研究論文

光弾性法によるサンドイッチ複合材の応力解析

第 I 報 3 点曲げを受けるサンドイッチ梁の応力伝達機構

剣 持 潔*

(1976 年 6 月 10 日 受付)

Stress Analysis of Sandwich Composites by Photoelasticity
Part I. The Mechanism of Stress Transfer of Sandwich Beams under
Three-Point Bending

K. KENMOCHI*

(Received June 10, 1976)

Since the establishment of the bending theory of sandwich beams by N.J. Hoff or E. Reissner in 1940's, various investigations on sandwich constructions have been reported. A simple "mechanics of materials" approaches on sandwich constructions is often based on the assumption that the bending rigidity of the both faces is negligible and also the shear rigidity of the core material is infinite. This type of theory is called "Composite-beam theory" ("I-beam theory"). But, the various types of sandwich panels are now being applied in the building industry, and some of the panels are composed of relatively thick faces and such soft core materials as foamed plastics. It is necessary to consider therefore that the bending rigidity of faces are large and shear rigidity of core is very low. Consequently it seems to be necessary to introduce the "multi-layer built-up theory"—taking into consideration of displacement among the layers in the total section of beam corresponding to the shear moduli of core materials as being adopted in the field of wooden building construction. In this context, this paper deals with the difference of stress distribution between two types of sandwich beam of photoelastic materials—ratio of elastic moduli between face and core: $k = E_f/E_c$ is 6.6 and 530—under three point bending, and then the applicability of multi-layer built-up theory is investigated. It is clear that the strength and rigidity of a sandwich beam depend upon the coupling moment caused by the inverse axial force in the two facings. The effect of the coupling moment is defined as the ratio of the coupling moment (M_s) to the total sectional moment (M_t): $\alpha = M_s/M_t$. If the " k " value and the proportional of a sandwich composite are given, the " α " can be defined as an index of the sandwich efficiency.

1. 緒 言

従来, サンドイッチ構造体は, 航空機, 船舶, 車両等

極端に重量軽減が要求される分野でも使用されていたが, 今日では, 住宅においてもプレハブ化, ユニット化および高層化が注目されており, その中心的材料となりつつある¹⁾.

サンドイッチ板の曲げについての理論的研究は, 1940年代に, N.J. Hoff, E. Reissner などにより確立され, 以降, 多くの研究者により多数の報告がなされてい

* 製品科学研究所 (144 東京都大用区下丸子 4-21-2)

Industrial Products Research Institute, 4-21-2 Shimomaruko, Ota-ku, Tokyo, 144 Japan

る²⁻⁵⁾。

その多くは、表面材の厚さは非常に薄いものとし、表面材と心材自体の曲げ剛性は無視し、表面材の面内剛性と心材の横せん断剛性のみを考慮に入れている。サンドイッチ梁の材料力学的理論では、心材のせん断剛性は無限に大きいものと仮定して、面内剛性のみを考慮に入れることが多い。この種の理論をここでは、複合梁理論と呼ぶことにする。また、複合梁の構成素材間のせん断によるスリップを考慮に入れて複合梁理論を修正することも行なわれており、この種の理論を重ね梁理論と呼ぶ⁶⁾。

かつて、著者らは、住宅用サンドイッチ板の力学的性質を究明するため、表面材と心材の構成を系統的に変えたサンドイッチ梁の曲げ試験を行ない、構成の違いによる強度と剛性の差について検討した⁷⁾。その結果、表面材と心材の弾性係数比 ($k = E_f/E_c$) がとくに大きい構成のサンドイッチ梁では、従来の材料力学に基づいた式（複合梁理論）から得られる計算値と実験値の間にかんがりの差が生じることがわかった。このことは、とくに、住宅用サンドイッチ板を考える際、梁理論では無視されているせん断変形および荷重点・支持点近傍の応力集中状態などを考慮しなければならないことを示している。これらの問題を究明する手段として、実験的力学解析の光弾性法と、有限要素法 (FEM) による数値解析がある。しかしながら、FEM において、サンドイッチ梁の曲げ解析を精度よく行なうには、要素の細分割、節点数の増大と電算機容量および長大要素による精度低下など困難な点がある。

