大学の機械工学系学科での教育経験を通じて見た 学部卒業時に必要とされる数学力

A Math Knowledge Inevitable for Bachelor Engineer, Enlightened Through Teaching at
Mechanical Engineering Department

原 田 昭 治^{*1}
Shoji HARADA

In spite of efforts of rebirthing engineering education, degradation of student achievement is progressing due to several reasons. In particular, introducing accrediting system in each university has actually contributed to improve engineering education. However, math achievement of student having different study path is unclear. Taking into account the math knowledge inevitable for bachelor engineer, present author proposes a concrete desirable math knowledge on differentiation, integral, ordinal and extraordinary differential equation, vector, tensor and complex variables at graduation, derived from his teaching career at department of mechanical engineering.

Keywords : Math Knowledge, Items of Math, Achievement at Graduation, Mechanical Engineer

キーワード：数学力，数学事項，卒業時到達力，機械工学

1. はじめに

理系離れが云われて久しいが，進学予備校河合塾の調査によると，バブル崩壊後若者の実学志向が強くなり，理系志願者の中で医・歯・薬・保健各学部あるいはバイオブームによる理・農学部等へ受験生の志願シフトにより，工学部一人負け型の志願者減少が実は理系離れの内容であるそうである．この理系離れ＝工学部離れに加え，90年代終わりに社会問題化した大学生の学力低下問題，あるいは最近の大学全入問題等々，大学教育は大きな危機を迎えている．このような社会の変化に対処すべく，かつて無かったような様々な教育改革が10年来行われているが，特効薬は無く，暗中模索が続いている．

筆者が大学に入学した60年代初期（進学率10数％）は，高度経済成長幕開け期で，今日のように理系クラスの成績上位者がこぞって医・歯・薬系学部を目指すといった偏った傾向は見られず，数理に強い若者は進んで工学部を選んだ．しかし，入学直後に習う，受験勉強時には全く経験したことのない $\varepsilon - \delta$ 法についていけず，同法が数学好き少年をダメにする，と話題になった．今日では東大の教養クラスで $\varepsilon - \delta$ 法を履修しなくてもよいクラスが設けられていると聞けが，隔世の感がある． $\varepsilon - \delta$ 法に象徴されるように，初年度に履修する教養または工学基礎としての数学（線形代

数，微積，関数論，微分方程式等々）は主に理学部出身の教員が教え，将来それが工学専門科目を履修する際にいかなる場で役に立つか，あまり触れない．（その主な理由は勿論時間が限られていることによると思われるが）それ故，平均的學生は数学に興味を持てず，身に付かないため，専門科目の履修が数学力不足で困難となり，年々この傾向が強くなっている．特に，昨今では高校時代に身につけるべき数学力が不十分なため，多くの大学で補習授業が行われ，その分本来大学で履修すべき事項が減り，専門科目理解力低下を引き起こすジレンマに陥っている．そこで基礎科目と専門科目を滑らかに接続するため，専門科目を担当する教員が数学関連の講義を行うのが一般化している．

このような様々な教育改革が行われているにも拘わらず，専門科目，例えば，機械系だと常に4力（材料力学，熱力学，（水＋流体）力学，機械力学が含まれる），を教える教員間でよく聞かれる言葉は，「数学力が低下しているので専門が教え難い」である．例えば，偏微分を駆使する熱力学の一般関係式の誘導，Navier-Stokes方程式に代表される流体方程式，複素変数を駆使する2次元弾性論，2次元ポテンシャル流れ，変分法・仮想仕事を利用した弾性力学や機械力学等々での基本公式の導出などである．

大学学部及び大学院（修士）卒業時に保有しておくべき数学力について，明確な定義はない．前報¹⁾で技術者に求められる教養としての数学力について述べた．本稿では長年機械工学系の学科で基礎的な数学力

平成 21 年 3 月 19 日受付

※1 九州工業大学名誉教授

を必要とする。材料力学、弾性力学、破壊力学および数値解析等の専門科目の講義を通じて感覚的・経験的に掴んだ、機械系学科の卒業生が備えるべき技術者の卵としての数学力について、平均的素養を備えた学生の日線と考え、具体的に提言・考察する。

