放電加工における加工面変質層の観測

橋口清人* 上出諭吉** 岡本博文** 猪飼健夫*** 藤田一郎†

On Depth of Heat Effected Layer under Surface of Workpiece in EDM

Kiyoto HASHIGUCHI, Yukichi KAMIIDE, Hirohumi OKAMOTO,
Takeo IKAI and Ichiro FUJITA

Abstract

Heat generated by the repeating pulse discharge in EDM affects the surface of workpiece. This heat effect depends on the wave form of the pulse discharge in EDM, for example, peak value of pulse discharge current, pulse duration, duty factor, and so on.

This paper describes the relation between the electrical condition of wave form and the depth of heat effected layer of workpiece. We present fundamental data for determination of the optimum electrical condition in EDM.

We think of the radius of virtual thermal source on producing micro craters by pulse discharge. The radius is derived with due regard to the expansion of arc channel. The depth of transformed layer is calculated from the radius, and is about the same value obtained from the micro-vickers hardness of workpiece. And we show that the radius can be calculated from the peak value of pulse discharge current and pulse duration, so the depth of heat effected layer can be estimated.

* 米子工業高等専門学校
** 産業技術短期大学
*** 和歌山工業高等専門学校
† 同志社大学

1. まえがき

放電加工では、絶縁液中において工具電極と被加工材料間に繰り返されるパルス性放電毎の電極点入力が熱入力となり、被加工材料の表面の一点に溶融・気化に至るまでの局部的加熱が繰り返される。微小面積の電極点付近の溶融部は、パルス放電点弧時に発生する衝撃波に加え、その後周囲液体の気化により発生した気泡運動に基づく内部圧力変化や周囲液体の流動などの作用により飛散し、放電痕を形成する。そして、パルス性放電毎の放電痕部の飛散の累積が材料の除去量となる。加工面は、この繰り返して形成される放電痕の集積であるから、被加工材料表面下に熱的な影響を受けた変質層を形成し、硬度の変化や浸炭がおこる。これらは、製品の精度や寿命、耐摩耗性や耐薬品性などに影響をおよぼすことが推測される。

本論文の第一の目的は、電氣的入力のパルス性放電エネルギーを、放電波形における電流値、パルス幅により変化させ、被加工材料表面付近の変質層や硬度変化、および炭素含浸へ与える影響を観測し、被加工物の用途に応じた加工条件を決定するための、幅広い資料を提供することである。また、放電休止時間も変化させ、同様に検討した。

第二の目的は、被加工材料の熱影響深さを推定することである。ここでは、アークによる熱源半径は時間的に変化するとの仮定から仮想した、等価熱入力半径なる概念を導入し、この概念の妥当性を実証している。この仮想熱入力半径を用いて、被加工材料が変態点となる深さを計算したところ、被加工材料の断面の硬さ測定より推定した変態点深さと、ほぼ一致する結果が得られ、この概念導入の妥当性を確認できた。

仮想熱入力半径導入の根拠は、次のことによる。

放電加工における加工を進行するための熱源は、高電力密度のアーク入力である。アーク柱は、高温であり、しかも放電部の電力密度が 10^9 W/cm^3 にも達する。放電点弧に伴って生成された気泡内部は、低気圧となる時間帯が存在し、その中におけるアーク柱は膨張し、熱入力半径も何らかの関係を持って時間的に変化することは十分予測されるであろう。従来、放電加工におけるパルス性熱入力による材料の局部加熱を考えると、熱入力は一定であると仮定して計算されてきた^{1)~7)}。そのとき、熱入力半径と放電痕はほぼ同じであるとの結果が得られている^{1),6),8)}。しかし、電流値一定でパルス幅を増加すれば、放電痕半径が時々刻々と大きくなることは、実験事実として周知のことである^{8)~10)}。このことは、一定の熱源半径入力によっても、時間の経過により熱電導による高温範囲が広がり、放電痕半径が大きくなるようにも考えられる。しかし、放電加工のようなパルス幅の時間帯では、電極材料の溶融点まで加熱される表面範囲は、一定半径の熱入力とほぼ等しい範囲であることも確かめられている^{8)~10)}。

結局、これらを総合して考えると、計算において熱源半径を一定とする仮定には、十分検討の余地があるものと考えた。

2. 実験方法

2.1 パルス波形条件

図1は、実験範囲の加工時における繰り返しパルス性放電波形の例を示す。同図(a)は電圧波形、(b)は電流波形である。直流を断続する、トランジスタ式放電加工機を使用し、パルス電流値は8~32A、パルス幅は50~800 μ s、デューティファクタ（パルス幅/パルス間隔）を45~80%の変化幅とし、繰り返しパルス放電を点弧した。

工具電極材料は、Cu（外径 ϕ 20mm、内径 ϕ 5mm）であり、被加工材料は炭素工具鋼鋼材 SK-4を焼き入れたものである。

加工液は、循環して濾過した白灯油である。

2.2 加工面資料の作成と炭素含有率の測定

試料の SK-4を、820℃で20分間加熱後、水冷して焼き入れた。その後、150℃で30分間焼き戻しを行った。

図2のように、2mmの深さまで加工した後、図の深さ方向に硬度測定と断面組織の観測を行った。また、炭素の含有率はE PMAにより測定した。

図1 (a)電圧波形、(b)電流波形

図2 試料断面

3. 実験結果

まず、加工により熱影響を受けた変質層を観測した。

図3に、パルス放電のエネルギーをパルス幅、またはパルス電流値を変えて変化したときの材料組織の変質層観測例を写真により示す。デューティファクタは50%一定である。

図4に、放電休止時間を変化したときの、同様変質層観測写真例を示す。

図3、4の最表層は高温となった加工表面に浸炭作用がおり白銑組織が表れている。その下の、マルテンサイト層は、720℃以上の温度から急冷されたときに生じる非常に硬い層である。ここには炭素の一部が固溶しセメントライトとして分布している。また、局所的にはかなり高い温度になっているらしく、核となる未溶解炭素物がなくなって、パーライト組織となっている。加工面は、パルス性放電持続中の放電痕付近がかなりの高温になり、放電休止期間に急冷されることが繰り返されたものであることがわかる。

