掛谷の針問題から見る図学と解析学とのつながり

The relationship between Graphic science and mathematical analysis in view of the Kakeya needle problem

齋藤 洋樹 Hiroki SAITO

概要

掛谷問題とは、面積 0 でありながら任意の方向の単位線分を含む不思議な集合（掛谷集合と呼ぶ）の Hausdorff 次元を問う問題である。この問題は 2 次元で解決されており、3 次元以上では部分的な解決しかされていない。本報告では最初に、掛谷集合のもととなった掛谷の針問題「単位線分を平面上で 1 回転させるのに必要な最小の面積はいくらか」という有名な問題とその解答を紹介する。これらは古くから知られる幾何の問題であるが、近年、掛谷問題が現代解析学、特に Fourier 解析に関する分野（実解析・調和解析学と呼ばれる）の諸問題と関わっていることがわかってきた。本報告の後半でこの諸問題に対する簡単な概説をする。

キーワード：平面幾何学／掛谷問題／Fourier 解析／Hausdorff 次元

Abstract

The Kakeya problem is to find the Hausdorff dimension of the Kakeya set, which is a subset in n -dimensional Euclidean space, with measure 0, containing a unit line segment in each direction. The Kakeya problem (conjecture) is that the Kakeya set must have Hausdorff dimension at least n . It was settled in the plane, $n=2$, but in higher dimensions, the problem is still open. In this paper, first we describe the original Kakeya needle problem: Find the smallest area so that a unit line segment can be rotated by 180 degrees in this domain, and give an answer of this problem. It is known as a classical and geometrical problem, but recently it has realized that this type of problem is connected to modern analysis, in particular, Fourier analysis (which is also regarded as the real and harmonic analysis). In the latter half of this paper, it will be given a brief description about these problems.

Keywords : Plane geometry / Kakeya problem / Fourier analysis / Hausdorff dimension

1. 掛谷の針問題

1917年、東北大学の掛谷宗一は「平面上で単位線分を 1 回転させるための最小の面積はいくらか」という幾何の問題を提出した。もちろん半径 $1/2$ の円内で 1 回転させることができるがこの場合の面積は $\pi/4$ である。これをさらに面積の小さな図形で実現させようというのである。図 1 は平面内で単位線分を回転できる例である。左から、1 辺 1 の正三角形を膨らませたルーローの三角形、中央の長さ 1 のデルトイド、高さ 1 の正三角形であり、面積はそれぞれ $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。

図 1 平面で 1 回転できる図形の例

この問題に対し、ロシアの数学者 Besicovitch は次のような驚くべき結論を与えた。

定理 A. 任意の数 $\varepsilon > 0$ に対し、面積が ε 未満の平面図形 E が存在し、 E 内で単位線分を 1 回転できる。

この定理が主張することを噛み砕いて言えば、「1 回転する図形の面積は『いくらでも』小さくできる」ということであり、もう少し正確に言えば、“最初に「面積を 0.01cm^2 より小さくできるか？」と問われれば、 0.01cm^2 という指定された大きさに応じて図形 E を工夫して構成し、その中で 1 回転できるようにできる”という意味である。それを先ほどは『いくらでも』と表現したのである。このことを「面積 0 の図形が構成できる」と誤解してはならない。定理 A は次の定理から導かれる。

定理 B. あらゆる方向の単位線分を内部に含む面積 0 の図形が存在する。

この定理は回転は許さないが、どのような方向の単位線分でもその内部に含むもので、面積が 0 のものがあると主張している。以下このような、「あらゆる方向の単位線分を内部に含む面積 0 の図形」を掛谷集合と呼ぶこと

にする。図1の3つの図形はもちろんすべての方向の単位線分を含むが面積は0ではないので掛谷集合とは呼ばない。

2. 掛谷集合の構成

2.1. 掛谷集合の構成法 (1) : 最初の一步

現在この不思議な掛谷集合の構成方法はいくつかの方法が知られている [1,5,6,7,8] が、ここでは、(面積0ではないがいくらでも小さく出来る) 平面内で1回転できる図形の構成法を、比較的まだ日本語で解説されていない [2] の論文に従って紹介する。