ここでは紙面の関係で、微分・積分、微分方程式、ベクトルとテンソルおよび複素関数に焦点を絞って述べる。

2. 本稿で取り上げる数学事項

2.1 微分・積分

微分については常微分と偏微分の区別が重要である。常微分については高校以来慣れ親しんでいるので問題はないが、以下のような逆関数の微分や陰関数の微分は注意が必要である。

$$d(\sin^{-1} \log x) / dx \quad (1)$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x - 3y + 2 = 0 \rightarrow dy/dx \quad (2)$$

勿論導関数の定義に従って微分することは基本中の基本で、各種の微分公式を導く上での基礎となる。

偏微分 $\partial/\partial x$ については常微分 dy/dx との違いが理解されていないことが多い。例えば、関数 $f(x, y)$ において、変数を直交デカルト座標 (x, y) から極座標 (r, θ) に変換した際、

$$\begin{aligned} \partial f(x, y) / \partial x &= \partial f(r, \theta) / \partial x \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

$x = r \cos \theta$ だから $\partial x / \partial r = \cos \theta$, $\partial x / \partial \theta = -r \sin \theta$ 。そこで $\partial r / \partial x$ を求める際、常微分における $dx/dy = 1/(dy/dx)$ と同じように考えて $\partial r / \partial x = 1/(\partial x / \partial r) = 1/\cos \theta$ と計算するものが後を絶たない。偏微分はある関数について微分する際、注目している変数について常微分し、他は定数(一定)と考えることである。今の場合、 r, θ を x, y の陽関数として表示しておくことが重要で、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1} y/x$ と表し、初めて $\partial r / \partial x$, $\partial \theta / \partial x$ が求まる。しかし、既述のように、逆関数の微分に慣れていないため、 $\partial(\tan^{-1} y/x) / \partial x$ の計算もてこずる学生が多い。

積分については、以下の積分が基本と考えている。

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx \quad \int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx \quad (4)$$

$$\int 1/\sqrt{x^2 \pm a^2} dx \quad \int 1/\sqrt{a^2 \pm x^2} dx$$

上記の中でも $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$ が重要である。この積分は部分積分を行い、かつ $x = \tan \theta$ の変数変換を行うことにより、最終的に次式を得る。

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \log|x + \sqrt{x^2 + a^2}| \quad (5)$$

最近統計学が重要視されているが、その基本となる

のは正規分布(ガウス分布)で、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6)$$

無論、この積分の基礎となる積分は

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2 \quad (7)$$

$$(\because \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi / \sin \pi s)$$

である。また、特殊な積分として、特殊積分と呼ばれるものに、以下に示すガンマ関数とベータ関数がある。

$$\text{ガンマ関数 } \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{(x-1)} dt \quad (8)$$

$$\text{ベータ関数 } B(p, q) = \int_0^1 t^{(p-1)} (1-t)^{(q-1)} dx \quad (9)$$

さらに、積分の応用として、原空間 $F(x)$ から積分変換

$$\int F(x)G(x, t)dt \quad (10)$$

により変換した空間 $F(t)$ で取り扱う方法がある。 $G(x, t)$ は積分核と呼ばれるもので、よく知られているLaplace変換、Fourier変換ではそれぞれ $x^{(t-1)}$, $e^{i\omega t}$ となる。また、弾性力学ではMellin変換($G(x, t) = x^{(t-1)}$), Hankel変換($G(x, t) = (tJ_\nu(xt), J_\nu(xt)$; Bessel関数)など特殊な変換が用いられることもある。

重積分も工学問題を考える上で重要である。変数変換を行って実行する重積分の例として、ここでは半楕円の断面2次モーメントについて考える。まず、 x 軸に関して

$$I = \iint_D x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1, y \geq 0 y^2 dx dy \quad (11)$$

