Analyze
Delamination Propagation

Osamu MAJIMA* and Hiroshi SUEMASU**

(Received December 20, 2002)

An interface element, taking account of both the material strengths and the fracture characteristics, is proposed to numerically simulate the damage propagation process in composite laminates. Several refinements are examined for the element to ensure the smooth convergence of the solution during the calculation of the damage when incorporated in the commercially available finite element package program (MARC) through user subroutine. The element has been successfully applied to a fundamental problem of the stable crack propagation and the crack initiation. Propagation process of multiple interlaminar delaminations in circular axi-symmetric nonlinear plates subjected to a quasi-static transverse load has been solved to demonstrate the applicability and efficiency of the present element to a complex delamination propagation problem. As continuous stress distribution with respect to the surface separation along the crack path are assumed on the interface, smooth and stable convergence of the solution of the crack propagation can be realized with fairly coarse mesh compared to the modeling where discrete interface traction force is assumed only at the nodes on the interface. Since the element would be taking into account the dissipated energy during the formation of crack surface, it can be applied to the simulation of dynamic failure process.

1. 序 論

炭素繊維複合材料 (CFRP) を始めとする複合材料積層構造は比強度, 比剛性が極めて大きく, 航空・宇宙分野を始めとする多くの分野で広く使用されている。これらの複合材料構造が異物衝突等による衝撃荷重を受けるとマトリックスクラック, 層間剝離等の外部からは観測の困難な損傷を発生し, その力学的特性, 特に圧縮強度が大きく低下する。従って衝撃荷重に対する損傷発生メカニズムの解明が重要であり, そのためには損傷進展を精度良くシミュレートする手法の開発が重要な課題と

なっている。

数値解析手法として材料力学的な概念に基づいて破損プロセスを解明する試みがなされていた^{1,2)}が, 層間剝離等のクラック様の損傷進展に関しては破壊力学的な条件を考慮する必要がある。層間剝離に関してはクラックの進展は層間に限られるのでコヒープモデルによるモデル化が適すると考えられる。即ち応力の発生から破壊までの剝離面でのトラクションと相対変位の関係を与えて破壊したときにトラクションを零とするモデル化である。

これらの要素の要素特性 (トラクションと変形の関係) の決定に当たって破壊力学的条件を満足し, かつ積層板の層間剝離伝播挙動に伴って生ずる繊維の破断, プリッジング等のいわゆるソフトニング効果を考慮したさまざまなモデル化が試みられている。すなわち塑性域でのトラクションを適当な関数で近似した弾塑性挙動または弾完全塑性挙動を仮定したもの^{3~5)}, トラクションが強

*** 上智大学理工学部機械工学科 (102-8554 東京都千代田区紀尾井町 7-1)

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Science and Technology, Sophia University, 7-1 Kioi-cho, Chiyoda-ku, Tokyo 102-8554, Japan

* 助手 Research Associate, ** 教授 Professor

度に達するまで及びその後破壊力学的条件を満足してトラクションがゼロになるまでの各区間のトラクションを線形関数で近似したもの⁶⁻¹²⁾、クラック進展に至るまでの全変形過程におけるトラクションを3次関数で近似したもの¹³⁾、金属のクラック伝播問題のシミュレーションに用いたモデルを応用したもの^{14,15)}等がある。

ソフトニング挙動は複雑であるが、これらのモデル化の妥当性の確認は実験結果との比較によって行われている^{16,17)}。ところでモデル化において破壊力学的条件を満足するならばどのようなモデル化を行っても全体的な剝離伝播挙動にはほとんど影響を与えないことが指摘されている^{15,18,19)}。