まずいくつか記号を定める。 $\varepsilon > 0$ は最初に自由に小さく与える。目標はこれよりも面積の小さい図形を構成することである。 Γ は半径1の円、 Q は適当な奇数とする。 Π は Γ と同心の正 Q 角形とする (図2)。

図2 斜線の中で1回転できる

Π の各頂点は、 C_0 から数えて“だいたい”対辺上にある頂点に向かって線を引き、 C_1, C_2 というように、 Π の内部を Q 芒星を描くようにして名前を付けていく。 C_i, C_{i+1} の延長線と円 Γ との交点を、図のように決めて、 $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ ととっていく。三角形 $A_i B_i C_i$ を J_i と呼ぶことにしよう。このとき、図の斜線をつけた図形の中で単位線分が1回転できることに注意する。例えば、最初は $C_0 C_1 A_1$ 上にあった単位線分は、黒く影を付けた中で C_1 を回転の起点として $C_2 C_1 B_1$ まで回転できる。そのあと $C_1 C_2 A_2$ までスライドさせてから、同じ要領で回転し、スライドと回転を繰り返せばよい。だが、いくら Q を大きくしても面積は小さくならず、その値は $\frac{\pi}{2}$ 付近に留まる。以下、さらに小さく変形する方法を説明する。まず図2において、影を付けた部分を取り出して考える。

図3 図2の影を取り出した図形

ただし、便宜上頂点のラベルを読み替えて、 $C_0 \rightarrow A'$, $C_2 \rightarrow B'$, $C_1 \rightarrow C$, $B_1 \rightarrow B$, $A_1 \rightarrow A$, $J_1 \rightarrow J$ とする。また、 $\Delta = A' B' C$ とする。また説明のために、図形を xy 平面にのせて、 $A' B'$ は直線 $x=0$ の上ののっていて、 C は直線 $x=\delta$ 上にあり、 AB は直線 $x=1$ の上ののっているものとする。このとき、 $\delta < 1$ であり、単位線分は C を回転の中心にして、傾きが AA' から BB' まで回転できることに注意する。また、 $A' B' C' =: \Delta$, $ABC =: J$ としよう。

2.2. 掛谷集合の構成法 (2) : Joins and Trees

図3において、 $K^{(0)} = \Delta \cup J$ とする。以下、「Joins and Trees」と呼ぶ手順を次のように定める。

図4 Joins and Trees実行後 ($m=2$)

- $m \in \mathbf{N}$ を任意に決める。
- $A' B'$ の内部に m 個の分点を任意にとり、 $C_0 = A'$, 分点を上から $C_1, \dots, C_m$. $C_{m+1} = B'$ とする。
- AB の内部に $m-1$ 個の分点を任意にとり、 $V_0 = A$, 分点を下から $V_1, \dots, V_{m-1}$. $V_m = B$ とする。
- $r = 1 - \delta$ とし、 $x = -r$ をひく。
- 各 i ($i = 0, 1, \dots, m$) に対し、 C_i を起点にして、 V_{i-1} も通る直線と $x = -r$ との交点を A_i とする。
- 各 i ($i = 0, 1, \dots, m$) に対し、 C_i を起点にして、 V_i も通る直線と $x = -r$ との交点を B_i とする。
- $T_i = C_i V_{i+1}$ とし、 $\mathcal{T} = \bigcup_{i=0}^m T_i$ を trees と呼ぶ。
- $J_i = A_i B_i C_i$ とし、 $\mathcal{J} = \bigcup_{i=1}^m J_i$ を joins と呼ぶ。
- $K^{(1)} = \mathcal{T} \cup \mathcal{J}$ とおく。