図5に、パルス電流値を変化して放電エネルギーを変えたときの、深さと硬さの関係を示す。

図3 放電電流と放電時間による変質層の変化

図 4 放電休止時間と変質層

図 5 放電電流変化による深さと硬さ

図 6 パルス幅変化による深さと硬さ

図 6 は、同様パルス幅を変化して放電エネルギーを変えたときの深さと硬さの関係を示したものである。表面が硬く、その内側が柔らかくなる焼き入れは、高炭素鋼の水焼き入れのとき表れる傾向に似ている。

図 7 に、放電休止時間を変化したとき、同様の関係を示した。

以上より、放電加工面下の硬さに関して、放電エネルギーを電流値のみ変化した場合（8～32A）は、表面に最高硬さを持ち、その内側の約30～60 μ mの深さにおいて柔らかい焼き入れ層が表れる。電流が大きくなるにつれて放電エネルギーが増大すると表面の硬い層が広がる傾向にある。また、パルス幅のみを変化した場合（50～800 μ s）は、エネルギーの増加と共に表面の硬い層が厚くなり、そ

図7 放電休止時間変化による深さと硬さ

して柔らかい焼き入れの場所も内部に深く影響することが判明した。放電休止時間は、放電電流値16Aでパルス幅100μs、衝撃係数40～80%ではあまり硬さに影響しないようである。

これらの熱影響の度合いを参考に、用途に応じた波形形態を選定すべきであろう。

さらに、パルス性熱入力にもかかわらず、焼き戻し効果が表れる深さが生じていることは、変態に要する時間が本実験範囲程度 (10^{-5} s 以下) とかなり短いものと言えるであろう¹¹⁾。なお、繰り返し放電による熱の蓄積によることも考えなければ

ならないが、前の放電パルスによる熱履歴は考慮する必要がないとの報告もあること¹²⁾、また同じ所に放電が重なることは少ないことを考えれば¹³⁾、材料の変態はパルス毎に行われていると思われる。

図8に、硬さの変化と炭素含有率などの、深さとの関連をパターン化して示した。高温の最表層は、内部の約2倍近くにもなっている。

4. 検討

4.1 放電加工における熱入力半径

従来、放電加工において一回のパルス放電による入力を考える場合、

[パルス性アーク柱半径(熱入力半径)は一定である]

図8 加工表面下の熱影響

と仮定して計算されている^{1)~7)}。

その結果として

[パルスアーク柱半径(熱入力半径)は実験誤差の範囲内で放電痕半径に等しい]

と結論付けられている^{1),8),14),16)}。すなわち、放電加工のパルス性熱源が一定入力半径とした場合、溶融点付近まで加熱される範囲は、ほとんど熱源半径範囲以上に広がらないとしている。

これらの仮定と結果において、次のような点で検討の余地があるように思う。

- (1) 方形波パルス放電エネルギーを、電流値を一定にし、パルス幅を変えることにより変化させて、形成される放電痕半径を測定すると、半径は時間とともに増加する。つまり上記の結論であれば、熱入力半径も放電痕半径の増加につれて膨張していると考えなければならず、計算の仮定にこのことに関する何らかの配慮が必要と思う。
- (2) 一定熱入力半径でも熱伝導により表面の溶融温度範囲が広がることも考えられる。このことは、放電加工における程度のパルス幅では、溶融点まで加熱される範囲(飛散して放電痕となる範囲)が熱入力半径とほぼ同じであるとの上記結論から考えて、否定的と考えざるを得ない。つまり、一定半径の熱入力による場合、それより十分広く、電極表面の溶融点以上に加熱される範囲(放電痕半径)が時間と共に増加してゆくとは考えにくい。

4.2 等価熱入力半径「 a 」

4.2.1 概念

ここに次の仮定により電極表面の局所的加熱を考える。

- (1) パルス性アークによる熱入力半径は時間的に変化する。
- (2) 変化する熱入力半径による加熱と等価な熱作用を行う半径として、等価熱入力半径「 a 」(電流値, 放電時間により定まる一定値)を仮想する。

この仮想半径の概念は、電気工学の時間的に変化する交流における取り扱いにおいて、同値の熱作用を行う一定の実効値で行うことと同じであり、このことは4.1節に指摘した検討の余地解消の一方策につながるものであろう。

電極表面の、アークによる局所的加熱温度推定に、比較的計算が簡単であり従来よく使われている次式がある¹⁶⁾。この式の熱源半径 A は、一定値として導き出された式である(付録)。ここに A として上記仮想の等価熱入力半径「 a 」(一定値)を当ててるのが、より合理的と思う。

$$\theta(r, z, t) = \frac{Aq}{2K} \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_1(\lambda A) \left\{ e^{-\lambda^2 z} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{z}{2\sqrt{kt}} - \lambda\sqrt{kt} \right\} - e^{\lambda^2 z} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{z}{2\sqrt{kt}} + \lambda\sqrt{kt} \right\} \right\} \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (1)$$

ただし、 $\operatorname{erfc}[x]$: 補誤差関数, $q=B/\pi A^2$: 熱入力密度, B : 熱入力, $k=K/\rho c$: 温度拡散率, K : 熱伝導率, ρ : 密度, c : 比熱, J_0, J_1 : 零次および一次のベッセル関数

4.2.2 等価熱入力半径「 a 」の大きさ

概念的に妥当性があっても「 a 」を具体的数値で与えることができなければ、(1)式を利用できない。

以下のように「 a 」を定める。

方形波パルス性放電現象において、時間的に変化するものの一つに低気圧中のアーク柱膨張が考えられる。

液中でパルス性放電を点弧すると、その周囲に気泡が発生し、膨張収縮運動を行うことが予測される^{13),16)~20)}。膨張収縮運動を行うとすれば、気泡内部は、初期では高圧力であろうが時間の経過により周囲圧力より低気圧へと反転すると推測される。結局、気泡発生後のアークは、点弧後に低気圧雰囲気中で持続する時間帯が存在すると考えられる。

このことを示唆する現象として

* 放電加工における工具電極（陰極）が低消耗をきたす一因に、被加工材料（陽極）からの移転現象があげられる。

この現象は低気圧中の現象である^{21)~24)}。

* 放電加工における電極からの電子放出は、T-F放出でほぼ説明できるとされている^{25),26)}。

このT-F理論は真空中理論である。

* 繰り返すパルス放電における放電点の離散は、放電ギャップ間の気泡の膨張収縮運動がおこるとして説明できる¹³⁾。

また、放電加工におけるギャップへの投入電力は 10^9 W/cm^3 近くにも達しており、熱入力の根源であるアークが低気圧中に存在したとき、膨張すると考えることに無理はないであろう。

