工業数学教育における「変分法」の取り組み

An Attempt of Teaching the Calculus of Variations in the Course of Engineering Mathematics.

西 野 芳 夫

Yoshio NISHINO

著者は広島大学工学部でやや数学めいた変分学を4年間講義してきた。工学部の学生に対して変分学の講義の開講を検討されている大学も少なくない聞き、参考にするため著者の試行錯誤を報告する。関連して工業数学の講義はどうあるべきかについての意見を述べる。

キーワード：工業数学、変分学、計算機の活用

The author's four-year experience of lecturing the calculus of variations in the faculty of engineering in Hiroshima university is reported rather informally to give advice to teachers who have a plan to open its lecture. After some technical matters in teaching the variational calculus are discussed, an opinion is stated about under what principles mathematics should be lectured for students learning engineering.

Key words : engineering mathematics, calculus of variations, use of personal computers.

1. 本論の目的

著者が勤務する広島大学工学部(広大工)では、工学部三年生前期の学生に対して、「応用数理A」という名称のもとで変分法に関する半年間の講義が行われている。変分法を工業数学の講義項目の中に取り入れている大学は、著者が調べた限り、きわめて少ないようで、変分法の講義を4年間担当して得たいくらかの教育的知見を報告し、今後変分法の開講を検討されている人々の参考に資したいと思いこの論説を書いた。関連して、第5節で、工業数学の教育、すなわち工学を学ぶ人々に対する数学教育の方針をめぐって、著者が長年考えてきたことを述べた。これは数学教育に直接関係のない工学の教育関係者にも読んでいただけることを願っている。さらに、第6節で、数学教育における計算機(いわゆるパソコン)の活用も見直すべき時期が来たという意見も述べる。それ以外の節は変分学の講義に関係している。

2. 変分法の講義の位置づけ

工学部の学生を対象とする数学の講義内容を調べてみると、基本的な部分は、どの大学も同じである。ただ工業数学、応用数学、工業数理といった講義名の違いや、内容の幅や浅深の違いがあるだけである。(1)微分積分学、(2)線形代数を土台にして、(3)常微分方程式、(4)ベクトル解析、(5)フーリエ解析、(6)偏微分方程式(初歩)が標準的に講義される。さらに、専攻に応じて、(7)複素関数論、(8)数値解析、(9)確率・統計が講義される。これらは、長い歴史の

なかで吟味され続けられた数学的教材であり、工学における応用からも、簡単に他と置き換えることができない。

大学によっては、これらの上に、近代解析(関数解析やルベーグ積分)、離散数学、超関数、変分法などが開講されている。

この中で変分法の講義は、単に新しい知識と方法を教える講義にとどまらず、既習の知識の総合的な運用を学ばせる講義にすることができ、他と異なる特徴をもつ。具体的な変分問題を通して、(3)～(6)で学習したことがらの活用が自然に求められ、数学をいろいろな観点から見る目を養わせることができる。この意味で変分法は、応用と切り放しても、大変良い教材である。

3. 変分法の講義目標

変分法の講義目標は、変分法が応用されている講義の“現場”を検討することから始めると設定しやすい。広大工の学部生用の講義要目では、応用力学、振動論、電気応用、構造解析など10科目において、エネルギー原理、レイリー・リッツ法、有限要素法などの形で変分法が登場している。

これらの授業の内容を検討すると、工学部の変分法の講義は、次の二つのことがらを目標にしなければならないことがわかる。

- (1) 汎関数の最大・最小値問題から出発して、数値解析への応用。
- (2) 汎関数の停留性から導かれるオイラー・ラグランジ方程式の変数変換における共変性の概念の学習。

解析を重んじる変分法の教科書では、(1)だけが強調され、(2)が無視されていることが多いので注意する必要がある。解析力学を使う振動論で、作用の最大・最小性にこだわり、ハミルトンの原理の理解につまづく学生がいる。

4. 変分法の講義の予備知識

変分法の受講条件として先に述べた(3)～(6)の学習を前提とする方が講義しやすい。これ以外に予備知識として補わなければならない大きな項目は、微積分で一般に扱われなくなったラグランジュの未定乗数法と陰関数(逆関数)定理である。

