カオスを用いた放電加工の放電点分布の解析*

韓 福柱** 国枝 正典**

Distribution of Discharge Location in EDM Using Chaos Theory

Fuzhu HAN and Masanori KUNIEDA

Abstract

In this paper we describe the analysis of the distribution of discharge location using chaos theory in Electrical Discharge Machining (EDM). Chaos is a nonlinear phenomenon which is determined by a relatively simple rule, although it appears complicated and random. It was found that the discharge location is simply determined by the gap distribution and the debris particle distribution in spite of the complicity and randomness of these distributions. Namely, the discharge occurs at the location where the gap is narrow and the debris density is high. Consequently, we analyzed the discharge location distribution using chaos theory and found the following: 1) the distribution of discharge location is irregular, 2) a bifurcation is observed, 3) the attractor dimension is relatively small, and 4) at least one of the Lyapunov exponents is larger than zero. By calculating the attractor dimension, we also found that there is a correlation between the attractor dimension and machining stability, that is, the higher the attractor dimension is, the greater the stability of machining is. This means the machining stability, which has not been detectable so far, can be distinguished by calculating the attractor dimension.

Key words: EDM, chaos, attractor dimension, Lyapunov exponent, distribution of discharge location

1. 結論

放電加工において、極間における放電点の分布は加工現象に重大な影響を及ぼしている。加工中に放電点の集中または偏在が発生すると、加工速度の低下とともに加工精度も悪化する。このため、放電加工の放電点分布の研究は非常に重要な課題になっている。そこで、Kunieda ら¹⁾²⁾、小原ら³⁾は分割給電法による放電位置の検出法を提案し、極めて観察しにくい放電現象を放電位置検出により、パソコン上に可視化した。一方、Mohri⁴⁾らは、

極間の電圧波形の立下りから放電点分布状態の予測を試みている。放電点分布は一見ランダムで複雑であるが、実際に各放電位置はその時のギャップ分布と加工屑濃度分布などによって決められている。つまり、ギャップが狭い、加工屑濃度の高い場所に放電が生じると考えられる。Kunieda ら⁵⁾⁶⁾はこのような規則性を基に放電加工のシミュレーションが可能であることを証明している。従って、放電加工の放電点分布は複雑に見える一方で支配する規則は比較的に簡単であると言える。このような簡単な規則が支配する複雑な現象を解析するに当たって、最近カオスという理論が生まれてきた。本研究はカオスの理論を用いて、放電点分布を解析し、放電加工の放電点分布は実際にはカオス的な現象であることを実証するとともに、

* 電気加工学会全国大会(1999)にて一部発表

** 東京農工大学工学部

カオスを積極的に制御に応用する可能性を検討する。

2. カオスの概要

カオスとは、比較的少数の自由度しか持たない決定論的な系であるにもかかわらず、予測不可能で乱雑な挙動を示す状態である。つまり、初期条件が決まれば未来の状態が一意的に決まる決定論的な系に生じる不安定で有界な非周期運動である。

カオスの判定方法^{7) 8)}としては通常、1) 系の解が不規則に振る舞うこと、2) 分岐現象が存在すること、3) 系が少数自由度を持つこと、4) 解の相空間内での軌跡が不安定で、初期値敏感性を持つこと、などが挙げられる。上記1)の判定に従えば、得られた信号が不規則振動であるか否かは、波形を一見して明らかであるが、パワー・スペクトルが広がっているか、或いは信号の時間相関関数が時間軸正方向に急激に減少する傾向から不規則な度合を判定する場合も多い。また、2)は系を支配するパラメータを変化させた時、系が規則→不規則振動の間で遷移を起こすことより判定する。3)によれば、相空間の軌道の作る図形(アトラクタ)の次元を求め、もしこの次元が小さければ対象の系は少数自由度の系であると判定する。ここでアトラクタとは軌道が安定した状態を意味している。4)の軌道不安定度は近接した軌道間の距離が長時間的に指数関数的に広がって行くもので、この指数(リアプノフ指数)が正であれば不安定と判定する。