図9は、本実験条件に比べると放電時間、エネルギー、放電波形、ギャップ長等においてかなり違いがあるが（放電開始電圧 550V、除々に電極を接近させて点弧した1パルス放電）、放電発光を流し写真として観測した例である。発光は膨らみを持つ。その他、液中針状電極間で点弧し、生成された膨張収縮する気泡中におけるアーク発光の報告でも、発光は膨張している^{27)~31)}。

以上のことから、4.2節のパルス性放電による等価熱入力半径の時間的変化は、アーク柱の膨張に強く関連がある

図9 液中短ギャップにおけるアーク柱の膨張

と仮定する。

一方、低気圧および気中におけるアーク柱半径 $R(t)$ の膨張を表す式として、次式が与えられている^{29)~34)}。

$$R(t) = K_1 \cdot \{W(t)\}^P \cdot \left[\int_0^t \{W(t)\}^{\frac{1}{2}} dt \right]^Q \quad (2)$$

ただし、 $W(t)$ は放電エネルギー、 P 、 Q および K は放電が点弧される媒質により定まる定数。

いま、アーク電圧を V_a 、アーク電流を I として、本実験のようにほぼ方形波パルス放電の場合を考えれば、両者とも時間的に一定とみなして、(2)式は次のように簡略化される。

$$R(t) = K_2 \cdot I^{L_1} \cdot t^{L_2} \quad (3)$$

$$\text{ただし、} K_2 = \frac{2}{3} \cdot K_1 \cdot V_a^{(2P+Q)/2}$$

$$L_1 = \frac{2P+Q}{2}, \quad L_2 = \frac{2P+3Q}{2}$$

前述のように、放電加工における放電現象は、放電の開始は液中であるが、その後に気泡が発生するため、低圧気中放電へと移行する。つまり気中放電現象として取り扱える時間帯がかなりあると推定される。

そこで、放電加工における材料への熱入力現象解明を考えると、熱入力半径の変化に、気中放電の式ではあるが(2)式に注目し(本論文の波形条件では(3)式)、波形条件により定まる一定値とするため(3)式を時間的に平均した、仮想の等価熱入力半径「 a 」を導入する。すなわち、電流値と放電時間が定まれば、熱入力半径として一定値「 a 」を得て、(1)式に適用できる。

前に述べたように、電気工学の交流による熱の発生は、一定値である仮想の実効値により計算するのと、同様の考え方である。

電流値を I 、パルス幅を τ とした場合、(3)式の時間平均として

$$a = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau R(t) \cdot dt = K_3 \cdot I^{L_1} \cdot \tau^{L_2} \quad (4)$$

$$\text{ただし、} K_3 = \frac{K_2}{(2P+3Q)/2+1}$$

が、一定値として与えられる。

実験により、通常の放電加工の場合として各定数を定めると、次のような実験式となることを他に報告した³⁵⁾。

図10 放電痕モデル

図11 加工進展時の表面モデル

図12 基準試料の硬さ

図13 放電加工面からの変態点深さと放電時間

$$a = 2.04 \times 10^{-3} \times I^{0.43} \times \tau^{0.44} \quad (\mu\text{m}) \quad (5)$$

ただし、単位は $I: A$, τ : 秒。

図10に、単一放電における放電痕半径と仮想熱入力概念図を示した。アーク柱の広がり遅れて、等価熱入力半径「 a 」があるが、あくまでも実在するものではない。

4.3 加工表面下の材料温度

図11に、放電加工面が放電痕の集積であるとして、加工面形成のモデルを示した。つまり、放電加工面の深さ方向に与えられている温度の影響は、基本的に単一放電による熱影響の繰り返しであると考え¹²⁾。

このことより、図3や図4におけるマルテンサイト層の最深部は、少なくとも材料変態点の720℃以上になっていると推測される。

図12に、基礎試料（放電加工を行っていないもの）を通常の一定焼き入れした場合の、焼き入れ温

度と試料内部の硬さの関係を測定して示した。放電加工を行う以前の材料硬さは約200Hvである。

図13に、図6の硬さ測定値の16(A)の場合の500～550Hvとなる深さ、すなわち図12から推定し、少なくとも変態点720℃に達しているであろう深さを求めて、△印実線で示した。

同図●印実線は、(4)式を基にした(5)式の仮想等価熱入力半径「 a 」を(1)式に代入し、パルス電流値16(A)でパルス幅を変化して計算した、表面下720℃になっている深さを示したものである。パルス幅が短い範囲で少し差があるが、実験値とほぼおなじ値を示している。ただし、電極点への熱入力は、全放電ギャップ入力50%であるとした。

結局、図13により、加工面断面層の温度の影響を調べるには、CARSLAW氏の(1)式の熱入力半径に、アークが膨張するとの仮定を根拠にした仮想熱入力半径「 a 」の(5)式が、使用できそうである。言い換えると、熱源の大きさが膨張することを考慮した仮想等価熱入力半径の提案は、妥当性あるものと評価して良さそうである。

5. むすび

焼き入れ鋼を放電加工した場合の、深さ方向の熱影響状態を、視覚的に、また深さ方向の浸炭状況および硬さの変化を示した。さらに、放電加工におけるパルス性熱入力半径についても検討した。本実験条件範囲において、次のようなことが明らかになった。

- (1) 熱影響深さは、パルス放電エネルギーに左右される。エネルギー変化を電流値のみによる場合と、パルス幅のみによる場合を調べたが、両変化の形態による表面硬さや熱影響深さには大差がない。エネルギー増加と共に、表面の硬い層が厚くなり、その内側の柔らかく焼き戻される層が厚くなる傾向がある。
- (2) 加工により、極く表面に近いところでは硬さが増加する。さらに深いところに焼き戻し効果が表れ、加工前より硬さが低下する層が生じる。
このことは、変態変化が、本論文で実験したパルス幅範囲の短時間内におこる現象であることも示している。
- (3) 放電加工のパルス放電における熱入力として等価熱入力半径「 a 」を仮想した。この「 a 」を、放電柱が膨張するとの仮定を基に、方形波における任意の放電電流および放電時間により定まる一定値として提示した。
- (4) 仮想した等価熱源半径「 a 」を用いて、放電加工における被加工表面下の熱影響深さを計算し、材料の変態層の深さを観測したものと比較したところ、ほぼ一致する結果が得られ、仮想した等価熱入力半径「 a 」の妥当性を実証できた。

