連成振動に対する理解度向上のための試み

An Attempt to Promote Understanding of Coupled Vibration

西岡 圭太^{※1}
Keita NISHIOKA

太田 和彦^{※2}
Kazuhiko OHTA

堤 厚博^{※1}
Atsuhiko TSUTSUMI

鈴木 亮一^{※2}
Ryoichi SUZUKI

A coupled vibration such as two mass points linked by springs is one of difficult subjects for students to understand only with its associated mathematical expressions. For this subject, students are required to learn how to solve second-order linear differential equations in a mathematical course in the first year, and then study the vibration theory followed by experimental activities in the third year. Here, in order to promote their insight into the vibrational phenomenon, we introduced a numerical simulation for the coupled vibration prior to conducting the experiment. As a result, we confirmed some degree of the causal correlation between the utilization of the simulation and the achievement of the experimental activity. In addition, questionnaire survey results showed that implementation of pre-and post-simulation assisted to improve the understanding of meaning of the experiment and its theoretical background.

Keywords : Vibration Analysis, Coupled Vibration Experiment, Simulation, Visualization, Educational Effect

キーワード：振動解析，連成振動実験，シミュレーション，視覚化，教育効果

1. はじめに

筆者らはこれまでに、金沢工業大学における初年次数学教育において数学の理解度を向上させるため、学生が分かり難いと感じている数式や証明の視覚化を試み、学生の理解度向上に寄与してきた^{1), 2)}。この手法は数学分野に限らず工学系専門分野でも同様に効果があると考えられる。工学分野では従来から、式、グラフ、図を用いて学生の理解を深めようと試みているが、それらだけで実際の現象を理解させるのは難しいのが現状である。特に、十分に数学的な学力を身に付けていないため、振動現象を数式で理解し難い学生、また、一方では、数学的な学力はあるものの、その数式の意味するところがどのようなものかが良くわかっていない学生も多い。

そこで、本学の数理基礎教育課程とロボティクス学科が協力し、振動現象に関する学習内容を理解しやすく、かつ魅力があるものとするため、数式の3次元表示や時間変化まで把握できるシミュレーションを用いて振動現象を視覚化するとともに学生自らがシミュレーションを実施できるようにした。これまで筆者らは単振動や減衰振動、連成振動（2自由度系の自由振動）までのシミュレーションを体験させた場合の理解度を調査するとともに、その元となる2階線形微分方程式の理解度調査について報告した³⁾。学生の理解度を通して、教育すべき部分がどこかを把握できれば、それを重点的に学習させることで教育効率の向上が期待できる。さらに、振動実験

により実際の振動現象を測定・分析することにより、数式と現象とのつながりを実感でき、学生の理解度向上も期待できる。

現在、本学のロボティクス学科においては、1自由度および2自由度振動系の理論全般に関する講義を3年次前期に行い、振動現象の理解をさらに深めるための実験教育を3年次後期で実施している⁴⁾。その実験教育において、2016年度では理論と実験とのつながりを理解させるための手助けとして振動シミュレーションを導入した。これまで、機械系の振動現象の教材開発の一環として実験装置とシミュレーションを組み合わせ、その精度を確認した報告^{5), 6)}はあるものの、教育の観点から学生に実験とシミュレーションを詳細に検討させアンケートを取った報告は見受けられない。本研究では、連成強制振動の実験教育を行うとともに、それに対応するシミュレーションを学生に実施させ、学生の理解度調査およびアンケートを行った結果について報告する。

2. 2自由度系の強制変位振動モデル

実験に先立って学生は連成振動の理論についての講義を受ける。本科目の振動実験で用いる実験装置に対応した連成振動系として、図1のように、質量 m_A , m_B の物体A, Bと励振機構がバネ定数 k_1 , k_2 , k_3 のバネで直列に連結された2自由度系の強制変位振動モデルを考える。励振機構により、物体A, Bにはそれぞれ振幅 X_1 , X_2 , 角振動数 Ω_1 , Ω_2 , 初期位相 ϕ_1 , ϕ_2 で振動する強制変位が加わる。つまり、物体には周期的な外力が作用する。強制変位がないときの物体A, Bのつり合いの位置を原点とした物体の変位をそれぞれ x_A , x_B とする。また、この

2017年10月17日受付

※1 金沢工業大学基礎教育部

※2 金沢工業大学工学部

図1 2自由度系の強制変位振動モデル

図2 外力に対する (a) 振幅比および (b) 位相差

系にはダンパーや摩擦に起因する粘性抵抗が生じるものとして、A の速度、A と B の相対速度および B の速度に比例した抵抗力を考え、各抵抗力の粘性減衰係数を c_1 、 c_2 、 c_3 とする。

