研究論文

コヒーシブ要素を用いた層間はく離シミュレーションにおける数値安定化

前場 豊^{*1}, 胡 寧^{*2}, 福永 久雄^{*3}

(2005年3月2日受付)

A Technique for Stabilizing Finite Element Simulations of Delamination Propagation in Composite Laminates Using Cohesive Interface Elements

Yutaka ZENBA,^{*1} Ning HU^{*2} and Hisao FUKUNAGA^{*3}

(Received March 2, 2005)

In this paper, we propose a very useful and simple technique to stabilize the finite element simulations of delamination propagation in composite laminates when using cohesive interface model of comparatively coarse meshes. In this method, the move limit in the cohesive zone is built up to restrict the displacements of upper and lower layers of laminates. A forward Lagrange multiplier method, which is employed to enforce these constraint conditions, is realized in the explicit time integration scheme. The size of the move limit is theoretically discussed. Furthermore, a damping technique for avoiding the numerical instability put forward by other researchers is modified for the explicit time integration scheme and bi-linear cohesive model for composites. The characteristics of these two techniques are examined. Moreover, a DCB problem is employed to illustrate the validity of the present method.

1. 緒 言

繊維強化複合材料の損傷には層間はく離, マトリックスクラック, 繊維破断があり, 中でも層間はく離は積層複合材料の主要な損傷パターンである。この層間の損傷をシミュレーションするためにインターフェースに結合力のあるコヒーシブ要素 (cohesive element) を用いる手法が提案されており, 広く研究されている。大きく分けると層間の節点間をバネ要素で結合するモデル¹⁾と, 層間にソリッド要素を配置して層間を連続的に結合するモデル^{2~4)}とがある。

コヒーシブ要素を使うとき, 特に粗いメッシュを用いるとしばしば数値的な不安定現象を生じる^{5,6)}。これは急速なはく離進展によるもので, コヒーシブの応力が層

間強度のピークに達した直後に起こる。これらの不安定性の発生直後では, ニュートン・ラブソン法などの陰解法における収束半径はしばしばゼロに近い。また, 中央差分法などの陽解法では不安定性の始まった後に平衡経路をたどることが難しく, それが物理的に意味を持たない解を導く。平衡経路をたどらない破壊は荷重の急落を引き起こし, 少ない外力増加に対し極めて大きな変位増加を招くため計算が発散してしまうことになる。

この不安定性に対し, これまで多くの研究でメッシュサイズを細かくすると滑らかな損傷進展解析が可能であることが分かっている。一方で間島と末益^{7,8)} ははく離領域に非線形バネとソリッド要素を配置した場合について検討し, ソリッド要素は要素サイズが大きくてもより安定した解析が可能であることを示した。SchellekensとBorst⁹⁾ はコヒーシブ要素に使用する数値積分手法の影響について検証している。また, 不安定性の後で平衡経路をたどる方法としてRiks¹⁰⁾ らの方法があるが, 最近この数値不安定性を取り除くために, GaoとBower¹¹⁾ がはく離時の解放エネルギーを消散するために一種の人工減衰を使用する方法を提案した。彼らの方法はXu-Needleman構成則¹²⁾と陰解法を用いており,

^{*1~*3} 東北大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻 (980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉01)

Department of Aerospace Engineering, Graduate School of Engineering, Tohoku University, Aramaki-Aza-Aoba 01, Aoba-ku, Sendai 980-8579, Japan

^{*1} 大学院生 Graduate Student, ^{*2} 助教授 Associate Professor, ^{*3} 教授 Professor

効果的に不安定さを軽減できることが分かっている。

これらの背景を踏まえ、計算コストを増大させることなく損傷進展解析を実現するために、本研究では粗い要素で安定した損傷進展解析を行う方法について検討する。まず要素サイズやコヒーシブ要素の材料特性が数値不安定性に与える影響を示し、次に粗い要素での数値安定化手法について二つの方法を考える。一つは Gao¹¹⁾ の減衰法を陽解法と双一次の剛性特性を持つコヒーシブ要素に拡張する。二つ目の方法は数値不安定性を解消する新しい方法を提案する。この方法でははく離先端のコヒーシブ要素に対し強制的な変位限界を導入する。また適切な変位限界の大きさについて定式化を行い、この二つの手法の効果を数値計算により検証する。