一方、光弾性法は、モデル実験であっても、弾性域内においては、力学的相似性は完全に成り立ち、その実験結果は、直接、実際問題に適用でき、サンドイッチ複合材の特性を究明する手段としては、より最適な方法であるといえる⁸⁻¹¹⁾。

本報告では、光弾性材料を用いて作った表面材と心材の弾性係数比 $k=6.6$ と 530 のサンドイッチ梁モデルに 3 点曲げをかけ、その応力伝達機構の差を明らかにし、続いて、光弾性モデル実験の結果と、二つの理論式（複合梁と重ね梁理論）の値を比較検討した。また、サンドイッチ梁の強度と剛性は、上・下の表面材に逆向きに生ずる軸力により引き起こされるカップリングモーメントにより決まる。このカップリングモーメントと全モーメント（面・心材自体の受け持つモーメントを含む）の比はサンドイッチ梁としての効率を表わす一つの指標となりうるものと考え、 k の変化によるサンドイッチ効率の定量化を試みた。

2. 理 論 式

サンドイッチ梁では、心材は、両表面材を一定間隔に離し、曲げによるせん断力を一面から他面に伝える役目を持っている。よって、心材のせん断剛性の大きい場合と小さい場合では、梁全体としての応力伝達機構は異なることが予想される。

2.1 複合梁理論

上・下等厚の表面材が、軟質な心材を挟んだ形状をしたサンドイッチ梁の断面を Fig. 1(a) に示す。

複合梁理論とは、心材を表面材と同質な弾性率を有する等価なウェブ幅と見なした I 型梁断面 (Fig. 1(b) 参照) に変換し、この I 型断面を持った梁が一体となって変形するとして通常の梁理論を適用したものである。この理論を用い、断面の応力 σ_i を求めると次式のようになる。

$$\sigma_i = \frac{12M}{bt^3\{1 + (1/k - 1) \cdot m^3\}} \cdot y \quad (1)$$

ここで、 M ：モーメント、 y ：中立軸からの距離で $|y| \leq (t_f + t_c/2)$ 、 b ：幅、 t ：全体の厚さ、 k ：表面材と心材の弾性率比 E_f/E_c 、 m ：心材の全厚さに対する割合 t_c/t である。また、添字 f , c は、それぞれ表面材 (face) と心材 (core) を表わす。

この場合の応力分布は、(1) 式で求まる応力分布を Fig. 1(a) のサンドイッチ梁の応力分布に換算すると Fig. 1(c) のようになり、歪み分布は、Fig. 1(d) で示される。

複合梁理論は、心材のせん断剛性がある程度大きい場合の理論であり、断面全体が曲げに抵抗し、上表面材は

Fig. 1 Diagrams for analysis of I-beam theory.

- (a) The section of sandwich beam
- (b) Transformed section to I-beam
- (c) Stress distribution
- (d) Strain distribution

曲げによる圧縮応力，下表面材は引張り応力が作用していることになる。しかしながら，心材のせん断剛性が小さい場合は，両表面材を結合している心材のせん断変形が大きいために断面が一体となって曲げに抵抗しえないことは十分予想される。

2.2 重ね梁理論の適用

Fig. 2(a) に示すサンドイッチ梁は，上・下表面材とバインダー層（心材）から成る2層の重ね梁と見なすこともできる。そして，バインダー層，すなわち心材のせん断剛性の小さい重ね梁は，曲げを受けると Fig. 2(b) に示すようなモーメントと力が作用して上・下表面材にズレが生じ，その歪み（応力）分布は Fig. 2(c) のようになる。