謝 辞

金属組織等については、産業技術短期大学重末信一教授にご指導をいただきました。付録の熱伝導計算式の誘導については、同じく肥田金三教授に懇切丁寧なご指導を頂きました。両教授に対し、付記してお礼申し上げます。

文 献

- 1) 元木・上出：電気学会誌A, Vol. 100, No. 5, P. 271, (昭 55)
- 2) 木本・田宮・平田：電気学会誌, Vol. 89, No. 1, P. 133, (昭 44)
- 3) 木本・田宮・平田：電気加工学会誌, Vol. 1, No. 2, P. 43 (昭 43)
- 4) E. Hantzshe, B. Juttner, V. F. Puchkarov, W. Rohrbeck and H. Wolf : J. Phys. D : Appl. Phys., Vol. 9, (1976)
- 5) 筒井・神谷・山田：電気加工学会誌, Vol. 9, No. 18, P. 8 (昭 51)
- 6) 向山：電気加工学会誌, Vol. 11, No. 27, P. 70 (昭 53)
- 7) 橋口：電気学会誌A, Vol. 105-8, P. 451, (昭 60)
- 8) 向山・楊：電気加工学会誌, Vol. 26, No. 53, P. 13, (平 4)
- 9) 木本：「電気・電子応用精密加工」, オーム社, P. 20, (昭 57)
- 10) 井上：「放電加工の基礎」, 未踏加工技術協会, P. 71, (昭 49)
- 11) 小原：「金属組織学概論」, 朝倉書店, P. 227, (昭 48)
- 12) 楊・加藤・花岡・向山：第3回電気加工全国大会講演論文集, P. 69, (平 5)
- 13) 橋口・上出：電気加工学会誌, Vol. 26, No. 53, P. 1, (平 4)
- 14) 木本・田宮・平田：電気学会誌, Vol. 80-1, P. 133, (昭 44)
- 15) 倉藤・向山：電気加工学会誌, Vol. 1, No. 2, P. 32, (昭 43)
- 16) H. S. Carslow and J. C. Jaeger: "Conduction of Heat in Solid" Oxford University Press., 2nd Ed. (1959)
- 17) 池田：電気加工学会誌, Vol. 6, No. 11, P. 12, (昭 47)
- 18) 紙谷・細川・林・藤田：電気学会全国大会 186, P. 222, (平 2)
- 19) 橋口：電気学会誌, Vol. 88-9, No. 960, P. 107, (昭 43)
- 20) 佐藤・田村・稲永・藤田：電気学会全国大会 126, P. 2-71, (平 5)
- 21) 富永：同志社工学会報, No. 7, P. 5, (1966)
- 22) 土屋・小山：電気学会誌, Vol. 87, P. 946 (昭 42~7)
- 23) 河合・横井：中部工大紀要, Vol. 31, P. 97 (昭 58)

- 24) 元木・李・谷村 : 電気学会誌, Vol. 87, P. 793, (昭 42)
- 25) K. Motoki, K. Hashiguchi and K. Tokuyama : Electrotechnical Journal of Japan, Vol. 8, No. 3/4, p. 176 (1963)
- 26) Motoki and Hashiguchi : Annals of the 15th, C.I.R.P., Vol. XIV, P. 485, (1965)
- 27) Yu. Skvortsov, V. S. Komelkov and N. M. Kuznetsov : Soviet Phys., Thech. Phys; Vol. 5, No. 10, P. 1100, April (1961)
- 28) 橋口・山本 : 第31回電気加工学会放電成形委員会, 資料 No. 31-2, (昭 48)
- 29) 山田・可児・蓮沼・永富 : 第36回電気加工学会放電成形委員会, 資料 No. 36-1, (昭 49)
- 30) 山本・橋口 : 電気学会誌, Vol. 96-A-3, P. 135, (昭 51)
- 31) 橋口 : 電気加工技術, Vol. 4, No. 10, P. 11, (昭 56)
- 32) A. S. Zingerman : Soviet Phys. -Tech. Phys., Vol. 1, P. 992, (1957)
- 33) P. G. Slade and M. F. Hoyaux : IEEE Transaction on Parts, Hybrids and Packaging, PHP-8, No. 1, P. 35 (1972-3)
- 34) T. G. Engel, M. Kristiansen and H. Krompholz : IEEE Trannsaction on Plasma Science, Vol. 19, No. 5, P. 959, (1991)
- 35) 猪飼・藤田・橋口 : 電気学会誌, Vol. 112-D-10, P. 943, (1992)

(1993. 8. 10 受付)

付 録

熱伝導方程式の解

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right]$$

<境界条件>

半無限材料表面に半径 A の円形熱源が与えられたとし、深さ方向を Z として、熱源中心からの表面上の横方向距離を r としたとき、

$$\left. \begin{array}{l} r=0 \\ Z=0 \end{array} \right\} \theta \text{ は有限} \quad \text{①}$$

$$\left. \begin{array}{l} r=\infty \\ Z=\infty \end{array} \right\} \theta=0 \quad \text{②}$$

また

$$-\int_0^r \kappa \left(\frac{\partial \theta}{\partial Z} \right)_{Z=0} 2\pi r dr = Q \frac{\pi r^2}{\pi A^2}$$

ただし、 Q : 単位時間当たりの入力

$$\begin{aligned} -2\pi r \kappa \left(\frac{\partial \theta}{\partial Z} \right)_{Z=0} &= \frac{2\pi r}{\pi A^2} Q \\ - \left(\frac{\partial \theta}{\partial Z} \right)_{Z=0} &= \frac{1}{\kappa} \frac{Q}{\pi A^2} = \frac{q}{\kappa} \end{aligned} \quad \text{③}$$

として、CARSLAWは次の解を与えている。

$$\begin{aligned} \theta(r, \tau, Z) &= \frac{qA}{2\kappa} \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_1(A\lambda) \left\{ \exp(-\lambda Z) \operatorname{erf} \left(-\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2\sqrt{\kappa \tau}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \exp(\lambda Z) \operatorname{erfc} \left(\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2\sqrt{\kappa \tau}} \right) \right\} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ \theta(0, \tau, Z) &= \frac{2q\sqrt{\kappa \tau}}{\kappa} \left\{ i \operatorname{erfc} \left(\frac{Z}{2\sqrt{\kappa \tau}} \right) - i \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{A^2 + Z^2}}{2\sqrt{\kappa \tau}} \right) \right\} \end{aligned}$$