積層板の衝撃損傷問題を動的応答問題として取り扱う場合にはクラック面形成に伴って散逸されるエネルギーを評価できるようなモデル化が必要である。著者等は強度と破壊力学的条件の両方を考慮した非線形集中ばねによる破壊要素を有限要素解析に導入してクラック面形成によって散逸されるエネルギーを考慮することが可能な解析手法を提案した^{18,19)}。しかしこの手法では妥当な結果を得るためには有限要素分割を非常に密にする必要があり、多くの計算量を必要とする衝撃問題に適用するためにはより効率的な解析手法が望まれた。またクラック先端のばねが強すぎることを考慮してクラック伝播の判定を有限要素単位で行うように改善することにより解析の効率化を図った²⁰⁾。しかしこの手法は動的問題を解析する場合にクラック面形成に伴って散逸されるエネルギーを正しく評価できないという問題がある。

本研究では積層板の衝撃損傷挙動を想定した積層板の多重層間剝離伝播挙動の解析を行うために強度と破壊力学的条件を満足し、クラック面での応力分布が連続的に変化するインターフェイス要素を提案する。本手法はクラック面形成に伴って散逸されるエネルギーを正當に評価することができるので動的問題への適用が可能である。本手法の妥当性を確認するために線形破壊力学理論によって厳密解が既知の問題に適用する。また積層板の剝離発生を伴う問題に適用し、本手法がクラック発生の問題をも近似できることを示す。本手法を用いて横方向集中荷重を受ける軸対称積層円板の多重層間剝離伝播挙動の解析を行い、前報までの手法¹⁸⁻²⁰⁾に比べて解の収束性が良く、安定した剝離伝播のシミュレーションが行えることを示す。

2. インターフェイス要素によるクラックの発生と進展のモデル化

積層板の層間におけるクラックの発生をシミュレートするためには材料力学的条件すなわち強度を表すことができ、進展過程を適切にシミュレートするためには破壊力学的条件を考慮する必要がある。また損傷進展問題を動的問題として取り扱うためにはクラック面が形成されるときに散逸されるエネルギーを考慮できる解析手法が必要である。

クラックが進展すると予想される面に沿って Fig. 1 に示すような変形前に体積ゼロのインターフェイス要素を定義する。Fig. 1 は変形した状態での要素形状を示したものであり、無荷重状態において節点 l と l' 、 m と m' 、 n と n' は各々同じ座標を持つ (2 重節点)。要素内でのクラック進展面に垂直方向及び接線方向の変形量を 2 重節点間の各方向の相対変位 ($\Delta u_{ni} = u_{ni'} - u_{ni}$, $\Delta u_{si} = u_{si'} - u_{si}$ ($i = l, m, n$)) を用いて次のように表す。

$$\Delta u_n = \sum_i \phi_i(\xi) \Delta u_{ni} \quad \Delta u_s = \sum_i \phi_i(\xi) \Delta u_{si} \quad (1)$$

ここで $\phi_i(\xi)$ は形状関数であり、インターフェイス要素に隣接する有限要素の要素境界に沿う形状関数と同じものを使用する。また ξ ($-1 \leq \xi \leq 1$) は要素内で定義された局所座標である。

このインターフェイス要素によってクラック先端部の変形が大きな領域、すなわちプロセスゾーンの変形をシミュレートする。積層板の層間剝離進展問題においてはプロセスゾーンがクラック面の大きさに比べて小さくクラック面が形成されることによって破壊過程全体として除荷を考えることとし¹²⁾、クラックが進展する面に作用するトラクションがその点の相対変位の陽な関数で表されると仮定する。全体的な剝離進展挙動は主として強度と破壊力学的条件によって支配される¹⁵⁾と考え、剝離が進展するときクラック先端部での最大トラクションは材

Fig. 1 Interface element.

Fig. 2 Distributed traction along the crack tip interface.