以上の手順によって、 $K^{(0)}$ から $K^{(1)}$ を構成する手順を Joins and Trees と呼ぶことにする。ここで、 $K^{(1)}$ の内部でも単位線分は傾きが AA' から BB' まで回転できる。図4でみると、 $AA' (= C_0 V_0)$ からはじめ、 $C_1 V_0$ まで回転させたら A_1 までスライドさせる。 C_1 を回転の起点として、傾きを $B_1 C_1$ まで回転させる。さらに V_1 までスライドさせ、 $C_2 V_1$ まで傾ける。これを繰り返せば、 BB' までたどり着ける。肝心なことは、この変形によって、面積が小さくなる、つまり $|K^{(0)}| > |K^{(1)}|$ となっていることである。それだけでなく、「望むだけ小さくする」ことが目標である。

2.2.1 J vs $\mathcal{J}$

図5 $|J_i|$ を計算するための図

$i=1$ に注目すると, J_1 と $C_1 V_0 V_1$ が相似であるから,
 $|A_i B_i| : |V_i V_{i-1}| = r : 1$ であり,

$$|A_i B_i| = r |V_i V_{i-1}|$$

$$\sum_{i=1}^m |A_i B_i| = r \sum_{i=1}^m |V_i V_{i-1}| = r |AB|.$$

$|J_i| = \frac{r}{2} |A_i B_i|$ であるから,

$$\sum_{i=1}^m |J_i| = \frac{r}{2} \sum_{i=1}^m |A_i B_i| = \frac{r}{2} |AB| = r |J| \quad (r < 1)$$

となる. これは, 分点の数 m に無関係に $\mathcal{J} = \bigcup_{i=1}^m J_i$ と J が比較できることになる.

2.2.2 Δ vs T

$K^{(0)}$ と $K^{(1)}$ を比較するには, 残る Δ と $\mathcal{T}$ を比較すればよい. まず最初に, $\mathcal{T}$ は Δ を含んでいるので, $|\Delta| < |\mathcal{T}|$ は間違いない. ところが, m を適切に選ぶことで, なんと $|\Delta| \doteq |\mathcal{T}|$ と限りなく近づけられることが示される. 以下にこれを説明する.

まずsprouting (発芽) と呼ばれる次の手順を説明する. 底辺が σ , 高さが h' の三角形を, 底辺が $x=0$ 上にあるように配置する. $x=h'$ との交点を V とする. さらに $x=h''$ の直線を $h' < h''$ となるようにとる (図6-1). 次に, 底辺と異なる辺を V がある方向に延長し, h'' と交差する点を V_0, V_1 とする. また, 底辺を2等分する点をとる. $\sigma_0 = \sigma/2$ である (図6-2). そして, 底辺を2等分した点と V_0, V_1 を結ぶ. σ を2等分した上側の三角形で頂点が V_0 のものを T_0 , 頂点が V_1 のものを T_1 と呼ぶ (図6-3). 以上のように, 高さ h' の三角形 T から, 底辺を2等分し, 高さ h'' の2つの三角形 T_0, T_1 を作る操作をsproutingと呼ぶ. このとき, 図のように蝶の形をしたような2つの三角形分 (影をつけた部分 (図6-4)) が, sproutingによって増加した面積となり, $T \subset T_0 \cup T_1$ となっていることに注意する.

これを踏まえて, $p \in \mathbf{N}$ をとって $\mathcal{T}_p$ を定義する. 図のように, 幅 r の部分を p 等分し, $x=\delta=h_0$ として, 順に, $x=h_1, x=h_2, \dots, x=h_p=1$ と直線に名前をつける. ここで, sproutingを高さをえつつ次のように繰り返す. あらためて最初の三角形は Δ と呼ぼう.

- Δ で h_1 の高さでsproutingして T_0, T_1 ができる.

図6-1 sprouting (1)

図6-2 sprouting (2)

図6-3 sprouting (3)

図6-4 蝶の図形

- T_0, T_1 で高さ h_2 でsproutingして, $T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11}$ の4つに増える.
- $T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11}$ で高さ h_2 でsproutingして, $T_{000}, T_{001}, T_{010}, T_{011}, T_{100}, T_{101}, T_{110}, T_{111}$ の8つに増える.

