複曲面／ねじれ面／単曲面

館 知宏 Tomohiro TACHI

1. 図学の曲面分類

図学では、曲面を線織面（ruled surface）と線織面でないものに分ける。その線織面でないもののことを複曲面（double curved surface）と呼ぶ。線織面は一自由度のパラメータでなめらかに動く直線（母線という）の軌跡として表現できる曲面であり、粘土をびんと張った糸で切り落としてできるような形である。複曲面とは、そういった直線エレメントを持たない曲面のことで、球面などがその一例であるが、特別な作り方をしない自由曲面はほぼすべて複曲面である。線織面のほうはさらに単曲面（single curved surface）とねじれ面（拗面：ようめん, warped surface）に分類される。単曲面とは母線の動きがねじれを伴わないもので、ねじれ面はねじれを伴うものである。

この図学における曲面の分類（図1）は、単曲面と複曲面という二分類のような語の間にどちらでもない「ねじれ面」を置くので、やや居心地がわるい。しかし、古くから図法幾何学の用語として使われていて^[1]、現在まで引き継がれている^[2]。曲面の微分幾何学的性質によって単曲面とそれ以外の曲面に分類するより、曲面をいかに構成するかという観点で複曲面と線織面进行分类することは、図学的には自然ともいえる。

2. 曲率による曲面分類

一方曲面を解析する観点からは「単曲面か否か」という分類は「線織面か否か」という分類よりも本質的である。微分幾何学によれば、なめらかな（二階微分が連続な）曲面の曲がりかたは主曲率で表現できる。曲面上の一点において、法線を通る平面で曲面を切断した断面曲線の曲率を法曲率と呼ぶ。切断方向を変えれば、一般に法曲率も変化するが、この最大値と最小値のことを主曲率と呼ぶ。主曲率が二つ異なる値を持つとき、主曲率をとるとき方向（主曲率方向）は互いに直交する。

主曲率の積をガウス曲率と呼ぶ。ガウス曲率が正であれば主曲率は同符号で楕型の曲面となり、ガウス曲率が

図1 図学における曲面の分類

図2 ガウス曲率による曲面の分類

負であれば主曲率が異符号の鞍型の形状となる（図2）。ガウス曲率が零、つまり主曲率の一方が零であるような点で構成された曲面は、単曲面となる。ここでは、零の主曲率方向は直線なので、その方向を母線とする線織面である。一方、ねじれ面や複曲面はガウス曲率が非零となる。特に、ねじれ面は法曲率が正となる方向と負となる方向の境（漸近方向）に直線エレメントを持つような線織面である。したがってねじれ面の主曲率は異なる符号を持ち、ガウス曲率負の鞍型となる。

ガウス曲率は内在的な不変量である、というのがガウスの驚異の定理（Theorema Egregium）である。内在的というのは、面に沿って計った距離のみで表されるといことで、つまり面を伸び縮みさせなければ、いくら

図3 線織面の三角形分割による展開

図4 下段：一葉双曲面の分割数を増やす。上段：断面。位置では円に収束するが、無数の折りが残っている。折りに沿った周長はターゲットの円周長には収束しない

図5 折紙で表現されるねじれ面と複曲面。左：三角形分割された折り双曲放物面。中：ドーム型のテセレーション (Resch)。右：自由曲面の折紙 (著者)

曲げても不変である。だから、平面の紙を曲げてできる形はガウス曲率が零であり続けるので単曲面である。だから単曲面（と平面）は可展面（developable surface）とも呼ばれる。

ところで、曲面の空間での曲り具合を示す指標でありながら、面を曲げることによって変化しない、というのは確かに驚異である。曲面を外から眺めなくとも、曲面上に住むアリがその曲面上を歩いて距離を測ることでその空間が鞍型か碗型か単曲面なのかがわかる。なお、三次元空間に住む我々が宇宙の「曲がり具合」がわかる、というのは同じ原理である。