ここで、 $x = aX, y = bY$ と変数変換を行うと、Jacobian $J = ab$, さらに極座標変換($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$)を行うと $J = r$ だから、

$$I = \frac{\pi}{8} ab^3 \quad (12)$$

図心 $y_c = \int y dA / A$ を求め、移動定理を用いて図心を通る軸に関する断面2次モーメントを求めると、以下ようになる。

$$I_0 = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) ab^3 \quad (13)$$

工学問題を扱う上で以下に示す重積分の諸公式が駆使できることも重要である。

Greenの公式

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_S (\partial Q / \partial x - \partial P / \partial y) dx dy \quad (14)$$

Gaussの定理

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S v_i n_i dS \quad (15)$$

Stokesの定理

$$\iint_S (\partial Q / \partial x - \partial P / \partial y) dS = \int_C (P dx + Q dy) \quad (16)$$

2.2 微分方程式

(a) 常微分方程式

常微分方程式の基本は以下に示す1階の線形微分方程式である。

$$dy/dx + P(x)y = Q(x) \quad (17)$$

この方程式は種々の方法で解けるが、定数変化法を用いると、まず、右辺を0と置いて同次解を求めると、 $y = C \exp(-\int P(x)dx)$ となり、次にCを $C = C(x)$ と置いて与式に代入してを求めると、一般解は次式のようになる。

$$y = C e^{-\int P(x)dx} \left(\int e^{\int P(x)dx} Q(x) dx + C' \right) \quad (18)$$

今、 $d/dx = D$ という微分演算子を導入すると、(1)式より

$$(D + P(x))y = Q(x) \therefore y = Q(x)/(D + P(x)) \quad (19)$$

いま、 $P(x) = \alpha$ (定数) のとき、式(18)より

$$y = e^{-\alpha x} \left(\int e^{\alpha x} Q(x) dx + C' \right) \quad (20)$$

(19)、(20)式を比較して、関数 $F(x)$ に微分演算子 $1/(D + \alpha)$ を作用させると

$$\begin{aligned} F(x) \cdot 1/(D + \alpha) &= F(x)/(D + \alpha) \\ &= e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} Q(x) dx \end{aligned} \quad (21)$$

機械と電気のアナロジーで遭遇する微分方程式はそれぞれ振動系(質量 m 、ばね定数 k 、ダッシュポット(減衰係数 C)、外力 $F \sin \omega t$) および電気回路(電荷 q 、リアクタンス L 、キャパシタンス C 、抵抗 R 、起電力 $E \sin \omega t$) で、次式で与えられる。

$$m d^2 x / dt^2 + C dx / dt + kx = F \sin \omega t \quad (22)$$

$$L d^2 i / dt^2 + R di / dt + i / C = E \sin \omega t \quad (23)$$

なお、Euler型の同次方程式の場合、

$$\begin{aligned} x^n d^n y / dx^n + a_{n-1} x^{n-1} d^{n-1} y / dx^{n-1} \\ + \dots + a_1 dy / dx + a_0 y = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

変数を $x = e^t$ と置き換えると、簡単な計算によって次式を得る。

$$\begin{aligned} x^n d^n y / dx^n &= D(D-1)(D-2) \\ &\dots (D-n+1)y \quad (d/dx = D) \end{aligned} \quad (25)$$

従って式(24)は次式となる。

$$(D^n + b_{n-1} D^{n-1} + \dots + b_1 D + b_0) y = 0 \quad (26)$$

なお、方程式 $D^n + b_{n-1} D^{n-1} + \dots + b_1 D + b_0 = 0$ の解を $a_1, a_2, \dots, a_n$ とすれば、式(4)で表される微分方程式の解は

$$y = c_1 e^{a_1 t} + c_2 e^{a_2 t} + \dots + c_n e^{a_n t} \quad (27)$$

また、 $D^n + b_{n-1} D^{n-1} + \dots + b_1 D + b_0 = (D - \beta)^n = 0$ すなわち n 次の同根をもつとき、式(5)の解は

$$y = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1}) e^{\beta t} \quad (28)$$