2. 解析手法

2.1 有限要素法

層間ははく離のシミュレーションにはニュートン・ラプソン法を用いた陰解法が広く用いられているが、本論文では非平衡力の繰返し計算が不要な中央差分法を用いる。定式化した運動方程式は次式で与えられる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{p}_n = \mathbf{f}_n \quad (1)$$

ここで $\mathbf{M}$ は質量マトリックス、 $\mathbf{C}$ は減衰マトリックス、 $\mathbf{p}_n$ は内力、 $\mathbf{f}_n$ は外力である。また、変位ベクトルは次式で与えられる。

$$\mathbf{u}_{n+1} = \left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \right)^{-1} \left[(\Delta t)^2 (-\mathbf{p}_n + \mathbf{f}_n) + 2\mathbf{M}\mathbf{u}_n - \left(\mathbf{M} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{n-1} \right] \quad (2)$$

また、内力は次式で表される。

$$\mathbf{p}_n = \sum_{i=1}^{NE} \mathbf{k}_n^i (\mathbf{u}_n^i) \mathbf{u}_n^i \quad (3)$$

NE は全要素数、 $\mathbf{k}_n^i$ は n ステップにおける各要素の剛性マトリックスであり、損傷の進展によってコヒーシブ要素の剛性マトリックスが更新される。

中央差分法は繰返し計算が不要であるという利点があるが、時間ステップを小さく刻まなければならないため計算時間が増大する欠点がある。ところが本研究で取り扱う損傷解析は準静的な問題であるので中央差分法では効率が悪い。そこで、損傷が生じるまでは時間ステップの大きいニューマーク β 法を用い、損傷が進展し始めた後に中央差分法を用いるハイブリッド解析を行う。なお、要素については、メッシュの分割形状に依存しにくく弾塑性解析にも有効である Hu-Washizu 理論に基づいた変位・応力のハイブリッド要素を用いる¹³⁾。

Fig. 1 Interface element.

2.2 コヒーシブ要素 (cohesive element)

層間ははく離をシミュレーションするために、Fig. 1 に示すような層間に初期厚さゼロの 8 節点コヒーシブ要素を配置し、はく離進展とともに剛性を低下させるモデルを用いる⁴⁾。

このコヒーシブ要素の構成方程式は層間に生ずる変位と伝達荷重の関係から導かれる。この手法は Ahmad¹⁴⁾ や Beer¹⁵⁾ に基づくもので、以下のように考える。

変形の全くない状態から荷重を負荷すると、初期厚さがゼロであったコヒーシブ要素に変形が生じる。このときコヒーシブ要素内の上面・下面の相対変位を水平面内に分解した変位を δ_1 , δ_2 , それに直交する方向に分解した変位を δ_3 とすると、 δ_3 はモード I 方向の開口変位、 δ_1 , δ_2 はモード II, III 方向の変位を表す (これらを有効変位と呼ぶ)。また、モードが混合している状態での有効変位は次式で表される。

$$\delta_m = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \langle \delta_3 \rangle^2} \quad (4)$$

$$\text{ここで、} \langle x \rangle = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

軟化が始まる有効変位を δ_m^0 , 完全にはく離した時の有効変位を δ_m^f , 各積分点における時間履歴上の最大の有効変位を $\delta_m^{\max}$ とし、数値積分にはニュートン・コーツ積分を用いる。なお、 δ_m^0 と δ_m^f はモード I ～モード III の層間強度 N , S , T , 破壊靱性 $G_{Ic} \sim G_{IIIc}$, および初期剛性を表すパラメータ K によって決まる値であるが、詳細は文献 4) を参照されたい。

これらよりコヒーシブ要素の剛性 $\mathbf{k}$ は下式となる。

$$\mathbf{k} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{D}$ の成分を D_{ij} とすると、

$$D_{ij} = \begin{cases} \bar{\delta}_{ij} K & (\delta_m^{\max} \leq \delta_m^0) \\ \bar{\delta}_{ij} \left[(1-d) K + K d \frac{\bar{\delta}_{ij} \langle -\delta_3 \rangle}{-\delta_3} \right] & (\delta_m^0 < \delta_m^{\max} < \delta_m^f) \\ \bar{\delta}_{i3} \bar{\delta}_{3j} \frac{\langle -\delta_3 \rangle}{-\delta_3} K & (\delta_m^{\max} \geq \delta_m^f) \end{cases} \quad (6)$$

$$d = \frac{\delta_m'(\delta_m^{\max} - \delta_m^0)}{\delta_m^{\max}(\delta_m' - \delta_m^0)}, \quad d \in [0, 1]$$