図7 $p=3$ の場合

これを続ければ, T_* の添え字の部分*が, $p-1$ 桁ならぶ三角形の集まりができる. これを番号を付け直し, $T_0, T_1, T_2, \dots, T_{2^p-1}$ とすれば, 三角形の数は 2^p 個でてくる. この集まりを $\mathcal{T}_p$ と表す. 高さが違っても1回のsproutingで増える面積はちょうど蝶の部分だけで, sproutingごとに蝶の図形には共通部分が無く, 一回につき蝶一個分増えることが図8からわかる.

図8 面積の増分は各sproutingでかぶらない

[b-I] (初回) では具体的に面積の増分を計算しよう.
1 回の sprouting で増える面積は図 6-4 の蝶の部分であるが、横幅は $2(h''-h')$ よりも小さく、縦幅は $x=h'$ と交差する縦幅で掛け算すれば大きめに見積もることができる。簡単な比の計算から、

$$\text{蝶の面積} \leq \sigma \frac{(h''-h')^2}{h''}$$

と見積もることができる。

[b-II] ($\mathcal{S}_p$ について) k -stage のときの 1 つの三角形については、底辺は

$$\sigma \longleftrightarrow 2^{-(k-1)} |A' B'|$$

と対応があり、

$$h'' - h' \longleftrightarrow \frac{r}{p}$$

と対応する。 $h'' > \delta$ であることから、

$$\sigma \frac{(h''-h')^2}{h''} \longleftrightarrow 2^{-(k-1)} |A' B'| \frac{(r/p)^2}{\delta}$$

と見積もることができる。これが k -stage では 2^{k-1} 個あり、さらに、 p 個の帯があるから、すべて合わせて、

$$\begin{aligned} |T_p \text{ の増分} | &\leq 2^{k-1} \left[2^{-(k-1)} |A' B'| \frac{(r/p)^2}{\delta} \right] \cdot p \\ &= \frac{r^2}{\delta p} |A' B'| \end{aligned}$$

となる。このことから、分割の回数 p を大きくすれば、 $\mathcal{S}_p$ による Δ からの増分は、いくらでも小さく出来ることがわかる。さらに正確に言えば、

$$|A' B'| = |AB| \frac{\delta}{r}$$

より、

$$|\mathcal{S}_p \setminus \Delta| \leq \frac{r^2}{\delta p} \cdot \frac{\delta}{r} |AB| = \frac{r}{p} |AB| = \frac{2a}{p}$$

つまり、 $\mathcal{S}_p$ と Δ の違いはほとんどないと思ってよい。

以上より、Joins and Trees によって面積が小さくなるが、 Δ と $\mathcal{S}_p$ はほとんど同じとみなせるので、減少の本質的な部分を担うのは、Joins の三角形の集まり $\mathcal{J}$ であることになる。だが、 $|\mathcal{J}| = r|J|$ 、 $r < 1$ という程度の縮小では不十分である。そこでさらに小さくする工夫が行われる。

2.3. 掛谷集合の構成法 (3) : さらに縮小

$\Delta \cup J$ の J の部分に対し、joins $\mathcal{J}$ を構成して小さくし

たが、この中にある J_i ひとつひとつに対し、さらに Joins and Trees を適用して小さくするのである。

図9 J_i に対して Joins and Trees

上記の図 9 は、最初の Joins and Trees で生成された J_i をひとつ、左側にドットで表した。その右、 $x=0$ と $x=\delta$ で囲まれた領域に Δ に対応する三角形を細かいドットで用意する。この $\Delta \cup J_i$ に Joins and Trees を適用すると、今度は右側 $x=\delta$ と $x=1$ の部分に $J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{im_i}$ と Joins が生成される。図 9 では図が小さくなって見難いので、Joins がひとつだけ (影がついた部分) になるように示した。そうして、さらに $\text{Trees}_{\mathcal{J}^{(2)}}$ と $\text{Joins}_{\mathcal{J}^{(2)}}$ が生まれる。