演算子 D を用いて解くこのような微分方程式の解法は機械工学の4力で遭遇する各種微分方程式を解く上での基礎となる。

(b) 偏微分方程式

工学問題で遭遇する偏微分方程式で頻度の高いものは、放物型、双曲線型および楕円型のもので、1次元または2次元に限定すれば、4力では以下のような方程式がある。

$$\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2 \quad (29) \text{ 放物型 (熱伝導 拡散)}$$

$$\partial^2 u / \partial t^2 = \partial^2 u / \partial x^2 \quad (30) \text{ 双曲型 (弦の振動, 波動)}$$

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = \Delta u = 0 \quad (31) \text{ 楕円型 (2次元ポテンシャル流れ, 丸棒のねじりにおける反り)}$$

$$\Delta = \text{ラプラシアン} = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$$

これらの方程式は初期条件や境界条件を代入して解く。より複雑な偏微分方程式として、

$$\Delta \Delta u = 0 \quad (32) \text{ (2次元弾性論における重調和方程式)}$$

Navier-Stokesの方程式

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F} \quad (33)$$

Lagrangeの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\partial L / \partial \dot{q}_i \right) - \partial L / \partial q_i = 0 \quad (34)$$

がある。

2.3 ベクトルとテンソル

工学問題の解析を行う際、ベクトル表示の諸量をテンソルを用いて表記すると見通しがよくなることが多々ある。とくに座標変換やベクトルの内積、外積や、微分、積分を行うときである。ここでは直交テンソルに限定して話を進める。まず、3次元表示を対象として、 (x, y, z) 座標系を (x_1, x_2, x_3) と表わし、おのおの座標軸上に右手系の基底ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ を採る。すると、任意の位置ベクトル $\mathbf{X}$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{X} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}_i = x_j \mathbf{e}_j \quad (35)$$

ここで添え字を指標と呼び、1つの式の中で同じ指標が2度出てくるとそれについて総和をとるものとし、総和記号 Σ は省略して表示できるものとする。また、式中の i, j は単なる和をとる意味の添え字であるの

で、いかなる表示の文字を用いて表示してもよく、擬票とも呼ばれる。またテンソルの規約により1つの式の中に同じ指標は2度以上現れないものとする。いま、ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ の内積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ($\cdot$ は内積を表すものとする。また積がスカラーとなるのでスカラー積とも呼ぶ) は次式で与えられる。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_i \mathbf{e}_i \cdot b_i \mathbf{e}_i = a_i b_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \quad (36)$$

一方、内積の定義により

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = |\mathbf{e}_i| |\mathbf{e}_j| \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (37)$$

従って

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_i \mathbf{e}_i \cdot b_i \mathbf{e}_i = a_i b_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = a_i b_i \delta_{ii} = a_i b_i = a_i b_i \quad (38)$$

上式を用いて (x_1, x_2, x_3) から (x_1, x_2, x_3) への座標変換を考える。任意の位置ベクトル $\mathbf{X}$ が $\mathbf{X} = x_i \mathbf{e}_i = \bar{x}_i \bar{\mathbf{e}}_i$ であたえられることから両辺に $\mathbf{e}_j$ を右から内積として作用させると

$$x_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = x_i \delta_{ij} = x_j = \bar{x}_i \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j = x_i a_{ij} \quad (39)$$

ここで a_{ij} は旧座標上の基底ベクトル $\mathbf{e}_i$ と新座標上の基底ベクトル $\bar{\mathbf{e}}_j$ の方向余弦 ($\cos(\mathbf{e}_i, \bar{\mathbf{e}}_j)$) を表す。

次にベクトルの外積 (積がベクトルとなるのでベクトル積とも呼ぶ) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を考える。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = a_i \mathbf{e}_i \times b_j \mathbf{e}_j = a_i b_j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = a_i b_j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad (40)$$

ここで、 ε_{ijk} は交代テンソルを表し、以下のように定義する。

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk \text{ が偶順列 } \varepsilon_{123}, \varepsilon_{231}, \varepsilon_{312}) \\ -1 & (ijk \text{ が奇順列 } \varepsilon_{213}, \varepsilon_{132}, \varepsilon_{321}) \\ 0 & (\varepsilon_{111}, \varepsilon_{121}, \varepsilon_{122} \text{ 等々}) \end{cases} \quad (41)$$