3. 実験方法

図1には分割給電法に基づく放電点位置検出装置^{1) 2)}の概要を示す。コンピュータが電流センサから検出した四つの分割電流(i_1 , i_2 , i_3 , i_4)を読み込んで、放電位置を計算する。放電点位置(X, Y)の計算式を次に示す。

$$X = A_x \{ (W_y - W_{0y})^2 + B_x \{ W_x - W_{0x} \} \} \quad (1)$$

$$Y = A_y \{ (W_x - W_{0x})^2 + B_y \{ W_y - W_{0y} \} \} \quad (2)$$

ただし、 $W_x = \log \frac{i_4}{i_3}$, $W_y = \log \frac{i_2}{i_1}$ 。また、 A_x ,

Fig. 1 Schematic diagram of discharge location detector

Table 1 Machining conditions

Open circuit voltage	u_i	90V
Discharge current	i_e	15A
Discharge duration	t_e	210 μ s
Pulse interval	t_0	20,80 μ s

Fig. 2 Bifurcation of distribution of discharge locations
(Discharge current 15A, pulse duration 210 μ s, pulse interval 20 μ s)

A_y , B_x , B_y , W_{0x} , W_{0y} はキャリブレーションから求められる定数である²⁾。

電極は 100mm×100mm のグラフアイトを使った。

ワークは偏在現象を起し易いために 10mm×100mm の細長手の S45C を使用した。そのため、放電点分布は長手方向 (Y 方向) だけを考慮した。加工条件は表 1 に示す。

4. 放電点分布の分岐現象

不規則データを捉えた時、まず、それが実験系への外部雑音によらず、系自身の示す不規則性であることを示す必要がある。この一つの方法として、系を支配するパラメータを変化させ、系の規則 $\leftrightarrow$ 不規則振動の間の遷移の有無を調べる方法がある。カオスを生じる系は、通常、系のパラメータを変化させると、非カオス $\rightarrow$ カオス間の転位を起こす。このカオスへの移り方は数種類あるが、休止時間が 20 μ s と比較的に短い場合、放電点分布は図 2 に示す代表的な分岐現象を示した。図 2 は安定交換分岐と言われ、一つの安定な不動点(図 2 の “a”,)から他の安定点(図 2 の “b”)に変化し、系のパラメータ(加工屑濃度、電極表面の温度、極間ギャップ)の変化に伴って、カオス状態(図 2 の “c”)に到る。図 2 の縦軸はワークの長手方向の放電位置、横軸は放電回数であるが、その放電回数の増加に伴い、系のパラメータが変化していると考えられる。

5. 放電点分布のアトラクタ次元

5.1 放電点分布のアトラクタ

放電位置の例えば X 座標の時系列データを $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ とすると、これらのデータより m 次元の空間の中に軌道を描くには、 $\mathbf{x}_j = (x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+(m-1)})$, $(j=1, 2, \dots, N-m+1)$ の軌跡を作ればよい。すなわち軌道を m 次元の空間に埋込み(embedding)、この m を埋込み次元とよぶ。この埋込みの方法により、アトラクタの次元が一つの時系列データより求められることをターケンス(F. Takens, 1981)が示した⁸⁾。このアトラクタ次元の決め方については次節で述べる。

5.2 放電点分布のアトラクタ次元

アトラクタの次元はアトラクタを特徴づける重要な量であり、この次元が小さければ、この系は少数自由度の系として振る舞い低次元のダイナミクスで記述できる。アトラクタ次元を求める方法

Fig. 3 Example of distribution of discharge locations

Fig. 4 Relationship between correlation integral and r for distribution of Fig. 3

Fig. 5 Attractor dimension of distribution of Fig. 3

はいくつかあるが、本報では相関積分による相関次元を求める方法⁷⁾⁸⁾を使用した。5.1 節により放電位置データから m 次元空間のベクトル $\mathbf{x}_j = (x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+(m-1)})$, $(j=1, 2, \dots, N-m+1)$ を構成する。そして、任意の二つのベクトルの距離 $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ を求め次の計算を行う。

$$C_n(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j}^N \theta(r - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \quad (3)$$

ここで θ はヘビサイドの階段関数で $\theta(x)=0$ ($x<0$), $\theta(x)=1$ ($x\geq 0$) である。 $C_n(r)$ は相関積分と呼ばれ、もし $C_n(r)$ が r^d に比例すれば、その指数 d_n は相関次元を与える。