$\bar{\delta}_{ij}$: Kronecker delta for $(i, j=1\sim 3)$

2.3 減衰効果による数値不安定の軽減

急速なはく離進展による荷重の急落に起因する数値的な振動を抑制するために、コヒーシブ要素に一種の粘性を付加する。この手法は Gao ら¹¹⁾ が陰解法に適用しその有効性を検証している。本論文ではこの手法をもとに、陽解法に拡張すると共に多少の修正を加えた。

この粘性効果を付与すると、(6) 式で表したコヒーシブ要素の剛性成分は (7) 式のように修正される。ξ は減衰効果の大きさを表すパラメータである。

$$D_{ij} = \begin{cases} \bar{\delta}_{ij} K \leftarrow \delta_m^{\max} \leq \delta_m^0 \\ \bar{\delta}_{ij} [(1-d)K + \xi \frac{\dot{\delta}_i}{\delta_i}] \leftarrow \delta_m^0 < \delta_m^{\max} < \delta_m', \delta_3 > 0 \\ \bar{\delta}_{i3} \bar{\delta}_{3j} K \leftarrow \delta_m^0 < \delta_m^{\max} < \delta_m', \delta_3 \leq 0 \\ \bar{\delta}_{ij} \xi \frac{\dot{\delta}_i}{\delta_i} \leftarrow \delta_m^{\max} \geq \delta_m', \delta_3 > 0 \\ \bar{\delta}_{i3} \bar{\delta}_{3j} K \leftarrow \delta_m^{\max} \geq \delta_m', \delta_3 \leq 0 \end{cases}$$

ただし、 $\xi = \zeta N \delta_m^0$ (7)

ここで上式と (6) 式との違いについて簡単に述べる。一つは完全にはく離した状態 ($\delta_m^{\max}$ が δ_m' より大きい状態) でも有効変位速度に応じた剛性が存在することである。もう一つはモード I ～ III 方向のそれぞれの有効変位速度が異なる場合は D_{11} , D_{22} , D_{33} は異なる成分を持つことである。この項によりエネルギー消散効果が与えられ、急速なはく離進展時の数値振動を抑制する。

2.4 変位抑制による数値不安定の軽減

数値的な振動を抑制するもう一つの手法を提案する。はく離進展時の不安定な挙動は、コヒーシブ要素の剛性が破壊によって急落するために突然大きなエネルギーが解放され、結果的に開口変位が急速に増加することによる。そこで、減衰効果による剛性修正ではなく変位の増加そのものを強制的に抑制することで不安定な現象を回避する手法を考える。

モード I を例に、Fig. 2 に示すようにコヒーシブ要素の上面節点に変位の固定壁 (太い実線) を超えるときは、その節点変位を強制的に引き戻すものとする。これは現在の計算ステップにおいてコヒーシブ要素にある節点が、2 つの固定壁によって定義される変位制限域の中でだけ動くことができるということを意味する。下面の節点についても太い波線の変位制限域で同様の制限を加える。この考え方は一般的な最適化問題において、設計変数の取りうる値を制限するためのムーブリミットの概

Fig. 2 Move-limit model.

念と類似している。

またこの方法はコヒーシブ要素にある節点に対して一種の接触問題を考慮することを意味する。これを考慮した減衰のない運動方程式は次式のように定義される¹⁶⁾。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{p}_n + \mathbf{G}_{n+1}^T \boldsymbol{\lambda}_n = \mathbf{f}_n \quad (8)$$

ここで n は時間ステップ、 $\mathbf{M}$ は質量マトリックス、 $\mathbf{G}$ は接触表面の変位を制約するマトリックス、 $\boldsymbol{\lambda}$ は接触力を表す。接触の条件は下式で定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{n+1}^T (\mathbf{u}_{n+1}^i - \mathbf{u}_n^i - \mathbf{Q}^i) &= 0, \text{ if } \mathbf{u}_{n+1}^i - \mathbf{u}_n^i > 0 \\ \mathbf{G}_{n+1}^T (\mathbf{u}_{n+1}^i - \mathbf{u}_n^i - \mathbf{Q}^i) &= 0, \text{ if } \mathbf{u}_{n+1}^i - \mathbf{u}_n^i \leq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$i=1, 2, 3$