以上に上記の二式の演算を試みる。

熱伝導方程式の解について

[I] パルス点弧後の時間 τ における材料温度

二次元の熱伝導方程式は直角座標で表せば κ を熱伝導率, θ を温度, τ を時間とすれば,

$$\kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (1)$$

ただし, r と Z はそれぞれ横方向, 深さ方向の距離

これを r, ϕ による円柱座標で表すと,

$$\kappa \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial R} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (2)$$

熱入力や材料内部の温度の分布は横方向には熱源中心軸にたいして軸対称であると考えたと

$\partial \theta / \partial \phi = 0$ であるから,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \kappa \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right\} \quad (3)$$

いま (3) 式を r だけの関数 $m(r)$ と, τ および Z による関数 $n(\tau, Z)$ の積として,

$$m(r) \cdot n(\tau, Z) = \theta(r, \tau, Z) \quad (4)$$

とおき, 変数分離をおこなう。

$m(r) \rightarrow m, n(\tau, Z) \rightarrow n$ と簡略化して書けば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial \tau} m &= \kappa \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dm}{dr} \right) n + \frac{\partial^2 n}{\partial Z^2} m \right\} \\ \frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} - \kappa \frac{\partial^2 n}{\partial Z^2} \right) &= \kappa \left(\frac{1}{rm} \frac{dm}{dr} + \frac{1}{m} \frac{d^2 m}{dr^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

となる。

(5) 式の左辺は τ と Z だけ, 右辺は r だけの関数であるから, この等式の両辺は定数とおける。あとの演算の都合上, 定数 $= -\lambda^2 \kappa$ において次のように整理する。

$$\frac{d^2 m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dm}{dr} + \lambda^2 m = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \kappa \left(\frac{\partial^2 n}{\partial Z^2} - \lambda^2 n \right) \quad (7)$$

(6) 式はベッセル関数の微分方程式であり, その解は

$$m(r) = \alpha J_0(\lambda r) + \beta Y_0(\lambda r) \quad (8)$$

で与えられる。

境界条件①より $m(r)$ も有限でなければならない。

$r \rightarrow \infty$ で $Y_0(\lambda r) \rightarrow -\infty$ であるから $\beta=0$ でなければならない。

$$\therefore m(r) = a J_0(\lambda r) \quad (9)$$

(7) 式については以下のように演算する。

いま (7) 式に次のラプラス変換を適用して整理する。

$$\int_0^\infty n \exp(-s\tau) dt = N(s, Z) \quad (10)$$

(7) 式は

$$sN(s, Z) = \kappa \left\{ \frac{d^2 N(s, Z)}{dZ^2} - \lambda^2 N(s, Z) \right\} \quad (11)$$

以後, $N(s, Z) \rightarrow N$ と簡略化して演算を進める。

(11) 式は,

$$\frac{d^2 N}{dZ^2} = \left(\frac{s}{\kappa} + \lambda^2 \right) N \quad (12)$$

(12) 式において, $d^2/dZ^2 = P^2$ なる演算子を導入すれば,

$$P^2 = \left(\frac{s}{\kappa} + \lambda^2 \right)$$

$$\therefore P = \pm \sqrt{\frac{s}{\kappa} + \lambda^2} = \pm \frac{\sqrt{s + \lambda^2 \kappa}}{\sqrt{\kappa}}$$

となり, この時の (12) 式の解は次式のように表せる。

$$\begin{aligned} N &= C \exp(PZ) + D \exp(-PZ) \\ &= C \exp\left(\frac{Z \sqrt{s + \lambda^2 \kappa}}{\sqrt{\kappa}}\right) + D \exp\left(-\frac{Z \sqrt{s + \lambda^2 \kappa}}{\sqrt{\kappa}}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

境界条件②により, $Z \rightarrow \infty$ で $n \rightarrow 0$ $N \rightarrow 0$ であるから (13) 式において $C=0$ となる。この条件を (12) 式に代入して微分すると,

$$\frac{dN}{dZ} = -\frac{\sqrt{s+\lambda^2\kappa}}{\sqrt{\kappa}} D \exp\left(-\frac{Z\sqrt{s+\lambda^2\kappa}}{\sqrt{\kappa}}\right) \quad (14)$$

境界条件③より $(\partial\theta/\partial Z)_{Z=0}$ = 定数であり時間的変化がない。そこで

$$-\left(\frac{\partial\theta}{\partial Z}\right)_{Z=0} = m(r)\left(\frac{\partial n}{\partial Z}\right)_{Z=0} = \text{定数} \cdot u(\tau)$$

ただし, $u(\tau)$ は単位関数。

である。

結局, 境界条件③の最も単純な場合として上式の定数部が 1 とすれば,

$$-\left(\frac{\partial n}{\partial Z}\right)_{Z=0} = 1, \quad -\left(\frac{\partial N}{\partial Z}\right)_{Z=0} = \frac{1}{s} \quad (15)$$

(14) 式で, $Z=0$ とおいて

$$-\frac{1}{s} = \frac{-\sqrt{s+\lambda^2\kappa}}{\sqrt{\kappa}} D \exp\left(-\frac{0\sqrt{s+\lambda^2\kappa}}{\sqrt{\kappa}}\right)$$

したがって,

$$D = \frac{\sqrt{\kappa}}{s\sqrt{s+\lambda^2\kappa}}$$

(13) 式より

$$\therefore N = \frac{\sqrt{\kappa}}{s\sqrt{s+\lambda^2\kappa}} \exp\left(-\frac{Z\sqrt{s+\lambda^2\kappa}}{\sqrt{\kappa}}\right) \quad (16)$$

ここに (10) 式より

$$\mathcal{L}^{-1} N = n(\tau, Z) \quad (17)$$

(16), (17) 式より $n(\tau, Z)$ を求める。

N の逆変換にあたり次の公式を利用する。

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{g \exp(-b\sqrt{s})}{s(g+\sqrt{s})}\right] \\ &= -\exp(gb) \exp(-g^2\tau) \operatorname{erfc}(g\sqrt{\tau} + \frac{b}{2\sqrt{gt}}) + \operatorname{erfc}(\frac{b}{2\sqrt{gt}}) \end{aligned} \quad (18)$$