$$K^{(2)} = \mathcal{J} \cup \mathcal{J}^{(2)} \cup \mathcal{J}^{(2)}$$

とおく。まず $\mathcal{J}^{(2)}$ は p 等分を大きくして面積の増加をおさえることができる。また、面積を担っている Joins は 2.2.1 で計算したときと同様にして、

$$r^2 |J| = |\mathcal{J}^{(2)}|$$

となることが示される。 $r < 1$ であったから、Joins の生成を繰り返せば繰り返すほど小さくできる。これが掛谷の針問題の解答の本質である。以上をまとめると次のようになる。

- 図 1 のように半径 1 の円の内部に正 Q 角形を配置する。
- 図 1 影の部分に対して Joins and Trees を適用する。
- Trees の面積は本質的に Δ と同じと思ってよい。
- 一回の Joins で $r|J| = |\mathcal{J}|$ だけ小さくできる。
- 足りなければさらに Joins に対して Joins and Trees を適用する。
- これを必要な分だけ繰り返せば、 $r^N |J| = |\mathcal{J}^{(N)}|$ というようにいくらでも小さく出来る。

以上は図 1 の中だけでの話であるが、これが完成したところでそれを Q 回繰り返せば単位線分は 1 回転できる。

3. Hausdorff 次元

この操作に対しある種の極限をとると、「あらゆる方向の単位線分を含む面積 0 の図形が存在する」という定理 B が示される。詳細は (1) の pp.193-194 を参照されたい。さて平面上で得られたこの掛谷集合だが、3 次元空間で、残る第 3 軸方向 (高さ方向と呼ぶことにすれば)

に掛谷集合を高さ1だけ伸ばせば、3次元空間内であらゆる方向の単位線分を含む体積0の空間図形が得られる。実際、「底面積×高さ」で得られるから

$$\text{掛谷集合の面積} \times \text{高さ} = 0 \times 1 = 0$$

となり、この図形が空間内のあらゆる方向の単位線分を含むのは明らかである。さらにこの議論を高次元に拡張させ、 n 次元の掛谷集合を考えることができる。

さて、解析学では面積・体積（厳密には“測度”と呼ばれる数学概念がある）が0の集合は無視されてしまい、掛谷集合の複雑さを抽出するには面積・体積では不十分である。そこで、掛谷集合の複雑さを表す尺度は何か？という問題が提起された。それが以下に紹介する Hausdorff 次元である。まず最初に基本的な概念を導入する。 $B(x, r)$ で n 次元空間の点 x を中心とする半径 r の（開）球を表すことにする。

$$B(x, r) := \{y \in \mathbf{R}^n : |x - y| < r\}.$$

定義より、球の表面は考えない。

次に、 n 次元空間の部分集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ を任意に与えたとき、 n 次元開球の集まり $\{B(x_j, r_j)\}_{j=1}^{\infty}$ が E を覆うとき、 E の被覆 (covering) という：

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r_j).$$

このとき、被覆するために使う開球は可算個であり、位置 x_j や半径 r_j はそれぞれ自由でよい。また、 $\{B(x_j, r_j)\}_{j=1}^{\infty}$ が E の δ -被覆 (δ -covering) であるとは、ひとつひとつの開球が $r_j \leq \delta$ を満たしているときをいう。そして、 E の δ -被覆を様々取り替えて球の半径の s 乗がなるべく小さくなる値を探し、その値を $H_{\delta}^s(E)$ とかく： $E \subset \mathbf{R}^n$ に対し、

$$H_{\delta}^s(E) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} r_j^s : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r_j), r_j \leq \delta \right\}.$$

この $\inf$ という記号は下限 (infimum) と呼ばれる数学概念で、最小値と類似の概念である。このとき、 $s=n$ であれば、 E を被覆する「球の体積そのもの」で E を測ろうとしていることがわかる。