i は 3 つの軸方向を示し、 $\mathbf{Q}^i$ は 3 つの軸方向でそれぞれ 2 つの固定壁によって定義される変位制限幅の半分である。すなわち x , y , z 方向の 3 成分ベクトルで、次式のように表される。

$$\mathbf{Q} = \{Q^1 \quad Q^2 \quad Q^3\}^T \quad (10)$$

ここで Q^1 , Q^2 , Q^3 は正である。

上記の方程式を陽解法である中央差分法を考慮すると次式の関係を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &= \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1}) \\ \ddot{\mathbf{u}}_n &= \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}) \end{aligned} \quad (11)$$

これより、 $n+1$ ステップの変位を直接求めると、

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^* + \mathbf{u}_{n+1}^c \quad (12)$$

ここで、 $\mathbf{u}_{n+1}^*$ は、

$$\mathbf{u}_{n+1}^* = \Delta t^2 \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{f}_n - \mathbf{p}_n] + 2\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1} \quad (13)$$

であり, $\mathbf{u}_{n+1}^*$ は変位抑制効果を持たない中央差分法の変位を意味する. さらに, 変位制限域を超えないために付加する修正変位は下式で表される.

$$\mathbf{u}_{n+1}^c = -\Delta t^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_{n+1}^T \lambda_n \quad (14)$$

また, 固定壁による接触力は下式となる.

$$\begin{aligned} \lambda_n &= [\Delta t^2 \mathbf{G}_{n+1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_{n+1}^T]^{-1} \mathbf{G}_{n+1} (\mathbf{u}_{n+1}^{*i} - \mathbf{u}_n^{*i} - \mathbf{Q}^i) = 0, \\ &\quad \text{if } \mathbf{u}_{n+1}^{*i} - \mathbf{u}_n^{*i} > 0, i=1, 2, 3 \\ \lambda_n &= [\Delta t^2 \mathbf{G}_{n+1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}_{n+1}^T]^{-1} \mathbf{G}_{n+1} (\mathbf{u}_{n+1}^{*i} - \mathbf{u}_n^{*i} + \mathbf{Q}^i) = 0, \\ &\quad \text{if } \mathbf{u}_{n+1}^{*i} - \mathbf{u}_n^{*i} \leq 0, i=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (15)$$

なお, 過度の変位抑制を避けるために, 二つの固定壁によって定義される変位制限幅を次式から求めることとする.

$$Q^i = \alpha V_L \Delta t \quad (16)$$

ここで, V_L は荷重条件として与えた節点の変位速度, α は変位制限幅を制御する変位抑制パラメータである.

2.5 変位抑制パラメータ α の算定

はく離先端の変位を抑制することは損傷の進展を妨げる可能性がある, 変位抑制は出来るだけ最小限に抑えることが望ましい. そこで α を損傷の状況によって適切に算定する方法を考える.

計算が安定する条件は, 一つの時間ステップ間で外力のなす仕事はコヒーシブ要素で解放されるエネルギーより大きい場合であり, これを定式化すると次式となる.

$$\sum_{i=1}^{NF} F_i V_L \Delta t \geq \sum_{i=1}^{NEC} \left(\frac{1}{2} \Delta u_1^2 K + \frac{1}{2} \Delta u_2^2 K + \frac{1}{2} \Delta u_3^2 K \right) A_i \quad (17)$$

ここで, NF は外力を加えた節点の総数で, NEC はコヒーシブ要素の総数である.

また, DCB ではモード I のはく離が支配的であり, モード II とモード III の相対変位は小さいので無視すると,

$$\Delta u_1 = \Delta u_2 = 0 \quad (18)$$

さらに, コヒーシブ要素の上下面の絶対変位が符号対称

で同一であると仮定し, その量の絶対値を $\Delta u_c = \alpha V_L \Delta t$ とすると,

$$\Delta u_3 = 2\Delta u_c = 2\alpha V_L \Delta t \quad (19)$$

となる. これらより α は次式のように定義できる.

$$\alpha = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{NF} F_i V_L \Delta t} / \sum_{i=1}^{NE} 2KA_i}{V_L \Delta t} \quad (20)$$

ただし, 通常は全てのコヒーシブ要素が軟化しているとは考えにくいので NE は下式を満たすコヒーシブ要素の数のみを考慮する.

$$\frac{\sum_{i=1}^{NINT} \delta_m^{\max i}}{NINT} > \epsilon \quad (21)$$

ここで, $NINT$ は一つの要素内の積分点の数であり, ϵ は適当に小さな値をとる定数である.