物体 A、B の変位の速度を $\dot{x}_A$ 、 $\dot{x}_B$ 、加速度を $\ddot{x}_A$ 、 $\ddot{x}_B$ 、と表すと、物体 A、B の運動方程式はそれぞれ・

$$m_A \ddot{x}_A = -k_1 \{x_A - X_1 \sin(\Omega_1 t + \phi_1)\} - k_2 (x_A - x_B) - c_1 \dot{x}_A - c_2 (\dot{x}_A - \dot{x}_B) \quad (1)$$

$$m_B \ddot{x}_B = -k_2 (x_B - x_A) - k_3 \{x_B - X_2 \sin(\Omega_2 t + \phi_2)\} - c_2 (\dot{x}_B - \dot{x}_A) - c_3 \dot{x}_B \quad (2)$$

であり、2 階非同次連立線形微分方程式を表している。この連立微分方程式を解くには、一般に 4 次方程式を解く必要があり、解法は非常に複雑となる。講義では、物体 A にのみ外力が作用し、抵抗が十分に小さいとして、 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ と近似したときの解を求める。このとき、行列表現を用いて式 (1)、(2) を整理すると、

$$\begin{pmatrix} m_A & 0 \\ 0 & m_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{x}_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{12} & -k_2 \\ -k_2 & k_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 X_1 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

となり、比較的簡単に解ける。ここで、 $k_{12} = k_1 + k_2$ 、 $k_{23} = k_2 + k_3$ 、 $\Omega_1 = \omega$ 、 $\phi_1 = 0$ とおいた。この系の 2 つの固有振動数を ω_1 (第 1 モード)、 ω_2 (第 2 モード) とすると、時刻 $t = 0$ で物体 A、B が原点に静止しているという初期条件下での式 (3) の解は

$$x_A = C_{A1} \sin \omega_1 t + C_{A2} \sin \omega_2 t + X_A \sin(\omega t + \phi_A) \quad (4)$$

$$x_B = C_{B1} \sin \omega_1 t + C_{B2} \sin \omega_2 t + X_B \sin(\omega t + \phi_B) \quad (5)$$

で与えられる。ここで、 C_{A1} 、 C_{A2} 、 C_{B1} 、 C_{B2} 、 X_A 、 X_B は式 (3) および初期条件を満たす定数である。式 (4)、(5) の右辺の第 1、2 項目は基本解であり、第 3 項目は特解である。特解は外力に対する応答を表しており、 ϕ_A 、 ϕ_B が外力との位相差を示す。実際には、系に抵抗力が作用するため、基本解は速やかに減衰し、十分に時間が経過した後は、外力に対する応答のみが残る。また、抵抗が十分に小さい場合、固有振動数は抵抗が無い場合の固有振動数に近い値をとる。

抵抗が無い場合の解から、物体 A、B について外力に対する応答の振幅比が次式のように得られる。

$$\frac{X_A}{X_1} = \frac{k_1(k_{23} - m_B \omega^2)}{(k_{12} - m_A \omega^2)(k_{23} - m_B \omega^2) - k_2^2} \quad (6)$$

$$\frac{X_B}{X_1} = \frac{k_1 k_2}{(k_{12} - m_A \omega^2)(k_{23} - m_B \omega^2) - k_2^2} \quad (7)$$

外力の振動数 ω が固有振動数 ω_1 、 ω_2 に一致すると上式の分母は 0 になり、振幅比が発散する (共振現象)。 $m_A = m_B = 0.200 \text{ kg}$ 、 $k_1 = k_2 = k_3 = 200 \text{ N/m}$ の場合 ($\omega_1 \div 31.6 \text{ s}^{-1}$ 、 $\omega_2 \div 54.8 \text{ s}^{-1}$) について、横軸を振動数 ω 、縦軸を振幅比として式 (6)、(7) を描くと図 2 (a) のようになる (共振曲線)。また、外力との位相差 ϕ_A 、 ϕ_B をプロットすると図 2 (b) が得られる。図 2 (a) が示すように、外力の振動数が $\omega = \sqrt{k_{23}/m_B}$ を満たすとき、A の振動が抑制され、B は動吸収器として働くことが分かる。

実験では、外力の振動数を様々な値に調節して、A、B の振幅と位相を測定し、図 2 に対応する振幅比と位相差をプロットすることにより、連成振動に関する理論と現象の繋がりを理解し、共振現象や動吸収器の原理について学習する。

3. 連成振動実験

学生は振動理論を学んだ後、図 3 に示す実験装置を用いて変位励振の計測・分析を行い、共振現象に対する理解度向上及び動吸収器の基本原理の習得を目指すことになっている。