このように，古典梁理論に層間のスリップを考慮した修正項を加えたものが重ね梁理論である。この理論は，従来，木材および構造体の理論計算式としてよく用いられている^{12,13)}。

また，2層重ね梁理論におけるスリップ係数の概念を拡張すれば，サンドイッチ梁にも適用できる⁶⁾。2層重ね梁理論によれば，スパン l ・中央集中荷重 W の3点曲げの場合にはつぎのようになる。

上・下表面材の心材を介しての相対的なすべり量 γ は，伝達される荷重 F （心材に作用する単位長さ当りの水平せん断力）に比例するものとして，

$$\gamma = \frac{F}{\beta} \quad (2)$$

ここで， β はスリップ係数で， $\beta = G_c(b_c/t_c)$ で表わされる。

次に，スリップ係数 γ の定義により

Fig. 2 Diagrams for analysis of multi-layer built-up theory.

- (a) The section of sandwich beam
- (b) Longitudinal forces and moments
- (c) Strain distribution

$$\frac{d\gamma}{dx} = 2\varepsilon \quad (3)$$

ただし， ε は表面材と心材の接合面における直歪み差である。一方，結合が完全で，上・下表面材間にスリップが起こらない場合は $\beta = \infty$ となり，

$$-\left(\frac{\bar{E}I}{EA\sum EI}\right)P_f = -\left(\frac{y_0}{\sum EI}\right)M \quad (4)$$

が得られ，この場合の軸力をとくに P_f とすると

$$P_f = \frac{EA \cdot y_0}{EI} \cdot M = \frac{EA \cdot y_0}{EI} \cdot \frac{W}{2} \left(\frac{l}{2} - x\right) = -\frac{R}{Q^2} \left(\frac{l}{2} - x\right) \quad (5)$$

となる。ただし， A は梁の断面積， $y_0 = t_f + t_c$ で，

$$\left. \begin{aligned} \sum EI &= 2E_f I_f + E_c I_c \\ \frac{EI}{EA} &= \sum EI + EA \cdot y_0^2 \\ \frac{EA}{EA} &= E_f I_f / 2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

である。ここで

$$Q^2 = \beta \frac{EI}{EA \sum EI}, \quad R = -\beta \frac{y_0}{\sum EI} \cdot \frac{W}{2} \quad (7)$$

とおく。

以上の2層重ね梁理論から求まる上側の表面材 (P_f は負) の応力 σ_m は，次式で表わされる。

$$\sigma_m = \frac{P_f}{A_f} \mp \frac{M_f}{I_f} \cdot y_1 \quad (8)$$

ただし， P_f は，表面材に作用する軸方向力で， $|y_1| \leq t_f/2$ である。(8)式は，右辺第1項目が軸力，第2項目が上・下表面材自体の曲げモーメントにより引き起こされる応力となる。よって， P_f が正である下側表面材の σ_m は第2項目の複号が正となる。

心材部の応力分布 σ_c も同様に以下のように求めることができる。

$$\sigma_c = \mp \frac{M - P_f \cdot y_0}{2E_f I_f + E_c I_c} E_c y_2 \quad (9)$$

ただし， $y_0 = t_f + t_c$ ， P_f は絶対値とし， $|y_2| \leq t_c/2$ である。

しかしながら，重ね梁の理論式が適用される場合の σ_c は， σ_m に比べごく微少である。

3. 実験条件

一般に，広く実用化されている住宅用サンドイッチパネルの表面材と心材の弾性率比 $k = E_f/E_c$ は，400~800 のものが多い。

本実験では、光弾性材料で作ったサンドイッチ梁、モデル 1 ($k=6.6$) とモデル 2 ($k=530$) について、中央集中荷重をかける 3 点曲げ実験を行なった。

3.1 光弾性モデル

モデルの形状および大きさは、それぞれ Fig. 3 と Table 1 に示す。また、モデルの材料は、表面材は両モデルとも共通でポリエステル系樹脂板を用い、心材は、モデル 1 にはエポキシ樹脂（エポコート 828）にチオコールを 30 部入れ軟化させて作った板を、モデル 2 にはウレタンゴムを用いた。表面材と心材の接着には、それぞれの心材と同質の接着材を用いた。おのおのの材料の性質は Table 2 に示す。

3.2 実験の方法

使用した光弾性装置は、視野レンズ 300φ の透過式を用いた。実験は、モデルを荷重負荷部に置き、中央集中荷重 W を加え、これより光弾性実験法を用いて主応力

Fig. 3 Flexural model of sandwich beam and loading configuration.