δ を小さくすると、 E を被覆する球たちの候補が少なくなり、 $\sum r_j^s$ を小さくする候補が少なくなる、つまり、 $s < t$ に対し、

$$H_{\delta}^s(E) \geq H_{\delta}^t(E).$$

そこで、

$$H^s(E) := \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(E)$$

を s 次元 Hausdorff 測度と呼ぶ。 $(s=n$ のとき、 $H^n(E)$

は Lebesgue 測度と定数倍の違いを除き一致する。)

例1. $E = \{a\} \subset \mathbf{R}^2$ と、平面上の1点を a として、非常に簡単な例ではあるが、これの s 次元 Hausdorff 測度を計算してみよう。まず1点の面積はもちろん0であるが、これは $s=2$ としたときに対応する。

これは次のように示される。任意に $\varepsilon > 0$ をとる。 $\delta^2 < \varepsilon$ となるように δ をとり、 $\{a\} \subset B(a, r)$ と開球を選ぶ。この球の半径は $r < \delta$ を満たすようにとる。そうすれば、このひとつの開球は $E = \{a\}$ の δ -被覆であり、

$$H_{\delta}^2(E) \leq r^2 \leq \delta^2 < \varepsilon$$

となる。 ε は δ に依存しないから、両辺で $\delta \rightarrow 0$ としても右辺は変化せず、

$$H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(E) \leq \varepsilon$$

となる。これが任意の ε で成立するので、 $H^s(E) = 0$ となる。この議論は $0 < s \leq 2$ に対して成り立つことが同様にしてわかる。

例2. 先ほどと同じく $E = \{a\} \subset \mathbf{R}^2$ と、平面上の1点を a として、今度は $s=0$ の場合を計算してみよう。今度は $r \leq \delta$ なる半径をどう選んでも、 $\{a\} \subset B(a, r)$ とすれば、

$$H_{\delta}^0(E) \leq r^0 = 1$$

となる。実はこの逆向きの不等号も示され、 $H_{\delta}^0(E) = 1$ 。さらに $\delta \rightarrow 0$ として $H^0(E) = 1$ も示される。この議論から、 $E_N = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ のような有限集合に対し、 $H^0(E_N) = N$ とその「個数」を表すことがわかる。だが、平面上の有限個の点集合の「面積」はもちろん0だから、 $H^2(E_N) = 0$ である。

以上の例から、Hausdorff 測度は s が変化するとその測り方を変化させ、その集合の本質をうまく取り出すことができると考えられる。もう少し計算をなしに例を挙げよう。

例3. 平面上 $\mathbf{R}^2$ 内の線分 $E = [0, 1] \times \{0\}$ は、

$$H^0(E) = \infty, H^1(E) = 1, H^2(E) = 0,$$

である。これは次のように理解される。平面上の線分を表す点集合は、「個数 ($s=0$)」は無限個あるから $H^0(E) = \infty$ 、「(我々の直感的な) 1次元の長さ」は1、「2次元の面積」でいえば0である。

これらを踏まえて集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ の Hausdorff 次元を次のように定義する。

$$\dim(E) := \inf \{s \geq 0 : H^s(E) < \infty\}$$

例4. これまでは簡単な図形で調べてきたが、複雑な図形について言及しておく。

(1) Koch 曲線の Hausdorff 次元は $\log_3 4 \approx 1.26$ 。

(2) Sierpinski のガスケットの Hausdorff 次元は
 $\frac{\log 3}{\log 2} \doteq 1.58$.

(3) Peano 曲線の Hausdorff 次元は (2) と同じく
 $\frac{\log 3}{\log 2} \doteq 1.58$.