上式左辺を部分分数に分けて,

$$\begin{aligned}\frac{g \exp(-b\sqrt{s})}{s(g+\sqrt{s})} &= \frac{g(\sqrt{s}-g) \exp(-b\sqrt{s})}{s(s-g^2)} \\ &= \frac{g \exp(-b\sqrt{s})}{\sqrt{s}(s-g^2)} + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-g^2}\right) \exp(-b\sqrt{s})\end{aligned}\quad (19)$$

さらに次のような公式も利用する。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \exp(-b\sqrt{s})\right] = \operatorname{erfc}\left(\frac{b}{2\sqrt{\tau}}\right) \quad (20)$$

(18) (19) (20) 式より

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{g \exp(-b\sqrt{s})}{\sqrt{s}(s-g^2)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \exp(-b\sqrt{s})\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-g^2} \exp(-b\sqrt{s})\right] \\ &= -\exp(gb) \exp(-g^2 \tau) \operatorname{erfc}\left(g\sqrt{\tau} + \frac{b}{2\sqrt{\tau}}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \exp(-b\sqrt{s})\right] \\ \therefore \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{g \exp(-b\sqrt{s})}{\sqrt{s}(s-g^2)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp(-b\sqrt{s})}{s-g^2}\right] \\ &\quad - \exp(gb) \exp(-g^2 \tau) \operatorname{erfc}\left(g\sqrt{\tau} + \frac{b}{2\sqrt{\tau}}\right)\end{aligned}\quad (21)$$

(21) 式を (16) 式と関連づけるための次のように変換する。

$$\begin{aligned}b &= \frac{Z}{\sqrt{\kappa}} \quad g^2 = \lambda^2 \kappa \quad \text{or} \quad g = \pm \lambda \sqrt{\kappa} \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\lambda \sqrt{\kappa} \exp(-Z\sqrt{\frac{s}{\kappa}})}{\sqrt{s}(s-\lambda^2 \kappa)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp(-Z\sqrt{\frac{s}{\kappa}})}{s-\lambda^2 \kappa}\right] \\ &\quad - \exp(\lambda Z) \exp(-\lambda^2 \kappa \tau) \operatorname{erfc}\left(\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{b}{2\sqrt{\tau}}\right) \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\lambda \sqrt{\kappa} \exp(-Z\sqrt{\frac{s}{\kappa}})}{\sqrt{s}(s-\lambda^2 \kappa)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp(-Z\sqrt{\frac{s}{\kappa}})}{s-\lambda^2 \kappa}\right] \\ &\quad - \exp(-\lambda Z) \exp(-\lambda^2 \kappa \tau) \operatorname{erfc}\left(-\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{b}{2\sqrt{\tau}}\right)\end{aligned}$$

両式の差を求めると

$$\begin{aligned}
& 2 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\lambda \sqrt{\kappa} \exp \left(-Z \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right)}{\sqrt{s} (s - \lambda^2 \kappa)} \right] \\
&= \exp \left(-\lambda^2 \kappa \tau \right) \left\{ \exp \left(-\lambda Z \right) \operatorname{erfc} \left(-\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2 \sqrt{\kappa \tau}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \exp \left(\lambda Z \right) \operatorname{erfc} \left(\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2 \sqrt{\kappa \tau}} \right) \right\} \\
&\therefore \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sqrt{\kappa} \exp \left(-\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \right)}{\sqrt{s} (s - \lambda^2 \kappa)} \right] \\
&= \frac{\exp \left(-\lambda^2 \kappa \tau \right)}{2 \lambda} \left\{ \exp \left(-\lambda Z \right) \operatorname{erfc} \left(-\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2 \sqrt{\kappa \tau}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \exp \left(\lambda Z \right) \operatorname{erfc} \left(\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2 \sqrt{\kappa \tau}} \right) \right\} \tag{22}
\end{aligned}$$

上式において $s \rightarrow s + \lambda^2 \kappa$ と因数変換して

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sqrt{\kappa}}{s \sqrt{s + \lambda^2 \kappa}} \exp \left(\frac{-Z \sqrt{s + \lambda^2 \kappa}}{\sqrt{\kappa}} \right) \right] \\
&= \frac{\exp \left(-\lambda^2 \kappa \tau \right)}{2 \lambda} \left\{ \exp \left(-\lambda Z \right) \operatorname{erfc} \left(-\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2 \sqrt{\kappa \tau}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \exp \left(\lambda Z \right) \operatorname{erfc} \left(\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2 \sqrt{\kappa \tau}} \right) \right\} \tag{23}
\end{aligned}$$

(16) (17) (23) 式により

$$\begin{aligned}
n(\tau, Z) &= \frac{\exp \left(-\lambda^2 \kappa \tau \right)}{2 \lambda} \left\{ \exp \left(-\lambda Z \right) \operatorname{erfc} \left(-\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2 \sqrt{\kappa \tau}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \exp \left(\lambda Z \right) \operatorname{erfc} \left(\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2 \sqrt{\kappa \tau}} \right) \right\} \tag{24}
\end{aligned}$$

(9) 式のように $m(r)$ がベッセル関数により与えられているので、任意の変数 λ のときの温度を $\theta_\lambda(r, \tau, Z)$ として (4) (9) (24) 式より

$$\theta_{\lambda}(r, \tau, Z) = \alpha J_0(\lambda r) \frac{\exp(-\lambda^2 \kappa \tau)}{2\lambda} \left\{ \exp(-\lambda Z) \operatorname{erfc}\left(-\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2\sqrt{\kappa \tau}}\right) - \exp(\lambda Z) \operatorname{erfc}\left(\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2\sqrt{\kappa \tau}}\right) \right\} \quad (25)$$

上式が微分方程式を満たすものとして右辺に一次式 $M + HZ$ の項も付加すべきであろうが、境界条件①より $M = 0$, $H = 0$ となるので省略した。