これらを用いると、例えば

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= a_i \mathbf{e}_i \times (b_j \mathbf{e}_j \times c_k \mathbf{e}_k) \\ &= a_i \mathbf{e}_i \times (b_j c_k \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) = a_i b_j c_k \mathbf{e}_i \times \varepsilon_{jkm} \mathbf{e}_m \\ &= a_i b_j c_k \varepsilon_{jkm} \varepsilon_{imn} \mathbf{e}_n = a_i b_j c_k (-\varepsilon_{mjk} \varepsilon_{min}) \mathbf{e}_n \\ &= a_i b_j c_k (\delta_{jn} \delta_{ki} - \delta_{ji} \delta_{kn}) \mathbf{e}_n \\ &= a_i c_i b_n \mathbf{e}_n - a_j b_j c_n \mathbf{e}_n = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \end{aligned} \quad (42)$$

次にベクトルの微分演算について考える。まず、ベクトル $\mathbf{V}$ の x_i に関する微分を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 \rightarrow \partial \mathbf{V} / \partial x_i \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_i} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \\ &= \nabla \mathbf{V} = \text{grad } \mathbf{V}, \quad \nabla (\text{nabla}) = \text{grad}(\text{gradient}) \\ &= \partial / \partial x_i \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (43)$$

流体力学や電磁気学でよく用いられる $\text{div } \mathbf{V}$ や $\text{rot } \mathbf{V}$ はテンソル表示すれば以下の微分演算を表す。

$$\text{div } \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \partial / \partial x_i \mathbf{e}_i \cdot v_j \mathbf{e}_j = v_{j,i} \delta_{ij} = v_{i,i} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{V} &= \nabla \times \mathbf{V} = \partial / \partial x_i \mathbf{e}_i \times v_j \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk} x_{i,j} \mathbf{e}_k \\ &(\cdot, \cdot, \cdot = \partial / \partial x_j) \end{aligned} \quad (45)$$

これらの関係を用いると例えば、

$$\text{rot rot } \mathbf{V} = \text{grad div } \mathbf{V} - \text{grad grad } \mathbf{V} \quad (46)$$

の公式も簡単に証明できる。すなわち、式 (6) の関係を利用すると

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{V} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) \\ &= \partial / \partial x_i \mathbf{e}_i \times ((\partial / \partial x_j \mathbf{e}_j) \times (v_k \mathbf{e}_k)) \\ &= \partial / \partial x_i \mathbf{e}_i \times (v_{k,j} \varepsilon_{jkm} \mathbf{e}_m) = \varepsilon_{imn} \varepsilon_{jkm} v_{k,ji} \mathbf{e}_n \\ &= (\delta_{jn} \delta_{ki} - \delta_{ji} \delta_{kn}) v_{k,ji} \mathbf{e}_n = (v_{i,ni} - v_{n,ii}) \mathbf{e}_n \\ &= \text{grad div } \mathbf{V} - \text{grad grad } \mathbf{V} \end{aligned} \quad (47)$$

なお、 $\text{rot } \mathbf{V}$ は行列式を用いると

$$\text{rot } \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (48)$$

で表される。これまでに見てきたように、ベクトルの演算を直行テンソルを用いて行くと、ベクトルの成分を一々展開して煩わしい多項式を表示することなくコンパクトにかつ簡潔に計算できる。

2.4 複素関数

複素数については、高校の履修課程に加えられたり、除外されたりした歴史があり、新入生はその使い方にあまり習熟していない。複素 z は

$$\begin{aligned} z &= x + iy = r e^{i\theta} \\ \bar{z} &= x - iy \quad \log z = \log |z| + i \arg z + 2\pi i \end{aligned} \quad (49)$$

複素数の対数をこのように定義すると、勿論 $\log(-z)$ も求まるが、高校時代に学習する対数 $\log x$ では真数 x は常に正と定義されているので、このような一般化した対数 $\log z$ の定義にはその取り扱いに注意が必要である。なお、 $\log z$ は流体力学におけるポテンシャル流れ (湧き出しと吸い込み、渦) や弾性力学 (転位) に登場するが、上式から明らかなように一般に多価関数となるので、一価性が問題となる物理現象を取り扱う際には注意が必要である。