上記はどれも有名な事実であるが、以下に (1) と (2) の図形を次頁に説明なしに掲載する。だが、(3) については画像で表現することは困難である。Peano 曲線とは 2 次元の平面であれば、単位正方形 (1 辺が 1 の正方形) を埋め尽くすような曲線である。ここで“埋め尽くす”を正確に述べるなら、『単位正方形の任意に点が、その曲線の上に乗っている』というものである。もちろん「長さ」は無量大であるが、それにも関わらず曲線であるからその「面積」は 0 となる。この図形の複雑さを表現するには、長さや面積という概念では不可能であり、他のものさしを求めたくなる考えが理解されるだろう。Hausdorff 次元はそのひとつの可能性なのである。

図10 Koch曲線 (Wikipediaから画像を引用)

図11 Sierpinskiのガスケット (Wikipediaから画像を引用)

4. 掛谷集合の Hausdorff 次元と Fourier 解析

では掛谷集合の Hausdorff 次元はいくらか？ その前に注意しておかなければならないのだが、本要旨で示した Cunningham の方法は「ひとつの」構成方法なのであって、他にも様々な方法が知られている。問題にしなければならないのは、「どのような方法で構成された掛谷集合であっても」Hausdorff 次元がさだまらなければならない。したがって、問題は、「あらゆる方向の単位線分を含む測度 0 の集合」について調べなければならない。

さて結論であるが、2 次元では Hausdorff 次元が 2 であることが Davies によって示された[3]。だが、3 次元以上の n については、Hausdorff 次元は n であろうと予想されているが、未解決問題になっている。現在の進展状況をまとめたサーベイとして、[7]、[8]を挙げるにとどめる。またこの分野の本格的なテキストとして[5]、[6]を挙げておく。この問題を解決させるために多くの技術が磨かれたが、C. Fefferman は Davies の結果を受け

て Fourier 変換の収束に関する問題を解いた ([4]) ことが契機になり、掛谷問題と Fourier 解析学が繋がったのである。これは驚くべき結果であり、関連する諸問題、Bochner-Riesz 総和法の予想、Fourier 制限問題などの解析学の諸問題に強い結びつきを持つことがわかってきた。さらに、掛谷極大作用素と呼ばれるある種の平均関数が、これらの問題を解決するために重要な役割を果たすことも明らかになり、自身の結果を含め多くの数学者が関連する結果を発表している。掛谷極大関数とは、

$$K_N f(x) = \sup_{R \in \mathcal{R}_N} 1_R(x) \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy$$

で定められる関数であり、 B_N は $n-1$ 次元で一辺が 1 の立方体、余次元で長さが N の直方体に相似なものの全体であり、 1_R は集合 R の定義関数 (R 上で 1 をとる関数) である。この掛谷極大関数の L^p 有界性は未解決問題であり、この問題が肯定的に解かれれば、掛谷予想が解かれることが示されている。自身の研究は掛谷極大関数を調べることで、掛谷問題に貢献しようとするものである。

参考文献

- [1] 新井仁之, “ルベーグ積分講義”, 日本評論者 (2003).
- [2] Cunningham, F., “The Kakeya problem for simply connected and for star-shaped sets”, *Amer. Math. Monthly*, 78 (1971), 114-129.
- [3] Davies, R. O., “Some remarks on the Kakeya problem”, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 69 no. 3 (1971), 417-420.
- [4] Fefferman, C., “The multiplier problem for the ball”, *Ann. of Math.*, 94 no. 2 (1972), 330-336.
- [5] Grafakos, L., “Modern Fourier Analysis”, volume 250 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2nd edition, (2008).
- [6] Stein, E. M., “Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals”, Princeton Univ. Press (1993).
- [7] 田中仁, “掛谷予想について”, 「数学」日本数学会, 57 no. 2 (2005), 113-129.
- [8] Wolff, T., “Recent work connected with the Kakeya problem, In: Prospects in mathematics,” Princeton, NJ, Amer. Math. Soc., Providence 1996. RI, (1999), 129-162.

●2018年3月3日受付

さいとう ひろき

日本大学理工学部一般教育

〒274-0063 千葉県船橋市習志野台 7-24-1

日本大学理工学部 8 号館 4 階 845A 室

saitou.hiroki@nihon-u.ac.jp