ベッセル関数は任意の変数 λ のすべてにおいて収束するので、これらをすべて含む $\theta(r, \tau, Z)$ は $\theta_{\lambda}(r, \tau, Z)$ を積分して、

$$\theta(r, \tau, Z) = \int_0^{\infty} \alpha J_0(\lambda r) \frac{\exp(-\lambda^2 \kappa \tau)}{2\lambda} \left\{ \exp(-\lambda Z) \operatorname{erfc}\left(-\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2\sqrt{\kappa \tau}}\right) - \exp(\lambda Z) \operatorname{erfc}\left(\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2\sqrt{\kappa \tau}}\right) \right\} d\lambda \quad (26)$$

次に (25) 式を Z で微分して境界条件③より α を求める。

ここに関数としての定義は、

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-x^2) dx, \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

$$\frac{d}{dx} \{ \operatorname{erfc}(x) \} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Z} \theta_{\lambda}(r, \tau, Z) &= \alpha J_0(\lambda, r) \frac{\exp(-\lambda^2 \kappa \tau)}{2\lambda} \left\{ -\lambda \exp(-\lambda Z) \operatorname{erf}\left(-\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2\sqrt{\kappa \tau}}\right) \right. \\ &\quad + \exp(-\lambda Z) \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) \exp\left(-\left(-\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2\sqrt{\kappa \tau}}\right)^2\right) \frac{1}{2\sqrt{\kappa \tau}} \\ &\quad - \lambda \exp(\lambda Z) \operatorname{erf}\left(\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2\sqrt{\kappa \tau}}\right) \\ &\quad \left. - \exp(\lambda Z) \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) \exp\left(-\left(\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2\sqrt{\kappa \tau}}\right)^2\right) \frac{1}{2\sqrt{\kappa \tau}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial Z} \theta_\lambda(r, \tau, 0) \\
&= \alpha J_0(\lambda r) \frac{\exp(-\lambda^2 \kappa \tau)}{2\lambda} \left[-\lambda \operatorname{erfc}(-\lambda \sqrt{\kappa \tau}) - \lambda \operatorname{erfc}(\lambda \sqrt{\kappa \tau}) \right] \\
&= \alpha J_0(\lambda r) \frac{\exp(-\lambda^2 \kappa \tau)}{2} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-\lambda \sqrt{\kappa \tau}} \exp(-\lambda^2 \kappa \tau) dx \right. \\
&\quad \left. + 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda \sqrt{\kappa \tau}} \exp(-\lambda^2 \kappa \tau) dx \right] \\
&= \alpha J_0(\lambda r) \exp(-\lambda^2 \kappa \tau) \\
&\left(\frac{\partial \theta}{\partial Z} \right)_{Z=0} = \int_0^\infty \alpha J_0(\lambda r) \exp(-\lambda^2 \kappa \tau) d\lambda \tag{27}
\end{aligned}$$

しかるに公式により

$$\left. \begin{aligned}
\int_0^\infty J_0(r\lambda) J_1(A\lambda) d\lambda &= 0 & A < r \\
&= \frac{1}{2A} & A = r \\
&= \frac{1}{A} & A > r
\end{aligned} \right\} \tag{28}$$

(27) 式と境界条件③から

$$\int_0^\infty \alpha J_0(\lambda r) \exp(-\lambda^2 \kappa \tau) d\lambda = \frac{q}{\kappa} \tag{29}$$

であるから (28) 式と (29) 式を対応させると,

$$\alpha = \frac{qA}{\kappa} \exp(\lambda^2 \kappa \tau) J_1(A\lambda) \tag{30}$$

(30) 式を (26) 式に代入して, $\theta(r, \tau, Z)$ が求まる。

$$\begin{aligned}
\theta(r, \tau, Z) &= \frac{qA}{2\kappa} \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_1(A\lambda) \left\{ \exp(-\lambda Z) \operatorname{erfc}\left(-\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2\sqrt{\kappa \tau}}\right) \right. \\
&\quad \left. - \exp(\lambda Z) \operatorname{erfc}\left(\lambda \sqrt{\kappa \tau} + \frac{Z}{2\sqrt{\kappa \tau}}\right) \right\} \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{31}
\end{aligned}$$

[II] $\theta(0, \tau, Z)$ について

(31) 式に $r \rightarrow 0$ を代入して, また $J_0(0) = 1$ であるから,

$$\theta(0, \tau, Z) = \frac{qA}{2\kappa} \int_0^\infty J_1(A\lambda) \left\{ \exp(-\lambda Z) \operatorname{erfc}\left(-\lambda\sqrt{\kappa\tau} + \frac{Z}{2\sqrt{\kappa\tau}}\right) - \exp(\lambda Z) \operatorname{erfc}\left(\lambda\sqrt{\kappa\tau} + \frac{Z}{2\sqrt{\kappa\tau}}\right) \right\} \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (32)$$

(32) 式を τ に関してラプラス変換する。

$\mathcal{L}[f(N)] = F(s)$ ならば,

$$\mathcal{L}[f(\tau) \exp(-\lambda^2 \kappa \tau)] = F(s + \lambda^2 \kappa) \quad (33)$$

(22) 式と (33) 式より, (33) 式のラプラス変換 $\Theta(0, s, Z)$ は,

$$\Theta(0, s, Z) = \frac{qA}{2\kappa} \int_0^\infty J_1(A\lambda) \frac{2\sqrt{\kappa} \exp(-Z\sqrt{s+\lambda^2\kappa}/\sqrt{\kappa})}{s\sqrt{s+\lambda^2\kappa}} d\lambda \quad (34)$$

これより,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta(0, s, Z)}{\partial Z} &= \frac{qA}{\kappa} \int_0^\infty J_1(A\lambda) \frac{\sqrt{\kappa}}{s\sqrt{s+\lambda^2\kappa}} \frac{-\sqrt{s+\lambda^2\kappa}}{\sqrt{\kappa}} \exp\left(\frac{-Z\sqrt{s+\lambda^2\kappa}}{\sqrt{\kappa}}\right) d\lambda \\ &= \frac{-qA}{s\kappa} \int_0^\infty J_1(A\lambda) \exp\left(\frac{-Z\sqrt{s+\lambda^2\kappa}}{\sqrt{\kappa}}\right) d\lambda \end{aligned} \quad (35)$$

ここにおいて次の積分の公式を採用する。

$$\int_0^\infty J_0(A\lambda) \frac{\lambda \exp(-Z\sqrt{\lambda^2 - y^2})}{\sqrt{\lambda^2 - y^2}} d\lambda = \frac{\exp(iy\sqrt{A^2 + Z^2})}{\sqrt{A^2 + Z^2}} \quad (36)$$