複素関数の基本事項であるドモアブルの定理

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{in\theta} &= (e^{i\theta})^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \end{aligned} \quad (50)$$

の関係は種々の三角関数の公式を誘導する際の基礎となる。たとえば、 $\sin n\theta$ が $\sin \theta$ の n 次の多項式となることを証明しようとするれば、数学的帰納法では証明

できず、上式をもちいなければならない。また、複素数についての加法定理は以下になる。

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + i\beta) &= \sin \alpha \cos(i\beta) + \cos \alpha \sin(i\beta) \\ &= \sin \alpha \cosh \beta + i \cos \alpha \sinh \beta \\ \cos(\alpha + i\beta) &= \cos \alpha \cos(i\beta) - \sin \alpha \sin(i\beta) \\ &= \cos \alpha \cosh \beta - i \sin \alpha \sinh \beta\end{aligned}\quad (51)$$

流体力学で翼の周りの流れや角に沿った流れを論じる際、等角写像（一般的な場合はSchwartz-Christoffel変換）や解析接続の考えを用いる場合がある。

複素関数を扱う際の基本事項に触れておく。複素関数が正則であることは、関数が z （または $\bar{z}$ ）のみの関数であることで、正則関数 $f(z)$ を z について微分すると、どの経路に沿って微分しても微係数が等しくなることが保障されていることである。従って、

$$f(z) = f(x + iy) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (52)$$

として、 x 軸、 y 軸に沿っての微分を考えると x 軸上では $dz = dx$ 、 y 軸上では $dz = d(iy)$ だから

$$\begin{aligned}df/dz &= \partial(\phi(x, y) + i\psi(x, y)) / \partial x \\ &= \partial(\phi(x, y) + i\psi(x, y)) / \partial(iy)\end{aligned}\quad (53)$$

第2, 3式で実数部、虚数部が等しいとおけば、次式で表されるCauchy-Riemannの関係式が導かれる。

$$\text{Cauchy-Riemannの式} \begin{cases} \partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y \\ \partial\psi/\partial x = -\partial\phi/\partial y \end{cases} \quad (54)$$

次に複素積分について考える。正則関数 $f(z)$ の周回積分 $\int_C f(z)dz$ を考える。Cは領域Dを囲む閉曲線とする。 $f(z)$ が領域D内で正則な場合、 $\int_C f(z)dz = 0$ である。次に $f(z)$ が領域D内の点 $z = z_0$ で特異点を持つとき、 $f(z)$ の $z = z_0$ における留数を $\text{Res}f(z)|_{z=z_0}$ とすれば、

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \text{Res}f(z)|_{z=z_0} \quad (55)$$

$f(z)$ が領域D内の点 $z = z_0$ で m 次の極を持つ場合には、

$$\text{Res}f(z)|_{z=z_0} = \frac{1}{(m-1)!} d^{m-1}/dz^{m-1} \left\{ (z-z_0)^m f(z) \right\} \Big|_{z=z_0} \quad (56)$$

で与えられる。

複素積分が威力を発揮するのは、通常の方法では積分できない実積分を特別な積分回路を設けて積分すれば積分値が得られることである。例えば、

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \quad (\text{付録}) \quad \int_0^\infty \sin x^2 dx \quad (\text{Frenel積分}) \quad (57)$$

である。特別な閉回路を設定して積分を実行すると、

次のようになる。

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi/2 \quad \int_0^\infty \sin x^2 dx = 1/2\sqrt{\pi/2} \quad (58)$$

2.5 その他

本稿では上記4つの事項だけ取り上げた。大学入学直後に履修する線形代数、特に行列と行列式は工学問題の解析に不可欠の道具である。逆行列、直交行列、転置行列、エルミート行列、ユニタリ行列、行列の固有値、対角化行列、2次形式——これらの知識は有限要素法を始めとして、材料力学、弾性力学、機械力学の履修に不可欠である。