これにより, 変位抑制パラメータ α は, コヒーシブ要素の位置と初期剛性, およびその他の節点の変形状態で動的に可変する値となる.

なお上記で導いた α においては, 現在の時間ステップ内における構造のひずみエネルギーと運動エネルギーの増分の影響は小さいものとして無視している.

3. 計算結果

3.1 減衰あるいは変位抑制を考慮しない損傷進展

まず, 減衰効果や変位抑制を考慮しない DCB の計算結果を示す. 計算モデルは Fig. 3 に示すように, 長さ 150 mm × 幅 20 mm の片持ち 2 層板, 板厚は 1 層あたり 1.98 mm, 自由端から 55 mm に初期はく離を設定した. 材料は T 300/977-2, (0°)₂₄ とし, 軸方向ヤング率 $E_{11} = 150.0$ GPa, $E_{22} = E_{33} = 11.0$ GPa, $G_{12} = G_{13} = 6.0$ GPa, $G_{23} = 3.7$ GPa, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.25$, $\nu_{23} = 0.45$ であ

Fig. 3 DCB model.

Table 1 Properties for DCB.

Case No.	N (MPa)	K (N/mm ³)	G_{IC} (kJ/m ²)	δ_m^0 (mm)	δ_m^f (mm)
1	10	2.0×10^3	0.378	0.0050	0.0756
2	20	2.0×10^3	0.378	0.0100	0.0378
3	45 ⁴⁾	3.0×10^4	0.268 ⁴⁾	0.0015	0.0119

Fig. 4 Specific of cohesive element (Mode I).

る。また、コヒーシブ要素の材料定数は Table 1 に示すように Case 1～3 を考える。Case 3 は実験⁴⁾で用いられている層間強度 N と破壊靱性 G であり、Case 1 および 2 は数値安定性を検証するために用意した定数である。また、それぞれのケースにおけるモード I の応力とはく離開口変位の特性を Fig. 4 に示す。

Fig. 5 (a) にはコヒーシブ要素の材料特性による影響を検証するために、はく離進展方向に 2 mm サイズ（幅方向は 1 分割）における Case 1～3 の荷重と開口変位の結果を示す。図には比較のため実験⁴⁾をプロットしている。Case 3 は実験で用いた試験片と同じ層間強度と破壊靱性における結果であるが、2 mm メッシュおよび 1 mm メッシュの場合、ピーク荷重に達した直後に荷重が急落して計算を中断している。それに対して層間強度と初期剛性の低い Case 1 の場合は滑らかに解析が進捗しており、Case 2 では荷重の急落による計算中断はないが数値的な振動が発生している。これは Fig. 4 の特性から、層間強度と初期剛性が高いほどはく離直前まで高い伝達応力を受け持っていたコヒーシブ要素が急激に軟化するために急速なはく離進展が生じていると考えられる。また Case 1 に見られるように計算を安定させるために故意に低い層間強度と初期剛性を用いると、はく離が始まる前からコヒーシブ要素の軟化の影響が大きく現れ、初期勾配に誤差を生じる。Fig. 5 (b) には要素サイズが数値安定性に与える影響について検証するために、材料特性 Case 2 においてメッシュサイズを 1～3 mm とした場合の結果を示す。Fig. 5 (a) において Case 2 では数値振動を示していたが、メッシュを 1 mm と細かくすることにより滑らかな損傷進展が可能であることが分かる。それに対して 3 mm メッシュでは不安定さが増大し荷重の急落を引き起こしている。

(a) Case 1～3, mesh=2 mm

(b) Case 2, mesh=1～3 mm

Fig. 5 Numerical results.