教育目的で作製された本実験装置は、学生にとって振動系の機構や動作特性が把握し易く、また限られた時間内 (当該実験カリキュラムは計 9 時間) でもすぐに使いこなすことのできるように操作性への配慮もなされており、さらに実習用器材として、複数年にわたる繰り返し使用に耐え得るような耐久性、バネ切断時への対応を備えた安全性等への配慮もなされている。本装置における変位励振機構は、図 3 (c) に示す実験装置の左端に設置したモータ (図 3 (a)) と減速器により偏心カムを回転させ、バネ連結された入力マス (cam-follower) を左右に動作させる。この入力マスと質量 m_A 、 m_B の各物体 A、B はそれぞれコイルバネで連結され、図 1 のような 2 自由度変位励振振動系を形成している。アルミ製小ブロックからなる物体 A、B は側面でボルトが着脱できるため、質量の異なるボルトの付け替えにより物体の質量を変更

させることができる。また、各物体の上下には軸受穴が設けられており、この中をステンレス製パイプレールが貫通している。各物体はこのレール上を滑るように左右に移動でき、摩擦抵抗及び上下方向の振動が極力低減されている。

本実験装置のモータのない側（図3(c)右端）ではバネの片端は固定されており、図1および式(2)中のモデルにおいて $X_2 = 0$ に設定した場合に相当する。

計測系に関しては、観測精度を向上させるため、150 LPIの分解能を有する振動計測用フィルムと光センサ検出器（図3(b)）を用いたリニアエンコーダにより位置情報を算出する。入力マス及び各物体の変位は1ミリ秒ごとにモータ回転数（励振振動数）と共に図4(a)に示すマイコン（RX231）に記録させる。さらに、これら時系列デジタルデータは2000個（2秒）ごとにPCに転送され、

図4 連成振動実験装置のデータ記録・表示

図3 連成振動実験装置

図5 振幅比と位相差（上：物体A，下：物体B）

表1 実験レポート課題⁽⁴⁾

動的挙動の評価

課題I (C)：

- 2自由度振動系の実験装置について、第1固有角振動数 ω_1 [rad/s]、第2固有角振動数 ω_2 [rad/s]を求めよ。
- 回転数([rpm])を横軸、振幅倍率の絶対値を縦軸にとり、2自由度系の共振曲線（振幅と位相の理論値）をグラフ用紙に描け。
- さらに、描いた共振曲線（振幅と位相の理論値）上に実験値と追加実験値をプロットせよ。

課題II (B)：

- 課題Iの問題3で描いた共振曲線を、Excel（または他のソフトウェア）を使ってグラフを描け。横軸の単位については実験中に指示する。

課題III (A)：

- 台車1と台車2のそれぞれの位相はどのように変化しているか実験結果より説明し、なぜ台車1の振動がゼロに近づくのかを説明せよ（台車の動きを観察し、図を描いて説明してもよい）。

課題IV (S)：

- 動吸振器の原理について説明せよ。また、本実験装置の場合、どのような付加系（具体的にどのような質量とバネ定数をもつ系）を取り付けると台車1の振動が抑制されるか考察せよ。

時系列信号波形としてPCディスプレイに表示される(図4(b)参照)。学生はこの波形を観測して入力マスと各物体の変位振幅と相対位相を読み取ることができる。

図5は $m_A = m_B (=m)$, $k_1 = k_2 = k_3 (=k)$ と設定した場合の計測結果の一例で、測定値(点)は理論値(実線:粘性減衰係数を0に設定)と比較されている。変位励振の角振動数 ω を変化させたときの各物体の振幅と位相の変化をそれぞれ図中の左側と右側に示した。左側の図の縦軸は強制変位の振幅 X_1 に対する物体A, Bの振幅比である。横軸は1自由度(物体Bを固定した場合)の固有角振動数 $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$ でそれぞれ無次元化されている。実験結果が示すように、実際は粘性減衰があるため2つの共振周波数において振幅は有限となり、位相も連続的に変化する。また、前述のように $\omega = \omega_0$ のとき物体Aの振幅は0となるので、この関係を満たすような m_B と k_3 を選定すれば物体Aの振動が抑制できる。このことは動吸収器の基本概念を示すものである。

学生はこのように連成振動実験装置を用いて計測した結果を表1に示すレポート課題に従って、データ整理・分析をすると共に考察を加える。

4. 2自由度系の振動シミュレーション

図1における2自由度系の強制変位振動モデルのシミュレーションを図6に示す⁷⁾。本シミュレーションはJavaScriptで作成しており、Webブラウザがあれば利用できる。なお作成においては、ドイツのBayreuth大学で開発が進められているJSXGraph⁸⁾という幾何学ライブラリを用いた。