さらに,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \exp(-Z\sqrt{\lambda^2 - y^2}) &= -Z \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - y^2}} \exp(-Z\sqrt{\lambda^2 - y^2}) = u' \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} J_0(A\lambda) &= A \frac{d}{d(A\lambda)} J_0(A\lambda) = -AJ_1(A\lambda) = v' \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

(37) 式を利用して, (36) 式の左辺を積分する。

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty J_0(A\lambda) \frac{\lambda \exp(-Z\sqrt{\lambda^2-y^2})}{\sqrt{\lambda^2-y^2}} d\lambda = \left| -\frac{1}{Z} \exp(-Z\sqrt{\lambda^2-y^2}) J_0(A\lambda) \right|_0^\infty \\
& - \int_0^\infty \left[-\frac{1}{Z} \exp(-Z\sqrt{\lambda^2-y^2}) \{ -AJ_1(A\lambda) \} \right] d\lambda \\
& = \left[-\frac{1}{Z} \exp(-Z\sqrt{\infty^2-y^2}) J_0(A \cdot \infty) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{Z} \exp(-Z\sqrt{0^2-y^2}) J_0(A \cdot 0) \right] \\
& \quad - \int_0^\infty \frac{A}{Z} J_1(A\lambda) \exp(-Z\sqrt{\lambda^2-y^2}) d\lambda \\
& = \frac{1}{Z} \exp(-Ziy) - \frac{A}{Z} \int_0^\infty J_1(A\lambda) \exp(-Z\sqrt{\lambda^2-y^2}) d\lambda
\end{aligned}$$

ここに $y^2 = -s/\kappa$ とすれば, $iy = -\sqrt{s/\kappa}$ および (36) 式の右辺を代入して

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty J_1(A\lambda) \exp(-Z\sqrt{s+\lambda^2\kappa}/\sqrt{\kappa}) d\lambda \\
& = \frac{1}{A} \exp(-Z\sqrt{s/\kappa}) - \frac{Z}{A} \frac{\exp(-\sqrt{s/\kappa} \sqrt{A^2+Z^2})}{\sqrt{A^2+Z^2}}
\end{aligned} \tag{38}$$

(38) 式を (35) 式に代入すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Theta(0, s, Z)}{\partial Z} &= \frac{-qA}{s\kappa} \left[\frac{1}{A} \exp(-Z\sqrt{s/\kappa}) - \frac{Z}{A} \frac{\exp(-\sqrt{s/\kappa} \sqrt{A^2+Z^2})}{\sqrt{A^2+Z^2}} \right] \\
&= \frac{q}{s\kappa} \left[Z \frac{\exp(-\sqrt{s/\kappa} \sqrt{A^2+Z^2})}{\sqrt{A^2+Z^2}} - \exp(-Z\sqrt{s/\kappa}) \right] \\
&= \frac{q}{\kappa} \left[\frac{Z}{\sqrt{A^2+Z^2}} \frac{\exp(-\sqrt{s/\kappa} \sqrt{A^2+Z^2})}{s} - \frac{\exp(-Z\sqrt{s/\kappa})}{s} \right]
\end{aligned} \tag{39}$$

ラプラスの逆変換公式によれば, 時間を τ として,

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\exp(-\sqrt{sw})}{s} \right) = \operatorname{erfc} \left(\frac{w}{2\sqrt{\tau}} \right)$$

これを (39) 式に適用すれば,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \frac{\partial \theta (0, s, Z)}{\partial Z} &= \frac{\partial \theta (0, \tau, Z)}{\partial Z} \\ &= \frac{q}{\kappa} \left[\frac{Z}{\sqrt{A^2 + Z^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}} \sqrt{\frac{A^2 + Z^2}{\kappa}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{Z}{2\sqrt{\tau}} \sqrt{\frac{1}{\kappa}} \right) \right] \end{aligned}$$

両辺を Z について積分すれば,

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \theta (0, \tau, Z)}{\partial Z} dZ &= -\theta (0, \tau, Z) \\ &= \frac{q}{\kappa} \left[\int \frac{Z}{\sqrt{A^2 + Z^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}} \sqrt{\frac{A^2 + Z^2}{\kappa}} \right) dZ \right. \\ &\quad \left. - \int \operatorname{erfc} \left(\frac{Z}{2\sqrt{\kappa}} \sqrt{\frac{1}{\tau}} \right) dZ \right] \end{aligned} \quad (40)$$

いま次のようにおけば,

$$\frac{1}{2\sqrt{\tau}} \sqrt{\frac{A^2 + Z^2}{\kappa}} = h, \quad \frac{dh}{dZ} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa\tau}} \frac{Z}{\sqrt{A^2 + Z^2}}, \quad dZ = \frac{2\sqrt{\kappa\tau}}{1} \frac{\sqrt{A^2 + Z^2}}{Z} dh$$

右辺第 1 項は,

$$\begin{aligned} \int \frac{Z}{\sqrt{A^2 + Z^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}} \sqrt{\frac{A^2 + Z^2}{\kappa}} \right) dZ &= \int \operatorname{erfc}(h) \cdot 2\sqrt{\kappa\tau} dh \\ &= 2\sqrt{\kappa\tau} i \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{A^2 + Z^2}}{2\sqrt{\kappa\tau}} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

同様に

$$\frac{Z}{2\sqrt{\kappa\tau}} = h, \quad \frac{dh}{dZ} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa\tau}}, \quad \therefore dZ = 2\sqrt{\kappa\tau} dh$$

右辺第 2 項は

$$\int \operatorname{erfc} \left(\frac{Z}{2\sqrt{\kappa\tau}} \right) dZ = 2\sqrt{\kappa\tau} \int \operatorname{erfc}(h) dh = 2\sqrt{\kappa\tau} i \operatorname{erfc} \left(\frac{Z}{2\sqrt{\kappa\tau}} \right) \quad (42)$$

(40) 式へ (41) (42) 式を代入して

$$\theta(0, \tau, Z) = \frac{2q\sqrt{\kappa\tau}}{\kappa} \left[i \operatorname{erfc}\left(\frac{Z}{2\sqrt{\kappa\tau}}\right) - i \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{A^2 + Z^2}}{2\sqrt{\kappa\tau}}\right) \right] \quad (43)$$