料の強度に対応し、また破断までにクラック面でなされる仕事は材料の破壊靱性に等しくなると仮定する。要素内の変形がこれらの条件を満足する臨界値に一致したときクラックはその位置まで進展し、クラックが進展した領域でのトラクションはゼロとなる (Fig. 2 参照)。弾性的変形は通常の有限要素によって表し、インターフェイス要素はクラック先端部のプロセスゾーンの局所的に大きな変形のみをシミュレートすると考えれば、弾性変形状態ではインターフェイス要素は変形しないことが理想である。しかしインターフェイス要素の相対変位とトラクションの関係は立ち上がり部分の初期勾配を大きくしすぎると数値解析上の問題が生じ、解が収束しなくなる。

以上のことを考慮して要素内において要素の垂直方向及び接線方向に作用するトラクションと変形の関係を次のように表す。

$$\sigma(\Delta u_n) = \begin{cases} k_n[\Delta u_n + \Delta u_{n0}]^\alpha - \Delta u_{n0}^\alpha & (0 \leq \Delta u_n < \Delta u_{nc}) \\ k_{n0}\Delta u_n & (\Delta u_n < 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$\tau(\Delta u_s) = \pm k_s[(|\Delta u_s| + \Delta u_{s0})^\beta - \Delta u_{s0}^\beta] \quad (|\Delta u_s| < \Delta u_{sc})$$

ここで α, β は $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ なる任意の定数、 $\Delta u_{n0}, \Delta u_{s0}$ は各々 $\Delta u_n = 0, \Delta u_s = 0$ においてトラクションの勾配が有限の値になるように導入した微小な定数である。 $\Delta u_{nc}, \Delta u_{sc}$ はクラックが各々モード I またはモード II で伝播するときの臨界相対変位である。式 (2) の関係を法線方向トラクションの場合について図示すると Fig. 3 のようになる。従って、

$$\sigma(\Delta u_{nc}) = \sigma_c$$

Fig. 3 Typical relationship between traction and relative displacement of interface element.

$$\int_0^{\Delta u_{nc}} \sigma(x) dx = G_{Ic} \quad (3)$$

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Delta u_n} \right]_{\Delta u_n=0} = k_{n0}$$

ここで σ_c, G_{Ic} は層間引張強度及びモード I の破壊靱性である。 k_{n0}, α は先に述べたように数値計算上の収束性と弾性変形状態を工学的に十分許容できるという条件で与えられる定数である。また α は層間の引張挙動を考えて決める量である。 α を小さくするとワークハードニングの小さい挙動を表せる。式 (3) より次式を得る。

$$\Delta u_{n0} = \left(\frac{k_{n0}}{\alpha k_n} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\Delta u_{nc} = \left[\frac{\sigma_c}{k_n} + \left(\frac{k_{n0}}{\alpha k_n} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right]^{\frac{1}{\alpha}} - \left(\frac{k_{n0}}{\alpha k_n} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\alpha+1} \left\{ \left[\frac{\sigma_c}{k_n} + \left(\frac{k_{n0}}{\alpha k_n} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \alpha \left(\frac{k_{n0}}{\alpha k_n} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} \right\} - \left(\frac{k_{n0}}{\alpha k_n} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left[\frac{\sigma_c}{k_n} + \left(\frac{k_{n0}}{\alpha k_n} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right]^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{G_{Ic}}{k_n} = 0$$

この非線形連立方程式を解くと式 (2) のパラメータ $k_n, \Delta u_{n0}, \Delta u_{nc}$ を決定できる。一例として $\sigma_c = 400$ MPa, $G_{Ic} = 1.0$ kJ/m² の場合について k_{n0}, α をパラメータとして σ と Δu_n の関係を Fig. 4 に示す。接線方向に関しても同様な手順によって各パラメータを決定することができる。

Δu_n または Δu_s の何れかが臨界相対変位 Δu_{nc} または Δu_{sc} に達したときクラックはその位置まで進展したとする。クラック先端を含む要素でクラック先端位置は次式によって決定される。

Fig. 4 Influences of k_{n0} and α on the relationship between traction and relative displacement ($\sigma_c = 400$ MPa, $G_{1c} = 1.0$ kJ/m²).

$$\Delta u_n(\xi_c) = \Delta u_{nc} \quad \text{または} \quad \Delta u_s(\xi_c) = \Delta u_{sc} \quad (5)$$