3. ねじれ面の可展化

ねじれ面は負のガウス曲率を持つため、通常であれば平面に展開できない。ところが、図学の展開法では、三角形分割をすることで、ありとあらゆる線織面を展開できることになっている。つまり、適当な間隔の母線で面を四角形分割し、その四角形を三角形化する。三角形は平面なのでそのストリップも可展である。これで、様々な線織面が近似的に展開できる（図3）。

では分割数を増やし、三角形を無限に細かくしていっ

図6 一枚の紙から折られた三次元ポリゴンメッシュ。左：折った形状、右：展開図

たら、曲面そのものにならないだろうか？ 実際試してみるとねじれ面と三角形ストリップとの空間中の距離は限りなく小さくなるが、表面の法線方向はいつまでも近づかない。つまり、いくら細分割しても表面はなめらかにならず、細かい無数の折りが形成される（図4）。さらに、折りに沿って計った距離は、曲面上をなめらかに進んだ距離より大きい。これは、紙を伸び縮みさせることなく「実質的に縮ませ」ているということを示している。

図7 内在的な形の作りかた。伸び量の分布を与えることで複曲面を実現する^[4]。

4. 折紙で複曲面を作る

「折り」という微分不可能な部分を加えることで、(古典的な)微分幾何学の世界で想定される可展面の枠を超えた形状を一枚の紙から作れる。これは、紙を折るだけでさまざまな立体形状を作り出せる「折紙」の造形の自由度の源である。折紙を使えば、ねじれ面だけではなく、正曲率や負曲率の点を含む複曲面でも、伸び縮みしない紙や金属板から作り出せる(図5)。ここでも、折紙テセレーションと呼ばれる折り目の繰り返しパターンを施すことで表面に実質的な縮みを加えることが最大のポイントである。

では、どんな立体形状なら一枚の紙から作れるか？与えられた立体形状からそれを折るための折り線パターンを得る問題は折紙設計と呼ばれている。著者らは、任意の多面体に対して、その形状を折紙で実現できる折りのアルゴリズムが存在するという構成的証明を得た^[3]。その実例を図6に示す。もちろん任意の曲面は三角形メッシュ分割で多面体近似できるから、任意の形状が可展面で近似できることになる。

5. 内在的な形の作りかた

人工物も生物の形も複曲面にあふれている。しかし、その作られかたは大きく異なる。我々が複曲面を作るときは主に、彫刻、塑像、打ち出し、折り、3D プリントといった外在的な方法を使う。一方で例えば生体の膜面は、その材料自体が成長して面の伸び縮みを起こすことで複曲面の形状となり、その機能を得る、ということが多い。これは驚異の定理を逆向きに用いた内在的な形の作りかたといえる。原理的には、最終形状から逆算した材料の伸び縮みの分布パターンを平坦なシートに施せば、欲しい複曲面を再現することができる(図7)。

新しいものの作りかたとして、材料自体が形を作っていく「自己組み立て」や「自己折り」のアプローチが着目されている。これはマイクロスケールや宇宙空間のように人間の手の届かない領域で形状を構築するときに力

を発揮する技術である。このような研究において、曲面の内在的性質は重要な鍵を握っている。

参考文献

- [1] Charles Davies, “Elements of Descriptive Geometry with Their Application to Spherical Trigonometry, Spherical Projections, and Warped Surfaces”, H. C. Lea (1826).
- [2] 日本図学会編, “図学用語辞典”, 森北出版株式会社, (2009).
- [3] Erik Demaine and Tomohiro Tachi, “Origamizer : A Practical Algorithm for Folding Any Polyhedron”, in 33rd International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2017), 34 : 1–34 : 16 (2017).
- [4] Yusuke Takahashi and Tomohiro Tachi, “Buckled Double-Curved Surface Using a Controlled Pattern of In-plane Strain”, the Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, vol. 56, 239 – 247 (2015).

● 2017 年 3 月 6 日受付

たち ともひろ

東京大学 大学院総合文化研究科 助教
2010 年東京大学工学系研究科建築学専攻博士課程修了(博士(工学)).
計算折紙とその工学応用の研究に従事. “Origamizer”, “Freeform Origami” などのソフトウェアを開発.
tachi@idea.c.u-tokyo.ac.jp