これらの結果から、層間強度と初期剛性が高いほど、あるいはメッシュサイズが粗いほど時間ステップごとのはく離時の解放エネルギーが大きく、数値不安定性が生じやすいことが分かる。また、故意にコヒーシブ要素の強度を下げて安定性を期待してもはく離開始前から初期勾配に誤差が生じてしまうため、このままでは粗い要素でのシミュレーションが困難である。

なお、コヒーシブ要素の剛性低下モデルが数値不安定性を軽減できるかどうかを検証するために、双一次特性以外に指数関数で剛性を低下させるモデル¹⁷⁾などを導入して解析を行ったが、いずれも不安定性を解消するような効果は見られなかった。

3.2 減衰効果を考慮した損傷進展

数値不安定さを軽減するために減衰効果を考慮した場合の結果を Fig. 6 に示す。ここで、(7) 式に示す減衰効果を示すパラメータ ξ は安定した計算が可能となる値を経験的に設定した。

Fig. 6 (a) には 3.1 節の標準解析で数値振動を示して

(a) Case 2, mesh=2 mm

(b) Case 3, mesh=1 mm

(c) Case 3, mesh=2 mm

Fig. 6 Numerical results with damping.

いた Case 2 における 2 mm メッシュの結果を示す。減衰パラメータ ξ ($\times 10^{-2}$ s/mm²) は 0.5, 10.0 であり、減衰効果により高周波の数値振動が除去され安定した解析が可能であることが分かる。Fig. 6 (b) には Case 3 の 1 mm メッシュにおける結果を示している、このとき減衰パラメータ ξ は 5.0 未満では荷重の急落を防げな

いので 5.0, 10.0 とした。Case 3 では減衰や変位抑制を考慮しないともはや 1 mm メッシュでもピーク直後に荷重が急落して計算を中断していたのに対し、減衰効果を付与することで安定した解析が可能となっている。また、Fig. 6 (c) に示す Case 3 の 2 mm メッシュの結果より、計算を中断するような荷重の急落はないが、ピーク直後に数値振動が見られる。

これらの結果から、減衰や変位抑制を考慮しない解析において不安定あるいは計算が中断するような材料特性や粗いメッシュサイズでも、減衰効果を考慮することにより安定した計算が可能であり、特に高周波の数値振動を除去する効果が高い。一方で、Fig. 6 (c) のように層間強度と初期剛性が高く粗い要素でかつピーク荷重直後のように急速な離進展が生じやすい箇所については減衰効果だけで不安定性を除去することは難しい。また安定性を期待して大きい減衰効果を付与すると損傷進展が妨げられることがある。Fig. 6 (a) において減衰パラメータ $\xi=10.0$ の場合などは、途中から荷重が降下していないことが分かる。この原因は (7) 式において、減衰効果パラメータ ξ が大きいほどコヒーシブ要素の剛性が大きくなることによる。減衰効果によってコヒーシブ要素が軟化プロセスに入った後も剛性の低下が妨げられ、あるいは完全にはく離した後も剛性を有するため起こる。従って減衰効果パラメータ ξ が大きい場合はこの減衰効果が計算の最終結果に与える影響が大きく、数値の不安定さを軽減しつつ損傷の進展を妨げない程度の適切な ξ 値を経験的に設定しなければならない。

3.3 変位抑制効果を考慮した損傷進展

次に変位抑制効果を考慮した結果を Fig. 7 に示す。変位を抑制する変位制限幅の大きさを示すパラメータ α については 0.7 の固定値の場合と、(20) 式による自動設定値を用いた場合の結果を示した。自動設定を行った場合の α は本モデルの Case 2 で最大 4 程度であるが、時間ステップごと、はく離要素ごとに内部計算されており、計算過程において一定値ではない。また、 α が大きいほど変位制限幅が大きく緩い変位抑制効果であることを意味する。

Fig. 7 (a) に示すように Case 2, 2 mm メッシュで Fig. 5 (a) で見られたような高周波の数値振動が除去されている。また減衰効果を考慮した Fig. 6 (a) と比較して、荷重の降下が抑制されることはない。変位抑制パラメータ α については結果に大きな差は生じず、(20) 式で算定した α の妥当性が示された。Fig. 7 (b) に示す Case 3 における 1 mm メッシュの結果においても、

Fig. 7 Numerical results with move-limit.

Fig. 6 (b) と比較して突出したピークも無く、かつ荷重降下もスムーズである。Fig. 7 (c) における Case 3、メッシュ 2 mm の結果では、減衰効果ではピーク荷重直後の不安定性を解消できなかった Fig. 6 (c) と比較して優れた安定性を発揮している。なお、Fig. 8 には幅方向に 4 分割した場合のはく離先端近傍の様子 (Fig. 7 (b) の

Fig. 8 Delamination shape for DCB.