クラックが進展した領域では接触問題を考慮してクラック面の圧縮方向のみに反力を作用させる。すなわち

$$\sigma(\Delta u_n) = \begin{cases} 0 & (\Delta u_n \geq 0) \\ k_{n0} \Delta u_n & (\Delta u_n < 0) \end{cases} \quad (6)$$

$$\tau(\Delta u_s) = 0$$

初期勾配 k_{n0} , k_{s0} は前述のように弾性変形の範囲内においてインターフェイス要素の変形が十分小さくなるように大きな値を与えなければならない。また k_{n0} はクラック進展後の接触条件を規定するパラメータでもある。

クラックがまだ進展していない領域で式(5)の条件を満足したときクラックが進展し、トラクションは式(2)から式(6)のように変化する。またそれまでにその点に蓄えられた変形エネルギーがクラック面形成によって散逸したことになる。

インターフェイス要素に作用するトラクションのなす仕事は

$$V = \int_A \left[\int_0^{\Delta u_n} \sigma(x) dx + \int_0^{\Delta u_s} \tau(x) dx \right] dA \quad (7)$$

と表せる。式(7)に対して通常の有限要素定式化を行う

Fig. 5 A circular crack in an infinite isotropic medium.

ことによってインターフェイス要素の接線剛性方程式を得る。

ここで定義したインターフェイス要素をユーザ定義要素として汎用有限要素プログラム (MARC) に組み込むことができる。

3. 等方性無限物体中の円形クラックの進展

本手法によるクラック進展のモデル化の妥当性を確認するために等方性無限物体 ($E = 100$ GPa, $\nu = 0.3$, $\sigma_c = 400$ MPa, $G_{1c} = 1.0$ kJ/m²) 中にある Fig. 5 に示すような円形クラックの内面の一部に等分布荷重が作用する場合のクラック進展を解析する。この問題はモード I でクラックが安定に進展する。初期クラックは半径 2 mm とし、半径 1 mm の中心部に等分布荷重が作用する。軸対称問題なので 8 節点軸対称ソリッド要素を用い、対称性を考慮して 1/2 部分のみを解析する。初期クラック中心より r 軸方向に半径 20 mm までインターフェイス要素を導入する。解析モデルの一例を Fig. 6 に示す。 $\alpha = \beta = 0.1$, $k_{n0} = k_{s0} = 1.0 \times 10^6$ N/mm³ として解析を行った。

インターフェイス要素の要素サイズと解の収束性について調べた結果を Fig. 7 に示す。図には比較のために線形破壊力学による理論値を併記した。本手法はインターフェイス要素によってクラック先端にプロセスゾーンが存在するため、クラック半径は理論値よりも小さくなる。要素サイズが 1.0 mm でもほぼ収束しているが、クラック伝播挙動がインターフェイス要素中におけるクラック先端位置の影響を受け、必ずしも滑らかに伝播していない。要素サイズを小さくすることによってクラックは次第に滑らかに伝播するようになる。

Fig. 8 に荷重を一定間隔で増加させたときのクラック先端部の垂直方向の変位の分布の推移を要素サイズが

Fig. 6 A finite element model of a homogeneous axisymmetric body with a circular crack.

Fig. 7 Relationship between applied force and crack radius of a circular crack in an infinite medium.

1.0 mm と 0.25 mm の場合について示した。図中の縦の破線は要素境界を示す。要素サイズが 1.0 mm の場合にはほぼ 1 個または 2 個の要素でクラック先端部の急激に変化する変形を表現することになる。8 節点アイソパラメトリック要素を用いる場合、この急激に折れ曲がるような変形を要素毎に 2 次関数を用いて区分的に近似することになるが、要素分割が不十分な場合には正解の変形形状を表すことができず要素境界で変形分布が滑らかでなくなる。すなわちプロセスゾーンが 2 個の要素にまたがるときは変形を比較的容易に表せるが、1 個の要素内に存在する場合には変形形状を近似できなくなっていることが図より見てとれる。従ってクラック先端が要素内

(a) Element size 1.0mm

(b) Element size 0.25mm

Fig. 8 Distribution of relative deformation at the crack tip in an infinite medium.