微分方程式の固有値問題に対して、関数解析的な予備知識をどれだけ要求するかは、フーリエ解析の講義と深く関係するのでここでは言及しない。

著者の経験から言うと、解析学の一つとして変分法を微積分の講義の上に直接つなごうとする試みは、準備に追われるか、「お話」になって成功がむづかしい。

5. 工業数学に対する考え方

変分法の授業の詳細に入る前に、著者の工業数学に対する基本的考え方を明らかにする。数学を使う立場から工学部では数学の講義に対するいろいろな注文がでてくる。これらに対して、長い目で学生のためになる講義をするためには、どう対応すべきかははっきりした態度が必要になってくる。

工学部における数学の授業は、工学の専門授業のためのサービスであり、準備過程とみなす人々が多いことに驚かされる。その一つのあらわれが、専門授業が始まるまでに数学の授業ができる限り終了するように組まれている大多数の工学部の講義体系である。現実の必要に迫られて見よう見まねで数学計算し、間違いもおかし、少しずつ数学的理論の大切さに気づくといった自然な学習過程が完全に無視されている。

さらにこれまでの経験を少し述べると、数学の知識の階層を無視し、自分の授業がやりやすいように、予備知識として数学の何々を学生に教えよと要求する人に何人も会った。数学を完全に道具の一種とみなし、一通りの料理方を学生に身につけさせるかのように、適当な数学便覧を使いこなせるように教えてくれれば十分だという意見も聞いた。常に現象をにらんでいる工学屋には、数式の背景がすぐわかるようになるから、数学の小むずかしい話しより、計算法を学生にもっと教えろと言う人もいた。このような人々がよく使う「実用的な数学」が何をさすのか困ることが多い。

機会あるごとにこのような要求や意見にどう答えるべきか考え続けてきたが、現在は次のような考えでいる。

数学は現象を解析する手段であり言語であるが、それ自体は科学の一分野として固有の原理と方法論をもっている。工学部の数学の授業であっても、当座必要な知識の伝授

のような数学の講義だけに終わらず、学生が将来必要となれば独力で新しい数学的知識を吸収できるように、数学的な思考法も同時に身につけさせるように努めなければならない。

これは、現在の技術だけでなく、技術のめぐるしい進展についていけるような基礎工学的な知識を教えなければならないと工学者がしきりに強調していることと同じである。

以上の立場から、変分法の根底にある数学的事実や考え方を大切にする授業計画をたてた。例えば、学生がすぐ理解できてもできなくても、変分は関数空間における微分に相当するという普遍的なイメージをとにかく説明し、抽象的なことがらは工学部の学生に対して省略するという態度をとらないことにした。一方で、取り扱う空間次元は2次元までとし、3次元空間における変分問題は、弾性論や電磁気学の専門授業で中で学んでもらうことにした。

いま大学における数学基礎教育をめぐる、数学教育に携わる人々の間で盛んに意見が交換されていることを参考のために述べておく。学生の学力の低下、自学自習の態度の風化などが心配されている。インターネットのアドレスを一つこのような討論に関心を持たれる人のために挙げておく⁽¹⁾。そこには工学部における数学の授業の性格についての議論もある。

6. 計算機の利用に関する問題

手軽に使えるようになった計算機(いわゆるパソコン)を数学の教育に活用することや、それが及ぼす影響力を初等教育から大学教育までにわたって広く検討されている⁽²⁾。ここでは変分法に限って述べる。

広大工の状況を話すと、数式処理ソフトであるマセマテカを学生用計算機室でいつでも利用できる環境になっている。申請すれば構内の任意のパソコンにマセマテカをインストールできる。マセマテカには 'Variational Methods' という変分法のためのパッケージがすでに用意されている。それを使うと、オイラー・ラグランジュの微分方程式を書き下したり、その第一積分を構成したり、求積可能ならば微分方程式の一般解も求めることができる。さらに、リッツの直接法によって汎関数の上限・下限やスツルム・リュビーユ問題の固有値の近似計算もできる。学生に出す演習問題程度ならば、簡単な入力でほとんど一瞬に答えが画面に出てくる。

このことから、パソコンの利用を推奨するどころか、変分法のレポートの作成にはパソコンの使用を禁止しなければならない状況に追い込まれている。マセマテカで解けないような問題は、複雑で教師も解けなく、変分法を習い始めた学生のレポート問題にならない。足し算を習い始めた小学一年生に電卓で宿題をすることを禁止しなければならないのと同質のことが大学での数学教育にまで及んできたのである。

人間は計算する必要はなく、計算機ができない総合的な判断をできれば良いと単純に言う人もいる。しかし、計算過

程を工夫したり、計算しながら全体を見通し、結果を推測したりすることは数理的思考の訓練の重要な一部である。計算機は数学教育に役立つどころか邪魔になるという意見があっても当然である。