既述の4力を始め、物理、一般力学、量子力学等々で変分法の手法が用いられる。変分法は仮想仕事の原理と結びついて重要な公式を誘導する際に用いられる数学的手法で、例えば、式(34)に示したLagrangeの運動方程式の誘導に用いられる。現行のカリキュラムでは3年次の選択科目のシラバスの中で1講義項目として掲げられている例が一部の大学で見られる程度で、時間を割いて系統的に教授されている例はほとんどない。

3. おわりに

本稿を執筆するにあたり、国公立大学のいくつかを選び、数学関連の講義科目を調べた。学部で低学年で履修する数学の内容はほぼ等しく、高学年の選択科目で用意されている応用数学や数理解物理関係の講義メニューに違いがあるようである。

国公立大学では大学院が大衆化し、学部卒の3人に2人が進学する時代である。多くの大学院の入試では数学が課せられているが、入試が競争試験ではなく資格試験化している現状では、学部の大学入試時における受験生のように数学力を磨いているようには見えない。さらに、入社試験で教養としての数学力を問われることがあるが、多くの場合、高校卒業程度のレベルのことで、大学時に履修した数学力が問われることは、公務員試験を除いてほとんどなく、入社試験が大学で履修した数学力を喚起するための動機付け手段となっていない。

Mathematicaのような数式処理システムの登場あるいは地球シミュレータに象徴される複雑な工学問題を解析する数値解析ソフトの出現、等々、工学問題解析手法のブラックボックス化と汎用化が進む今日、平均的技術者が備えておくべき数学力とは何であるか、改めて問うと答えに窮する。大綱化以降、国際コミュニケーション力としての英語力強化に注力するあまり、第二外国語の比重が急速に低下し、昔多くの工科系学生が学んだ独語は今や刺身のつま以下に成り下がり、消えつつあるようである。工科系の履修科目として大きなウェイトを占めてきた数学系の科目も第二外国語

と同じ運命をたどるのであろうか。語学との違いは数学力が萎えると専門科目の履修がより困難となることである。

大学生の学力不足が巷間で喧騒され、国家試験のような卒業試験の導入が議論されるご時勢である。学部卒業時（大学院終了時）に備えておくべき数学力とは何か、またそれをいかなる手段で測定するか、真剣に考える時期が到来している。その際、大学院進学率の増加で工学部が実質的に6年制化している現状を踏まえた数学教育プログラムも早急に作成することが待たれる。JABEEやその他の提言で技術者教育に数学力の涵養が不可欠であることが謳われてはいるが、多くの場合、求められる数学事項の理解の深さまでは示されていない。教育経験を通じて具体的に示した本稿が技術者の備えるべき数学力を考える際の一助になれば望外の喜びである。

付 録

以下のような特別な形の積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin x dx$$

の値は、複素積分を用いなくとも、補助変数を利用して求める便利な方法がある。いま、

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx, \quad I(\alpha) = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx,$$

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin \alpha x dx$$

(ただし、 $\alpha \geq 0$)

とおけば、積分値は $I(\alpha)$ に関する微分方程式の解より求まる。

$$\text{すなわち、} I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx \text{ より}$$

$$I'(\alpha) = \int_0^{\infty} (-e^{-\alpha x}) \sin x dx = -1 - \alpha^2 I'(\alpha)$$

$$I'(\alpha) = \frac{1}{1 + \alpha^2} \quad \therefore I(\alpha) = -\tan^{-1} \alpha + C$$

$$\text{ここで、} I(\infty) = 0 \text{ より } C = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{従って } I(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = C = \frac{\pi}{2} \text{ を得る.}$$

参 考 文 献

- 1) 原田昭治：技術者に求められる教養としての数学的要素とその涵養, 工学教育, 56-1, pp.26-31, 2008

著 者 紹 介

原田 昭治

1969年 神戸大学大学院工学研究科修士課程修了
大阪大学工学部助手、講師
2008年 九州工業大学（工学部機械知能工学科）定年退職、同名誉教授