図 3, 4, 5 は放電点分布のアトラクタの相関次元を求めた一例を示す。図 3 に示すような放電位置データから m 次元ベクトル $\mathbf{x}_i$ を作る。(1)式を用いて $C_n(r)$ を r の関数として求め、位相空間上の距離 r に対して求められた相関積分 $C_n(r)$ の $\log$ をとったものを図 4 に示す。相関次元 d_n は図 4 の傾きで近似的に与えられる。図 4 から求めた相関次元 d_n と埋込み次元 m の関係を図 5 に示す。図 5 に示すように埋込み次元 m を 21 以上大きくしても相関次元 d_n が 7.6 で留まるので、図 3 の放電点分布は 8 次元程度のアトラクタ内の運動として記述される。この結果は、一目乱雑に見える放電点分布データが低次元のダイナミクスで記述でき、カオスであることを示している。時系列データがランダムプロセスに従っている場合には、データが多次元状態空間内に密に分布するため、相関次元は埋込み次元と一致する(図 5)。従って、放電点分布は多次元状態空間においてランダムプロセスと異なる性質をもっている。

6. 放電点分布のリアプノフ指数

カオスの一つの大きな特徴は、相空間の近接した軌道が時間の発展とともに指数関数的に離れていくことである。この近接した軌道の離れ方を表わす量としてリアプノフ指数 (Lyapunov exponent) λ がある。リアプノフ指数は次のように求める⁹⁾¹⁰⁾¹¹⁾。

軌道 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ は m 次元微分方程式 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_m(\mathbf{x}))$ の解とする。軌道 $\mathbf{x}(t)$ に対して、初期点 $\mathbf{x}(0)$ から $\delta \mathbf{x}(0)$ だけわずかに離れた点から始まる近接軌道 $\mathbf{x}(t) + \delta \mathbf{x}(t)$ を考える。 $\delta \mathbf{x}(t)$ の時間発展はヤコビ行列 $\mathbf{J} = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_m)}$ を用い

Fig. 6 Lyapunov exponents of distribution of Fig. 3

て、 $\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{J} \delta \mathbf{x}(t)$ に従うが、これを時間 t にわたって積分すると行列 $\mathbf{L}(\mathbf{x}(0), t)$ を用いて $\delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{L}(\mathbf{x}(0), t) \delta \mathbf{x}(0)$ (4) となる。行列 $\mathbf{L}(\mathbf{x}(0), t)$ の各要素は次の式から求められる。

$$L_{ij}(\mathbf{x}(0), t) = \exp \left[\int_0^t J_{ij}(t') dt' \right] \quad (5)$$

ただし、 i, j は行列の要素番号 (i, j) を表している。

リアプノフ指数は次のように定義する。

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) \ln |\chi_i(t)| \quad (6)$$

ここで、 $\chi_i(t)$ は行列 $\mathbf{L}(\mathbf{x}(0), t)$ の固有値である ($i=1, 2, \dots, m$)。

以上のリアプノフ指数の求め方は近接軌道が指定できる場合、即ち相空間の軌道 $\mathbf{x}(t)$ が微分方

程式 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ の形に書ける場合の方法である。放電点分布のような微分方程式が未知の場合には、まず 5.1 節の方法で m 次元相空間のアトラクタを構成する。そして、相空間にある点 $\mathbf{x}_i$ の近くの点の集団 $\mathbf{x}_i$ (i は任意) を選び、適当な時間ステップ k 後の $\mathbf{x}_{i+k}$ と $\mathbf{x}_{i+k}$ から $\delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$, $\delta \mathbf{x}_{i+k} = \mathbf{x}_{i+k} - \mathbf{x}_{j+k}$ を得る。 $\delta \mathbf{x}_i$ と $\delta \mathbf{x}_{i+k}$ を式 (2) の各々 $\delta \mathbf{x}(0)$ と $\delta \mathbf{x}(t)$ に代入し、行列 $\mathbf{L}(\mathbf{x}(0), k)$ を最小自乗法により決定する。こうして得られた行列 $\mathbf{L}(\mathbf{x}(0), k)$ の固有値を計算し、式 (6) に代入すれば、リアプノフ指数 λ_i ($i=1, 2, \dots, m$) を計算できる。このとき

Fig. 7 Example of distribution of discharge locations (stable state)

Fig. 9 Example of distribution of discharge locations (unstable state)

Fig. 8 Example of distribution of discharge locations (unstable state)