を伝播するとき変位が一時的に低下する現象が現れた。そのためクラック先端位置が要素内で滑らかに移動しない。要素サイズが 0.25 mm の場合にはプロセスゾーンが常に 2 個以上の要素にまたがっているのでクラック先端部の変形はほぼ滑らかに表すことができる。しかしクラックの伝播はこの場合にも要素内のクラック先端位置の影響を多少受けている。クラックが完全に滑らかに伝播する結果を得るためには要素サイズをさらに小さくする必要があるが、ここに示した結果は工学的には十分許容しうるものであると考える。本手法による解析ではクラック先端の局所的に急激に変化する変形を少なくとも数個以上のインターフェイス要素を用いて表現できるように要素サイズを決定する必要がある。

Fig. 9 にクラック先端の要素サイズが 0.25 mm の場合に対して $k_{n0} = k_{s0} = 1.0 \times 10^6 \text{ N/mm}^3$ として α の値を 0.1 及び 0.5 の場合について解析した結果を示す。これより全体的な解の傾向はほとんど差がないことが分かる。また $\alpha = 0.1$ として k_{n0} の値を $2.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^3$ から $1.0 \times 10^6 \text{ N/mm}^3$ まで変化させて解析した結果も全体的な解の傾向はほとんど差が見られなかった。すなわち破壊力学の仮定でクラックが伝播すると考えられる場合には破断までに蓄えられるエネルギーが挙動を支配

Fig. 9 Effect of α on the relationship between applied force and crack radius in an infinite medium ($k_{n0}=1.0 \times 10^6$ N/mm³).

し、その他のパラメータの全体的な解の傾向に及ぼす影響は小さい。

4. クラック発生と伝播を伴う問題への応用

本手法はクラック伝播の問題のみでなく発生の問題でもある程度取り扱うことが可能である。ここでは長さ 200 mm、厚さ 4 mm の片持板の先端から 0.5 mm の領域の上下表面に一樣な引張強制変位を与えて剝離を発生・伝播させる問題を取り扱う。剝離は板中央面に沿って幅方向に一樣に発生及び伝播とする。平面ひずみ問題として解析し、対称性を考慮して中央面の片側のみを解析する。解析モデルの一例を Fig. 10 に示す。 $\alpha = \beta = 0.1$, $k_{n0} = k_{s0} = 2.0 \times 10^5$ N/mm³ として解析を行った。

炭素繊維強化複合材料製擬似的等方性積層材を想定し、面内等方性、面外直交異方性の均質材料として解析する。解析に使用した材料特性を Table 1 に示す。

開口変位と荷重（強制変位を与えた面の反力）の関係を Fig. 11 に示す。比較のために梁理論による DCB 試験の解析結果を併記した。図中に示した数字は要素サイズが 0.25 mm の場合についてその状態でのクラック長さを示す。開口変位と荷重の関係はインターフェイス要素によってプロセスゾーンの変形を表したために開口変位が臨界相対変位に達する前から非線形となる。相対変位が臨界相対変位に達すると同時にクラックが発生し、荷重が大きく低下すると共にクラックが約 1.5 mm 程度不安定に伝播する。この不安定伝播は DCB 試験のようにある程度以上の大きさの初期クラックが存在する場合

Table 1 Material properties of transversely isotropic plate.

$E_x = E_y$	56.5 GPa
ν_{xy}	0.316
E_z	9.15 GPa
$\nu_{xz} = \nu_{yz}$	0.262
$G_{xz} = G_{yz}$	4.18 GPa
σ_c	32.6 MPa
τ_c	85.0 MPa
G_{Ic}	200 J/m ²
G_{IIc}	400 J/m ²

Fig. 10 A finite element model of cantilever composite plate.