Table 1 Dimensions of photoelastic model.

	Span L	Face		Core		t
		t_f	b_f	t_c	b_c	
Model 1	200	4.78	6.48	29.10	6.51	38.66
Model 2	204	5.26	6.56	30.20	6.30	40.72

unit : mm

Table 2 Properties of photoelastic materials.

	Model 1		Model 2	
	$k=6.6$		$k=530$	
	Face	Core	Face	Core
E (kg/mm ²)	264	39.8	233	0.442
G (")	94.6	13.8	86.4	0.156
μ	0.39	0.44	0.35	0.41
ζ (mm/kg)	1.46	1.83	1.29	65.9

差 ($\sigma_1 - \sigma_2$) を測定した。光源は 5,461 Å の水銀灯を用い、弾性域内の低荷重で暗視野および明視野での写真を取り、等色線を求め、また等傾線も求めた。

4. 実験結果

本実験においては、光弾性材料、荷重負荷装置、視野レンズの大きさ等の制約からスパンー高さ比が 5 倍というかなり特殊な short span の曲げ実験となり、必ずしも実際のサンドイッチパネルをそのままモデル化したとはいえない。しかしながら、モデル 1 と 2 は、それぞれ Photo. 1 の (a) と (b) に示すごとくまったく異なる等色線図を示し、材料構成の違いによる応力伝達機構の差は明白である。

また、等傾線および主応力線図は、それぞれモデル 1 では Fig. 4 の (a)、モデル 2 では (b) のようになった。

4.1 光弾性解析

Fig. 5 の (a) と (b) は、モデル 1 と 2 について、Fig. 3 の各解析断面における主応力およびせん断応力を、せん断応力差積分法 (shear difference method) によって求めたものである。図から明らかなように、モデル 1 では上側の表面材は、全スパンにわたって圧縮応力を受け、下側の表面材は、引張り応力を受けていて心材の中心線とほぼ一致する中立軸を境に圧縮側と引張り側がはっきり分かれている。これに対して、モデル 2 では第 1～第 3 解析断面で圧縮側表面材の心材に接する部分には引張り応力が作用しており、また、引張り側表面材においても心材に近い層では圧縮応力が作用している。すなわち、上・下表面材はそれぞれ独立して、固定端を持つ梁に似た応力分布を示している。

ここでは、光弾性実験の結果得られた応力分布 $\sigma_x(y)$ から、上・下表面材と心材に生ずる軸力とモーメントを求めることにより両モデルの応力伝達機構の差異を明確にした。

4.2 軸力について

上・下表面材の軸力 P_f は、 $\sigma_x(y)$ を表面材の高さ範囲で積分し、幅を乗することにより求まる。ここでは、モデル 1 と 2 の第 2 解析断面における $\sigma_x(y)$ を直線分布と見なし、幾何学的にそれぞれのモデルに作用する軸力を求めた。また、心材に作用する軸力 P_c も同様に求められるが、 P_f に比べ、ごく微小であったので省略した。

4.3 モーメントについて

$\sigma_x(y)$ が勾配を持つことから、 x 軸のまわりのモーメントは、上・下表面材と心材自体の曲げモーメント（そ

(a) Model 1, at $W=2$ kg (b) Model 2, at $W=20$ kg

Photo. 1 Isochromatic fringe patterns.