— Fig. 7 — Fig. 8 — Fig. 9

Fig. 10 Attractor dimensions in distributions of Figs. 7, 8 and 9

リアプノフ指数 λ_1 が一つでも正であれば系はカオス的である¹⁰⁾。

図 3 に示すような放電点分布データからリアプノフ指数を計算した結果を図 6 に示す。リアプノフ指数 λ_1 が約 0.8 であり、正の値であることから、図 3 の放電点分布がカオス的であることを証明できた。

7. 制御への応用に関する考察

図 7, 8, 9 は休止時間が $20 \mu s$ のとき得られた安定性の異なる 3 種類の放電点分布データである。これらのデータに対して、5.2 節の方法で相関次元と埋め込み次元の関係を求めた結果が図 10 である。図 7 のような安定な放電状態のアトラクタ次元が、図 8, 9 のような不安定な放電状態よりかなり大きいので、アトラクタ次元と放電状態の間に強い相関があることが分かった。

図 7, 8, 9 は一目で安定不安定が認識できる場合の例であるが、次に一見して安定か不安定か判断

Fig. 11 Example of distribution of discharge locations ($t_o=20\mu s$)

が困難な 2 種類の放電点分布についてアトラクタ次元を求めてみた。図 11 は休止時間が $20 \mu s$ 時の放電点分布の一例であり、最初の 1000 回の放電中は加工が安定に進行しており、その後加工が偏在し不安定な状態に移った。また、図 12 は休止時間が $80 \mu s$ 時の放電点分布の一例であり、最初の

Fig. 16 Distribution of discharge locations with AC combined pulse line

Fig. 18 Distribution of discharge locations of simulation without using random number

— Fig. 14 — Fig. 15 — Fig. 16

Fig. 17 Attractor dimensions in distributions of Figs. 14, 15 and 16

8. 放電点探索アルゴリズムによる放電点分布のカオス性の考察

放電加工の放電点分布はカオスであること、つまり、放電位置が簡単な規則に基づき決定されており、放電位置の分布はカオスの様相を呈することから、放電点探索による放電加工のシミュレーションが可能であることを意味している。Kunieda ら⁵⁾⁶⁾は1)ギャップが狭く加工屑濃度が高い点の探索による放電点の決定、2)工作物と工具電極の除去、3)加工屑の発生と移動、4)工具電極の送り、のような単純なルーチンの繰り返りで放電加工のシミュレーションを行っている。このシミュレーション方法を用いて、18mm×18mmの工具電極と同じ断面を持つ工作物を加工したシミュレーションを行い、シミュレーションが定常状態に入った時の放電点分布を求めた結果を図18に示す。ここで横軸は放電回数であり、縦軸は放電面上に設定されたx,y座標上での放電位置のy座標

Fig. 19 Distribution of discharge locations of simulation using random number

Fig. 20 Attractor dimensions of simulation

である。一方で、滝田ら¹³⁾は放電の確率過程を考慮し、乱数を導入したシミュレーションも行っている。つまり、上記のシミュレーションのルーチ

Fig. 12 Example of distribution of discharge locations ($t_0=80\mu s$)

1000 回だけではなくその後も加工がずっと安定に進行している。そこで、一見安定に見える図11, 12の最初の1000回の放電点分布のアトラクタ次元を求める。図13にその結果を示す。この結果より、図11の最初の1000回のアトラクタ次元は図12のアトラクタ次元より低い、つまり図11の最初の1000回が図12よりカオスの程度が弱いことが分かった。このことより、放電点分布のアトラクタ次元から放電状態の安定性を判別でき、特に異常放電の前駆現象を把握する方法として応用の可能性が高いと考えられる。

別の例として筆者ら¹²⁾は幅が狭くピークが高い電流パルスの中に幅が長くピークが低い電流パルスを混入する異種パルス混合加工法を開発し、それにより高速な加工が可能であることを示したが、その高速化の原因については未解明であった。そこで、異種パルス混合と混合しない時の放電点分布のアトラクタ次元を調べてみた。図14にはパルス混合しない時の放電点分布、図15には単極異種パルス混合時の放電点分布、図16には両極異種パルス混合時の放電点分布のデータを示す。これらの放電点分布のアトラクタ次元を求めた結果を図17に示す。この結果より、異種パルス混合時の放電点分布のアトラクタ次元が混合しない時と比べ大きいことがわかった。つまり、異種パルス混合より系の自由度が増加し、放電点分布がより強いカオスに移り変わることによって系全体が安定状態に移行したので加工速度が増加したと考えられる。今までの異種パルス混合は2種類のパルスだけの混合であったが、さらに多くの種類のパルス