Fig. 9 Displacement δ_m at peak load.

A 点) を示したが、幅方向のはく離形状もエッジ効果を再現出来ていることが分かる。

これらの結果から、新たに提案した本手法は計算が中断せずに安定して進行するのに加え、減衰効果よりも滑らかでかつ損傷進展を妨げることもなく、計算の最終結果に与える影響が軽微であることが分かる。

3.4 メッシュサイズとピーク荷重の相関

ここまで減衰効果と変位抑制効果による数値安定化の結果を示したが、ここでメッシュサイズによって損傷進展が始まるピーク荷重に差異が見られた。この原因はコヒーシブ要素内の有効変位分布に起因すると考えられる。

今、コヒーシブ要素は中間節点を持たない要素であり、要素内の積分点数は 5×5 点である。このコヒーシブ要素の有効変位 δ_m は 1 つの要素内で線形分布であるので、開口先端の有効変位が δ_m^0 に到達するときには、同一要素内にある他の積分点の有効変位も線形に生じていなければならない。Fig. 9 には Case 2 および Case 3 において、荷重がピークに達したときにはく離先端近傍の有効変位 δ_m をプロットした。これより、メッシュサイズが大きいほどはく離先端近傍で多くの変形を必要とするためピーク荷重も増大すると考えられる。要素サイ

ズの妥当性については Mi ら⁶⁾ や 間島 ら⁷⁾ が “数個の要素が軟化プロセス ($\delta_m^{\max}$ が δ_m^0 より大きい状態) に入るような要素サイズが必要” としている。本研究においても減衰又は変位抑制効果を考慮しなくても安定した解析が可能であった Case 2 の 1 mm メッシュではその条件を満たしている。しかし今回提案した変位抑制効果を導入した場合は必ずしも複数の要素で軟化プロセスを再現できなくても計算は安定して進む。もう少し詳細に検討すると、荷重が最大ピークに達する条件はあく離先端の1つ目の積分点が δ_m^0 に達し、かつはく離先端の1つ目の要素の全積分点が δ_m^0 に到達する、という二つの条件を満たす場合である。Case 2 の 1 mm メッシュではちょうどその条件上にあるが、その他のケースではその条件を満たすまでにはく離先端近傍の積分点でより大きい有効変位が必要となり、これがピーク荷重の誤差の要因となっている。

3.5 減衰効果および変位抑制効果の影響

数値不安定性のパターンは大きく2つに分かれ、一つは Fig. 5 (a) の Case 2, 2 mm メッシュのように荷重の急落と急上昇を繰り返す振動を示すもの、もう一つは Fig. 5 (a) の Case 3 や Fig. 5 (b) の Case 2, 3 mm メッシュのように荷重が急落し計算が続行できないものがある。これらの原因は、(17) 式に示すように解放されるエネルギーが外力のなす仕事の増分よりも大きいときに生じる。ここで簡単のために (1) 式において慣性力や構造の減衰を無視すると、ある時間ステップで急激にはく離が進展するとコヒーシブ要素の剛性はゼロとなって内力 $\mathbf{p}_n$ は大きく減少し、それに釣り合うために外力 $\mathbf{f}_n$ も急落する。特に Case 3 においてはその高い初期剛性パラメータと層間強度により一度に解放されるエネルギーが非常に大きいため、その傾向が顕著である。Case 2 においては荷重の急落後、はく離最先端のコヒーシブ要素の剛性がゼロになったことにより急激な変位増加をまねき、はく離先端の2番目の要素が多くの伝達荷重を受け持つため荷重は過剰に増加する。これらが物理的に意味のない数値不安定を生む。従って (20) 式で示した変位制限幅はこの物理的に意味のない数値不安定を除去する効果を持つと考えられる。

Fig. 10 には Case 2 における外力のなす仕事と減衰効果 ($\xi=0.5$) および変位抑制効果 ($\alpha=(20)$ 式) がなす仕事についてプロットしたものである。外力による仕事、およびはく離によって消散するエネルギーは減衰および変位抑制効果でほぼ同一であるため変位抑制効果の結果のみ示している。ここで減衰・変位抑制効果のなす

Fig. 10 Work by damping and move-limit.