(a) Model 1

(b) Model 2

Fig. 4 Isoclinics and principal stress frajectories.

Fig. 5 Stress distribution in each model.

れぞれ, M_{tu} , M_{td} , M_c および距離 $y_0 = t_f + t_c$ だけ離れた表面材の中心線上で相反する軸力によるカップリングモーメント ($M_s = P_f \cdot y_0$) を考慮しなければならない。第2解析断面におけるこれらのモーメントの値は, $\sigma_x(y)$ を直線分布と見なすことにより幾何学的に求めた。よって第2解析断面に作用する全モーメント ($M_t = M_f + M_c + M_s$) は, 外力による曲げモーメント M と等しくなければならず次式が成り立つ。

$$M = \frac{W}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right) = M_t \quad (10)$$

モデル1と2の M , $M_f + M_c$, M_s および M_t は, Table 3のとおりである。この表で, M_t/M の比が, ほぼ1に近いことから, 光弾性実験結果はかなり精度良く行なわれたことを示している。

Fig. 6(a)と(b)は, 両モデルの第2解析断面における $\sigma_x(y)$ の実験値および, 複合梁と重ね梁理論値を示す。この二つの図から明らかなように, モデル1の σ_x

(y) は, 複合梁理論値とよく一致する。しかしながら, モデル2の $\sigma_x(y)$ は, 複合梁理論から求まる σ_i 分布とは非常に異なり, 表面材最外層で実験値は, その3~5倍の応力値を示し, 重ね梁理論値の σ_m と良く一致することがわかる。すなわち, サンドイッチ梁の $\sigma_x(y)$ は, k が大きくなるにしたがい, 複合梁理論とよく一致する領域から重ね梁理論に一致する領域へ移ることが明らかとなった。

4.4 全モーメントに占めるカップリングモーメントの割合 (α)

サンドイッチ構造体は, 弾性係数の高く薄い表面材を厚い心材の距離だけ隔てることにより, 大きな比強度・比剛性が得られる特徴を持っている。そして, サンドイッチ梁において, 高比強度と高比剛性を得るためには, 軸力によるカップリングモーメント M_s の全モーメント $M_t (= M_f + M_c + M_s)$ に対する割合が大きくなければならない。 k の変化による α が明らかとなり, その構

Fig. 6 Comparison of theoretical and experimental stress distribution, $\sigma_x(y)$ at the analytical second section.

Table 3 Comparison of moments in external and photoelastic result in the analytical second section.

	Model 1	Model 2
M (kg · mm)	900	92
$M_f + M_c$ (")	106.1	25.2
M_s (")	799.0	68.8
M_t (")	905.1	94.0
M_t/M	1.01	1.02
α (M_s/M_t)	0.88	0.73

成での比重がわかれば、最適なサンドイッチ梁の構成条件を見いださうものと考え。そこで、 α をサンドイッチ梁のカップリングモーメント率 α と称し以下のように定義する。

$$\alpha = \frac{M_s}{M_t} \quad (11)$$

Fig. 7は、 k の変化による α を複合梁と重ね梁の両理論式から求めた曲線と、モデル1とモデル2の実験から得た実測値を示す。

図から明らかなように、 $k=5$ 以下では両理論ともほとんど等しい α を示し、 k が大きくなるにしたがい複合梁理論では α は1に収束し、重ね梁理論では α は $k=40$ をピークに徐々に下向している。そして、モデル1の実測値 α は、どちらかといえば複合梁の理論値に近い。

しかしながら、モデル2の実測値 α は、複合梁理論値とは明らかに異なり重ね梁理論値と一致している。以上のことから、サンドイッチ梁の強度・剛性の設計をする際、対象とするサンドイッチ材料の k による α をFig. 7

Fig. 7 The relation of " k " with " α " values in both the theories.