図6に示すシミュレーション画面の一番上に、ばねで結合された2つの物体A, Bのアニメーションが表示され、その下の2つのグラフは上から、左右の強制変位の時間変化、A, Bの変位の時間変化を示す。本シミュレーションではA, Bの質量 m_A , m_B 、ばね定数 k_1 , k_2 , k_3 、減衰係数 c_1 , c_2 , c_3 、強制変位の振幅 X_1 , X_2 、角振動数 Ω_1 , Ω_2 、および初期位相 ϕ_1 , ϕ_2 の値をパラメータとして自由に変更することができる。そのため、これらのパラメータが振動現象にどのように影響するかを詳細

に確かめることができる。また、式(1), (2)で示された連立微分方程式の解析解を求めているため、任意の時刻における各物体の運動の様子や振幅の時間的変化のグラフも直ちに確認でき、共振現象や動吸収器の原理を視覚的に把握しやすい。さらに、解析解の式や振動の数値データ等を出力する機能があり、Excelなどを用いてグラフを作成できる。例として、粘性減衰がある場合の共振曲線と位相差のグラフを図7に示す(横軸は $\omega_0 = \sqrt{k_2/m_0}$ で無次元化している)。また、第1共振の場合($\omega/\omega_0 \approx 0.71$)のシミュレーション画面を図8に示す。

本科目の受講学生には、前節の連成振動実験を実施するにあたり、予め本シミュレーションを配布し、使い方などを説明した上で、事前に予習として実験に対応したパラメータで実行してくるよう指導してから、実験に臨ませた。また、実験後の振動データ分析に対しても必要に応じてシミュレーションを利用し検討するよう促した。

5. シミュレーションの利用による学習効果

本科目の受講学生に対して、表1に示した実験レポート課題を回収後、連成振動現象の理解に対するシミュレーションの有用性について簡単なアンケート調査を実施した。アンケート内容は、1)シミュレーションの利用度合[0:利用無~3:利用多の4段階]、2)シミュレーションの有用性についての自由コメント、である。ア

図7 粘性減衰がある場合の外力に対する(a)振幅比、(b)位相差。減衰係数 $c_1 = c_2 = c_3 = 0.50\text{Ns/m}$ 以外のパラメータの値は図2と同じ

図6 2自由度系の振動シミュレーション

図8 第1共振($\omega/\omega_0 \approx 0.71$)の場合

表2 アンケートの回答例

- ▶ シミュレーションにおいては振動パラメータの値を自由に設定でき、その違いに応じた振動現象が視覚化できるため、各パラメータの影響が把握し易い。
- ▶ 事前にシミュレーションを実施することにより実験で起きる現象について予めイメージをもつことができ、また、実験時に起こすミスにも気付きやすい。
- ▶ シミュレーションとの比較により実験結果の妥当性が確認でき、また、シミュレーションにより現象を再確認することができ、振動に対する理解をより深められる。
- ▶ シミュレーションの使い方が良く分からなかった。

図9 シミュレーション利用度合と成績との相関

図10 設問の得点分布

アンケートの有効回答数は24である。

図9は、シミュレーションの利用度合とレポート課題における設問の得点（成績）との相関図である。利用度合と得点とともに同じサンプルが含まれるため、人数を上積みした3次元グラフで表している。この相関図から、シミュレーションの利用が少ない学生の得点が必ずしも低いということはないが、得点が高い学生はシミュレーションの利用が多いという傾向は読みとれる。また、回帰直線はやや右上がりであるが相関係数 R は約0.35となり、両者の間には弱い正の相関が認められる。ただし、シミュレーションの利用度合については定量化するために4段階としたが、この度合は学生の主観であり、0から3まで度合が線形に上がっているとは限らないことに注意する必要がある。

図10に設問の得点分布を前年度（2015年）のデータとともに示す。アンケートの採れた24人の学生の得点の平均は約7.3、標準偏差は約2.1である。シミュレーションを導入していない前年度の平均および標準偏差は約6.9、約2.1であった（対象115人）。サンプル数が異なるため単純には比較できず統計的な有意差も確認できないものの、平均得点は前年度より少し上昇し、高得点（9-10点）の学生の割合も若干増加した。

表2に学生から得られた自由コメントの一部を示す。これらのコメントから、シミュレーションを利用した学生にとって、事前・事後のシミュレーションの実施が実験の意味及びその理論的背景に対する理解の向上に役立ったものと考えられ、シミュレーションの一定の効果が確認された。ただし、シミュレーションを利用しないと