Fig. 11 Relationship between applied force and crack opening displacement in cantilever composite plate.

には見られない現象である。クラックの不安定伝播が終了すると開口変位と荷重の関係は梁理論による DCB 試験の解析結果と良く一致する。Fig. 11 の結果は不安定伝播前後を含めて要素サイズが 0.25 mm 程度でほぼ収束していることを示している。

Fig. 12 に要素サイズが 0.25 mm の場合についてクラック発生前後におけるクラック先端部の相対変位の分布

Fig. 12 Distribution of relative deformation at the crack tip in cantilever composite.

を示す。相対変位は臨界相対変位で正規化して表示した。強制変位 0.026 mm はクラックが発生する直前の状態を示す。クラックが発生する前には材料力学的な応力分布を示し、インターフェイス要素の変形はある程度広い領域にわたっている。クラックの発生と同時にクラックが不安定に伝播する。クラック状の状態になるとインターフェイス要素の変形はクラック先端近傍の極めて局所的な領域（プロセスゾーン）に限定される。

5. 集中荷重を受ける軸対称積層板の多重層間剝離伝播

積層板の層間剝離伝播挙動の解析への適用例として中央に集中荷重を受ける周辺が固定された半径 50 mm、板厚 4 mm の軸対称積層円板の多重層間剝離進展過程を解析する。中心部分に半径 2 mm の初期剝離が板厚方向に等間隔で 7 個ある。半径 1 mm の板中心部表面に強制変位を与えることによって荷重を加える。積層板の材料特性は前節で取り上げたものと同じである。

解析モデルの一例を Fig. 13 に示す。剝離は初期剝離を含む中央面に平行な面に沿って一様に伝播するものとしてこれらの面全体にインターフェイス要素を導入し、軸対称問題として解析を行う。中心部分のインターフェイス要素は最初から破壊状態にあるものとして初期剝離を表した。8 節点軸対称ソリッド要素を用い、幾何学的非線形性を考慮した解析を行った。 $\alpha = \beta = 0.1$, $k_{n0} = k_{s0} = 2.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^3$ として解析を行った。

剝離先端部の要素サイズを 0.25 mm として解析を行い、前報の集中ばね要素によるモデル化²⁰⁾によって得られた結果と比較した。荷重面と反対側の面の中心点のたわみと荷重の関係を Fig. 14 に示した。比較のために

Fig. 13 A finite element model of axisymmetric composite laminate with circular delaminations.

Fig. 14 Relationship between center displacement and applied force of axisymmetric laminate with seven delaminations.

平板曲げ理論による近似解析²¹⁾の結果を併記した。また剝離が伝播を開始する荷重位置を荷重たわみ曲線上に示した。

本手法による結果は前報の手法による結果に比べてクラック先端位置を要素サイズにかかわらず連続的に表すことができるだけでなく、クラックの伝播が要素毎に波打つ現象が改善され同じ分割の場合に滑らかに伝播する結果が得られており、連続的な応力分布を仮定したことの効果が現れている。剝離は荷重面に近いものから順に伝播を開始したが荷重面から最も遠い剝離が伝播を開始するときには不安定伝播によって荷重が一時的に低下する。ここに示した荷重の範囲内ではすべての剝離が伝播を開始した後の挙動は平板曲げ理論を用いた近似解析により得られる破壊力学的考察の結果と良く一致する。剝離伝播開始前における近似解析結果との差は剪断変形の影響と中心部の初期剝離を与えたことによる剛性低下によるものである。

これらの結果、本モデル化により複数層間に剝離が進展する場合に対しても大局的な剝離伝播挙動のシミュレ

ーションが可能であることが分かる。

6. 結 論

本研究では複合材料積層板の層間剝離伝播挙動の解析を行うために材料強度及び破壊力学的条件を満足しかつクラック面形成に伴って散逸されるエネルギーを考慮でき、衝撃損傷解析にも適用可能な解析手法を提案した。