から求め、その比重を知ることにより、サンドイッチ梁としての効率を定量化できるものと考え。

5. 結 言

従来、サンドイッチ梁の強度・剛性を求める式として複合梁理論 (I-beam theory) が、非常に便利で、しかも表面材があまり厚くなく心材のせん断剛性もある程度大きい構成のサンドイッチ梁に対しては、実験値が良く一致していた。しかしながら、表面材も厚く心材のせん断剛性の極端に小さい構成の住宅用サンドイッチパネルにこの理論を適用すると、実験値の方がかなり大となり、その原因を究明する必要があった。

本実験により、面・心材の弾性率比 k の小さい場合は、複合梁理論値と実験値が良く合い、 k が大きい構成では、複合梁理論値から外れ、重ね梁理論値と実験値が良く一致することを光弾性解析により明らかにし、以下

の結論を得た。

1) 弾性係数の異なる2種以上の材料から成る複合材の強度・剛性の特性を解明する手段として光弾性法は適している。

2) サンドイッチ梁のスパン方向の応力分布 $\sigma_x(y)$ は、面・心材の弾性率比 k が大きくなるに従い、複合梁理論値と良い一致を示す領域から、重ね梁の理論値と良く一致する領域へと移行する。

3) k が大きい構成のサンドイッチ梁の表面板応力を従来どおりの複合梁理論により求めると、実際の最外層の応力は、理論値の4~5倍の応力が作用していることになり危険側となる。

4) 外力によるモーメント M と光弾性解析によるモーメント M_i は、モデル1とモデル2とも良く一致することを示した。また、カップリングモーメント M_s の M または M_i に対する割合をカップリングモーメント率 α と定義し、複合梁理論と重ね梁理論式から求めた理論的 α 曲線と、モデル1と2の実測値 α を Fig. 7 に示した。この図から $k=4$ 以下では、両理論から求まる α は大差なく、 $k=50$ 以上においては両理論により求まる α は大きく異なり、光弾性実験結果 ($k=530$, $\alpha=0.72$) では、重ね梁理論に近づくことがわかった。そして、 k の変化に対する α 値が定まれば、任意構成のサンドイッチ梁の k に対する α を求め、対象とする実際のサンドイッチ梁の比重を知ることにより梁としての効率を定量化できるものとする。

謝辞：本報告をまとめるにあたり、全般的なご助言を

くださいました東京大学宇宙航空研究所河田幸三教授、同大学工学部船舶工学科金原勲助教授、また、理論式の誘導および細部にわたりご助言いただいた、同宇宙航空研究所福田博講師、ならびに各箇所でも適切なご助言をしてくださいました河田研究室、大学院生、高雄喜裕、黒河邦彦両氏に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 島村昭治，宮入裕夫：サンドイッチ構造，日刊工業新聞社（1974），203.
- 2) 赤坂 隆：軽構造の理論とその応用（林 毅編），日科技連（1966），第15章.
- 3) F. Plantema：*Sandwich Construction*，John Wiley & Sons, Inc., New York（1966），1.
- 4) N.J. Hoff：Bending and Buckling of Rectangular Sandwich Plates，NACA TN-2225（1950）.
- 5) E. Reissner & Y. Stavsky：*J. App. Mech.*，28, 9（1961），402.
- 6) 金原 勲：強化プラスチック，19, 11（1974），514.
- 7) 石渡喜久治，林 龍一，剣持 潔：製科研報告，73（1974），37.
- 8) 辻 二郎，西田正孝，河田幸三：光弾性実験法，日刊工業新聞社（1949），141.
- 9) M.M. Frocht：*Photoelasticity*（Vol. 2），John Wiley & Sons, Inc., New York（1948），417.
- 10) S.K. Bansal & C.L. Amba-Rao：*AIAA. J.*，10, 10（1972），1346.
- 11) V.G. Grinius：*Tech. Rep.*，AFML-TR-66-177.
- 12) 杉山英男：木構造，彰国社（1971），275.
- 13) 菱田一郎，真野 創：造船協会論文集，第104号（1959）.