この現象を理解できない訳ではなく、従来のシミュレーションを導入していない授業においても実験と理論のつながりを熟考し頭の中でイメージできていれば現象を把握することは勿論可能である。図9、10から分かるように、シミュレーションを用いることなく得点の高い学生が存在することや前年度でも得点の高い学生がいることが、それを示しているものと考えられる。また、シミュレーションを利用したにも関わらず、成績の振るわない学生もある程度存在する。シミュレーションはあくまで現象を視覚的にイメージし易くするツールであり、熟考せずにただ実行しただけでは意味がないことに留意して学生を指導するべきであろう。なお、シミュレーションの使い方が把握できないため、効果的に実験には反映できなかったケースもあった。これについては、より容易に使用できるようにシミュレーションのインターフェースを改良していく必要があると考える。

6. まとめ

連成強制振動を学習する専門科目において、理論と実験をつなぐ手助けとしてシミュレーションを導入し、学生の理解度向上を試みた。振動現象を理解するために、理論から導出された数式の一般的なグラフだけでなく、動的なシミュレーションを用いて現象を視覚化すると、学生にとってその数式の意味するところを理解しやすい。また、実験だけでは表面的にしか分からない現象をシミュレーションにより適宜確認を行うことで深い学習につながり、シミュレーションの利用度合が高いほど成績向上に繋がる可能性があることが示唆された。限られた授業時間の中で、シミュレーションを使うことによって理解度の向上に繋がれば、より効率的な学習指導を行うことができるものと考えられる。また、シミュレーション利用に関する学生からのコメントも概ね好意的なものであった。今回、初めてシミュレーションを導入した授業を実施したことからサンプルデータも少なく、この手法が理解度向上に効果的であるということが統計的な視点から有意に示された訳ではない。今後も学生からのフィードバックを基に本手法を改善しながら継続的に使用し、理解度向上の客観的データを蓄積していきたい。また、この手法をさらに発展させて、振動工学の分野だけでなく他の工学分野にも応用していきたいと考えている。

参 考 文 献

- 1) 堤 厚博：数学教育における視覚化を用いた試み－初年次生を対象とした視覚化による数式の理解度向上(その1)－，平成26年度工学教育研究講演会講演論文集，pp.320－321，2014
- 2) 堤 厚博：数学教育における視覚化を用いた試み－初年次生を対象とした視覚化による数式の理解度向上(その2)－，平成27年度工学教育研究講演会講演論文集，pp.98－99，2015
- 3) 堤 厚博，太田和彦，西岡圭太：シミュレーションを用いた振動現象の理解度向上の試み，KIT Progress 25，pp.107－117，2017
- 4) 41 金沢工業大学工学部機械系ロボティクス学科：ロボティクス学科専門実験・演習AB「動的挙動の評価」，2016
- 5) 瀧口三千弘：機械系の動力学問題学習用教材(DSS)の開発－簡易アニメーション機能の追加－，平成24年度工学教育研究講演会講演論文集，pp.552－553，2012
- 6) 松本幸市，瀧口三千弘：機械系の振動現象学習教材の開発－3自由度直線振動系の場合－，平成24年度工学教育研究講演会講演論文集，pp.554－555，2012
- 7) 西岡圭太，太田和彦，堤 厚博：連成振動に対する理解度向上の試み－理論と実験をつなぐ手助けとしてのシミュレーション－，平成29年度工学教育研究講演会講演論文集，pp.382－383，2017
- 8) Webブラウザ上で幾何学図形やグラフを作成するためのJavaScriptライブラリ，Webページ，<http://jsxgraph.uni-bayreuth.de/wp/index.html>

著 者 紹 介

西岡 圭太

学 歴 大阪市立大学大学院理学研究科数物系専攻後期博士課程修了
現 職 金沢工業大学基礎教育部数理基礎教育課程・講師
学 位 博士（理学）
専 門 物性物理学（理論），数理教育

太田 和彦

学 歴 マサチューセッツ工科大学海洋工学部博士課程修了
現 職 金沢工業大学工学部機械系ロボティクス学科・教授
学 位 Ph.D.
専 門 水中音響，信号処理，海洋音響トモグラフィ

堤 厚博

学 歴 東京工業大学大学院理工学研究科修士課程修了
現 職 金沢工業大学基礎教育部数理基礎教育課程・教授
学 位 博士（工学）
専 門 機械力学，振動工学

鈴木 亮一

学 歴 北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科後期博士課程修了
現 職 金沢工業大学工学部機械系ロボティクス学科・教授
学 位 博士（情報科学）
専 門 制御工学