仕事について検証すると、例えば 1 mm メッシュでは減衰や変位抑制効果を考慮しなくても安定なため、そのなす仕事はゼロである。振動を示す 2 mm の場合でも、数値安定性のために導入した減衰・変位抑制効果のなす仕事は外力のなす仕事に対して軽微であることが分かる。また、荷重急落を示す 3 mm メッシュの場合は 2 mm メッシュに比べて減衰・変位抑制効果のなす仕事は若干大きくなるものの、はく離によって消散するエネルギーは 1 mm メッシュの場合とほぼ同一であることから、減衰、変位抑制効果がはく離進展を妨げる可能性は小さく、導入される仕事は主に計算を安定させるために費やされていると考えられる。

なお、本研究では準静的なモデルで検証を行っているが、衝撃問題などの動的問題に対しては (17) 式において荷重速度 V_L の見積もりが難しく、運動エネルギーの増分も無視しているため、(20) 式で示した適切な変位制限幅の算定が困難となる。動的問題にも適用可能な手法については今後の検討課題としたい。

4. 結 言

本研究では積層複合材料の損傷進展解析時に問題となる数値不安定性を軽減するための方法を提案した。粗いメッシュで生じる数値不安定性を、減衰効果を考慮する方法と変位抑制効果を考慮する方法で回避出来ることを示した。また、減衰効果では不安定な場合でも、変位抑制効果を用いることで、高い層間強度や初期剛性あるいは大きいメッシュサイズでも安定して解析可能であることを示した。さらに変位抑制幅を動的に求める方法を提案し、数値安定化とともに生ずる損傷の進展を妨げる現象を回避できた。メッシュサイズが大きくなることによるピーク荷重の増加については、はく離先端のコヒーシ

ブ要素の有効変位が線形分布をとることに起因するものであることを示した。

これにより、従来メッシュサイズを非常に細かくしなければ対応できなかった数値不安定性に対して、計算コストを増大させることなく安定したシミュレーションが可能となる。今後の課題として、本手法を平板や円筒といった形状にも適用可能であることを検証するとともに、準静的に限らず衝撃荷重下での適用に発展させることが重要となる。

参 考 文 献

- 1) W. Cui, M.R. Wisnom : *Composites*, **24**, 6 (1993), 467-474.
- 2) M.F. de Moura, J.P. Goncalves, A.T. Marques & P.T. de Castro : *J. Compos. Mater.*, **31**, 15 (1997), 1462-1479.
- 3) E.D. Reddy Jr., F.J. Mello & T.R. Guess : *J. Compos. Mater.*, **31**, 8 (1997), 812-831.
- 4) P.P. Camanho & C.G. Davila : NASA/TM-2002-211737 (2002).
- 5) J.P. Goncalves, M.F. de Moura, P.T. de Castro & A.T. Marques : *Eng. Comput.*, **17**, 1 (2000), 28-47.
- 6) Y. Mi, M.A. Crisfield & G.A.O. Davis : *J. Compos. Mater.*, **32**, 14 (1998), 1246-1272.
- 7) 間島 理, 末益博志 : 日本複合材料学会誌, **29**, 6 (2003), 234-241.
- 8) 間島 理, 末益博志 : 日本複合材料学会誌, **26**, 6 (2000), 219-226.
- 9) J.C.J. Schellekens & R. de Borst : *Int. J. Numerical Method Eng.*, **36** (1993), 43-46.
- 10) E. Riks : *J. Solids Structures*, **15**, 7 (1979), 529-551.
- 11) Y.F. Gao & A.F. Bower : *Modeling Simul. Mater. Sci. Eng.*, **12**, (2004), 453-463.
- 12) X.P. Wu & A. Needleman : *J. Mech. Phys. Solids*, **42**, 9 (1994), 1397-1434.
- 13) Y.P. Cao, N. Hu, J. Lu, H. Fukunaga & Z.H. Yao : *Int. J. Numer. Eng.*, **53** (2002), 2529-2548.
- 14) S. Ahmad, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz : *Int. J. Numerical Method Eng.*, **2** (1970), 419-451.
- 15) G. Beer : *Int. J. Numerical Method Eng.*, **21** (1985), 585-600.
- 16) N.J. Carpenter, R.L. Taylor & M. G. Katona : *Int. J. Numerical Method Eng.*, **32** (1991), 103-128.
- 17) M. Thomas : Proceeding of the 5th International PhD Symposium in Civil Eng. (2004), pp. 1-9.