Fig. 13 Attractor dimensions in distributions of Figs. 11 and 12

Fig. 14 Distribution of discharge locations without using combined pulse line

Fig. 15 Distribution of discharge locations with DC combined pulse line

を混合することによって系全体がランダム状態に近づくので、さらに高速な加工が行えると考えられる。

ンの中の放電点決定の過程において、ギャップが狭く加工屑濃度が高いほど値が大きくなるように構成された評価関数に乱数をかけた値を新たな評価関数と定義して放電点を決定している。そのシミュレーションの放電点分布を図 19 に示す。ここで、図 18 と図 19 の放電点分布についてアトラクタ次元を計算した結果を図 20 に示す。また、参考のため、実際の放電点分布（図 7）のアトラクタ次元の結果も図 20 に示している。確率過程を考慮したシミュレーションの放電点分布のアトラクタ次元は確率過程を考慮していないシミュレーションの放電点分布のアトラクタ次元より高いことがわかった。しかし、実際の放電加工の放電点分布のアトラクタ次元と比べ、確率過程を考慮したシミュレーションの放電点分布のアトラクタ次元はまだ低過ぎることもわかった。つまり、確率過程を考慮したシミュレーションでは乱数が支配する程度が現実の加工より低いので、実際の放電加工現象をシミュレーションするには、乱数的な要素を強め、系の自由度を増やせば、シミュレーションが可能と考えられる。

9. 結論

カオス理論を用いて放電点分布を解析し、次のようなことが分かった。

- 1) 放電加工の放電点分布はカオス的である。
- 2) 放電点分布のアトラクタ次元から放電状態の安定・不安定の識別ができる。
- 3) 放電点分布が強いカオス状態になるほど加工が安定し高速な加工を行える。
- 4) 放電点分布を強いカオス状態にする一つの手段としては、異なるパルスを混合する方法が有効である。
- 5) 放電点分布のカオス性により放電点探索アルゴリズムによる放電加工のシミュレーションが可能である。また、確率過程を考慮したシミュレーションは、ギャップ分布と加工屑濃度分布から決定論的に放電位置が決まると考えたモデルより実際の放電現象を正確に表現している。

参考文献

- 1) M.Kunieda, H.Kojima: On-Line Detection of EDM Spark Location by Multiple Connection of Branched Electric Wires, *Annals of the CIRP*, 39, 1, 177 (1990)
- 2) H.Kojima, M.Kunieda, N.Nishiwaki: Understanding Discharge Location Movements During EDM, *Proc. of ISEM-X*, 144 (1992)
- 3) 小原, 奥山, 米屋, 井岡: 放電加工の放電位置検出に関する研究 (第 2 報), *電気加工学会誌*, Vol.24, No.47, 12 (1992)
- 4) N.Mohri, K.Tanaka, M.Suzuki, K.Furutani: Detection of Discharge Dispersion in Electrical Discharge Machining, *Proceedings of 3rd International Conference on Die & Mould Technology*, Taipei, Taiwan, 341 (1995)
- 5) M.Kunieda, M.Kiyohara: Simulation of Die-Sinking EDM by Discharge Location Searching Algorithm, *IJEM*, No. 3, 79 (1998)
- 6) M.Kunieda, W.Kowaguchi, T.Takita: Reverse Simulation of Die-Sinking EDM, *Annals of the CIRP*, Vol.48, 115 (1999)
- 7) 長島: カオスをとらえる, *日本物理学会誌*, 41, 19 (1986)
- 8) 長島, 馬場: カオス入門, 培風館 (1993)
- 9) 下條: カオス力学入門, 近代科学社 (1992)
- 10) M.Sano and Y.Sawada: Measurement of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series, *Phys. Rev. Lett.* 55, 1082 (1985)
- 11) J.P.Eckmann, S.O.Kamphorst, D.Ruelle and S.Ciliberto: Liapunov Exponents from Time Series, *Phys. Rev. A* 34, 4971 (1986)
- 12) 韓, 国枝: 異種パルス混合による鋼の高速低消耗加工, *精密工学会秋季大会学術講演会講演論文集*, 419 (1999)
- 13) 滝田, 国枝: 放電点探索アルゴリズムを用いた形彫り放電加工における放電集中のシミュレーション, *電気加工全国大会講演論文集*, 3 (1999)

(2000 年 7 月 21 日受付)