本手法を線形破壊力学理論により厳密解が既知の問題に適用して解析手法の妥当性を確認できた。また材料力学的に考える必要のあるクラック発生を伴う問題をある程度取り扱えることを確認した。本手法は破面に発生する応力分布を連続的に表すことができるが変形が形状関数の自由度に支配されるのでクラック先端のプロセスゾーンを少なくとも数個以上のインターフェイス要素で表現できるように要素分割を行う必要があることが分かった。

集中荷重を受ける軸対称積層円板の多重層間剝離伝播挙動の解析を行い、離散的なばねによって集中力を仮定した破壊ばね要素を用いる前報の手法との比較を行った。連続的な応力分布を仮定した本手法は前報の手法に比べてクラック先端位置を要素分割に関係なく連続的に決定することができ、節点間の剛性がクラック伝播に伴ってスムーズに減少するため安定な解の収束が得られ、さらに滑らかな平衡曲線を求めることができる。

参 考 文 献

- 1) H.Y. T. Wu & G.S. Springer : *J. Composite Materials*, **22**, 6 (1988), 533-560.
- 2) H.Y. Choi, H.Y.T. Wu & F.K. Chang : *J. Composite Materials*, **25**, 8 (1991), 1012-1038.
- 3) W. Cui & M.R. Wisnom : *Composites*, **24**, 6 (1993), 467-474.
- 4) O. Allix & P. Ladeveze : *Composite Structures*, **31**, 1 (1995), 61-74.
- 5) A.M. Yan, E. Marechal & H.N. Dang : *Composite Sci. Tech.*, **61**, 10 (2001), 1413-1427.
- 6) Y. Mi, M.A. Crisfield & G.A.O. Davies : *J. Composite Materials*, **32**, 14 (1998), 1246-1272.
- 7) M. Wisheart & M.O.W. Richardson : *Composites Part A*, **29**, 3 (1998), 301-313.
- 8) M.F.S.F. de Moura, J.P.M. Goncalves, A.T. Marques & P.M.S.T. de Castro : *Composite Structures*, **50**, 2 (2000), 151-157.
- 9) W. Sprenger, F. Gruttmann & W. Wagner : *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **185**, 2-4 (2000), 123-139.
- 10) G. Alfano & M.A. Crisfield : *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **50**, 7 (2001), 1701-1736.
- 11) R. Borg, L. Nilsson & K. Simonsson : *Composite Sci. Tech.*, **61**, 5 (2001), 667-677.
- 12) M.A. Crisfield & G. Alfano : *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **54**, 9 (2002), 1369-1390.
- 13) J. Chen, M. Crisfield, A.J. Kinloch, E.P. Busso, F. L. Matthews & Y. Qiu : *Mech. Composite Materials and Structures*, **6**, 4 (1999), 301-317.
- 14) J.L. Chaboche, R. Girard & A. Schaff : *Computational Mech.*, **20**, 1-2 (1997), 3-11.
- 15) S.E. Sayed & S. Sridharan : *Composites Part B*, **32**, 6 (2001), 545-553.
- 16) A. Corigliano & S. Mariani : *Composite Sci. Tech.*, **61**, 5 (2001), 2299-2315.
- 17) R. Borg, L. Nilsson & K. Simonsson : *Composite Sci. Tech.*, **62**, 10-11 (2002), 1299-1314.
- 18) 間島 理, 末益博志 : 日本複合材料学会誌, **25**, 4 (1999), 140-148.
- 19) H. Suemasu, O. Majima & Y. Aoki : *J. Reinforced Plastics and Composites*, **18**, 12 (1999), 1156-1169.
- 20) 間島 理, 末益博志 : 日本複合材料学会誌, **26**, 6 (2000), 219-226.
- 21) H. Suemasu & O. Majima : *J. Composite Materials*, **32**, 2 (1998), 123-140.