マセマテカを変分学の学習に活用する試みがないでもない⁽³⁾。最速降下線問題では摩擦がないと仮定されているが、摩擦を考慮すればオイラー・ラグランジュの微分方程式はもはや解けなくなる。そこでマセマテカを使ってシミュレートしようというのであるが、これは数値計算の問題で、数式の処理あるいは解析的な計算の問題ではない。

7. 変分法の講義において留意すべきこと

この最後の節で、変分法の講義の計画を立てる際に留意した方がよいと考えるいくつかの技術的な事柄や著者の参考意見を述べる。これは毎年学生の意見を聞き取り、学生の反応や理解度を調べた結果を反映している。

1. 教科書

広大工の学生の平均的な数学的力量と2年生までの工業数学の履修内容を考慮すると、残念ながら日本語の適切な変分法の教科書を見いだすことができなかった。書き方が現代的でない、形式的な変分計算だけで数学にならない、応用に偏りすぎている、内容が豊富すぎる、といった感想を検討した数々の本に持ったからである。

しかし教科書なしの黒板講義だけでは学生は不安を訴えるので、著者は文献^{(4), (5), (6)}を種本として講義ノート作り、大学の著者のホームページに置き、インターネットを通じて学生に自由に印刷させた。これはノートの配布にとまなうわずらわしさもなく、反応をみながらの毎年の加筆・修正も気楽にでき、しかも学生には好評である。

2. 記号の問題

5節で述べた方針に沿って、現代数学で標準的なガトー微分で汎関数の変分を導入しているが、工学部の学生に対しては特別な補足が必要である。というのは応用力学や解析力学の教科書は、現在もおかなりの割合で古典的なボルツァノの δ 記号を用いて変分が導入されているからである。例えば、微分 d と変分 δ の演算は可換である： $d\delta y = \delta dy$ といった説明をどのように理解すべきか丁寧に教え、古典的記号法との脈絡をつけてやらないと、学生に混乱の種を植え付けただけに終わるようである。

3. 例題を掘り下げる

著者は、最小回転面の問題を含む基本的な例題を必要以上に詳しく議論して、汎関数の極値問題は関数の極値問題よりはるかに難しいという、当然至極のことを学生にはっきり認識させることに努めている。難しいので省略されているのに、ふれられていないので易しいと錯誤する学生を発見するからである。工学の本にありふれたオイラー・ラグランジュの微分方程式だけで済ます変分の応

用の議論には絶えず注意が必要であることを喚起している。

4. 極値のための十分条件

ヤコビー場の共役点やヒルベルト積分などの汎関数が極値をとるための十分条件の理論は、変分法を初めて聴く学生には高級過ぎるようであり、理解が得られず、講義することをやめた。そのかわりとして、文献⁽⁵⁾の影響を受けて、直感的な意味がはっきりしている汎関数の凸条件を教えるようになった。変分法の基本的例題として必ず取り上げられている最速降下線問題を、変数変換という技巧を用いるにしても凸条件で、オイラー・ラグランジュの微分方程式が最適解を与えることを示せることは、学生の表情をみていると教育効果が大きいことがわかる。

5. 数学と文化

物理・工学における変分原理は、モーペルチュイが理性神学の立場から唱えた最小作用の原理に源を発し、多くの西洋の学者が変分原理に世界の調和を感じることを表明していることを学生に話し、数学や工学の発展には豊かな文化的背景が必要であることを強調している。

参 考 文 献

- (1) 賢島WS記録「大学における数学基礎教育」：
<http://euler.math.hc.keio.ac.jp/mathsoc/WGwsrep/WGwsrep94-1.html>
- (2) 寺田文行・吉村啓 編：数学教育とコンピューター、日本評論社(1989)。
- (3) L. Haws and T. Kiser : Exploring the Brachistochrone Problem, Amer. Math. Monthly 102, 2 (1995) 328。
- (4) M. Giaquinta and S. Hidebrandt : Calculus of Variations I, II., Springer-Verlag (1994)。
- (5) J. L. Troutman : Variational Calculus with Elementary Convexity, Springer-Verlag (1983)。
- (6) H. Sagan : Introduction to the Calculus of Variations, Dover, (1992)。

著 者 紹 介

西野 芳夫

昭和22年生まれ。京都大学工学部数理工学科を卒業。京都大学工学部助手・講師を経て、昭和57年広島大学工学部助教授に就任。現在に至る。微分幾何学の応用を専門とする。