同一の球に外接する二つの回転錐面の相貫曲線の 分解に対する一つの初等的証明*

ハンス・ヴォグラー**

(増田 祥三 訳)***

1. 問題の設定

管継手とヴォールト形状の場合には同一の球 κ に一つずつの平行環にそって接する回転錐面あるいは回転柱面が現われることが実際に多い。このような二つの曲面 $r_i (i=1, 2)$ の完全な相貫曲線 k は二つの二重点 $D_i (i=1, 2)$ をもつ四次の空間曲線である。 D_i は r_i と κ の接触円 $b_i (i=1, 2)$ のつくる二つの交点である。なぜなら、それらの交点においては球 κ が相貫する両方の曲面 r_i に接するからである。この二重点をもつ四次の空間曲線は分解する。すなわちこの場合には二つの円錐曲線 k_1 と k_2 になる。以上に略説したようなこの情態の証明には代数幾何学からの予備知識が必要である。応用例については初等的証明が重要であり、興味がもたれる。しかしそのような証明はまだ一般に知られていないでしょう。

2. 一つの初等的証明

頂点 S_i をもつ二つの回転錐面 $r_i (i=1, 2)$ の軸 $a_i (i=1, 2)$ を平画面 π_1 におく。点 $O = a_1 \cap a_2$ は、二つの回転錐面に一つずつの平行環 $b_i (i=1, 2)$ にそって内接する一つの球 κ の中心である。 b_i は平画面に対する投射平面 $\epsilon_i (i=1, 2)$ 上にある。 r_i のりんかく母線 v_i および w_i は π_1 上にある κ のりんかく円 u_i に ϵ_i と u_i の交点 $V_i \in v_i, W_i \in w_i$ において接する (Abb. 1)。四つの交点 $1 = v_1 \cap v_2, 2 = v_1 \cap w_2, 3 = v_2 \cap w_1$ および $4 = w_1 \cap w_2$ ならびに π_1 に関して対称な接触円 b_1 と b_2 の交点 $D_i (i=1, 2)$ は二つの回転錐面の相貫曲線 k 上にある。二つの錐面は π_1 に関して対称であるから、それらの相貫曲線 k もまた対称である。したがってその平面図 k' は二重に重なり合っている。さらに他の k 上の点を求めるために中心 O をもつ補助球 $\tilde{\kappa}$ を利用する。そしてそのような補助球は π_1 上にあるりんかく円 $\tilde{u}_1$ によって定められる。適当な大きさの半径をもつように定められた球 $\tilde{\kappa}$ は r_1 および r_2 に投射平面 ϕ_i および $\psi_i (i=1, 2)$ 上にある一つずつの平行環において交わる (Abb. 1)。交点 $P' = \phi'_1 \cap \phi'_2, Q' = \psi'_1 \cap \psi'_2, R' = \phi'_1 \cap \psi'_2$ および $T' = \psi'_1 \cap \phi'_2$ は曲線 k の平面図 k' 上にある。同心円 u_1 および $\tilde{u}_1$ の初等的性質から長さに関するつぎの相等関係が成立する： $1V_1=1V_2, 2V_1=2W_2, 3W_1=3V_2$ および $4W_1=4W_2$ 。さらに V_i は ϕ'_i および ψ'_i が v_i とそれぞれ交わる二点の間を二等分する点であり、 W_i は同様に w_i との二交点の間を二等分する点である。 v_2 および w_1 上にそれぞれある $\tilde{u}_1$ の二つの弦の長さは相等しいから、 3 を中心とし ϵ_2 を ψ'_2 (あるいは ϕ'_2)へ移す中心相似によって ϵ'_1 も ϕ'_1 (あるいは ψ'_1)へ移され、それとともに $D'_1=D'_2$ は R' (あるいは Q')へ移される。したがって点 $3, D'_1=D'_2, R'$ および Q' は一つの直線 σ'_2 上にあり、また点 2 もその直線上にある。同様にして点 $1, 4, D'_1=D'_2, P'$ および T' も一つの直線 σ'_1 上にあることがわかる。したがって σ'_1 および σ'_2 をそれぞれ平面図とする平画面の投射平面 σ_1 および σ_2 は r_1 に円錐曲線 k_1 および k_2 に

* 昭和54年5月14日受付

** Hans Vogler, Institut für Geometrie an der TU Graz
Kopernikusgasse 24, A-8010 Graz/Österreich

*** 大阪大学教養部

においてそれぞれ交わり、それらの曲線は作図に基いて r_2 上にもある。 r_1 の各母線は錐面 r_2 にたかだか二点において交わり、それらの二点の一つずつが平面 σ_1 および σ_2 上にあるから、 k_1 および k_2 以外には r_1 と r_2 の共通の点は存在しない。

以上に述べた証明は、一つの回転錐面が一つの回転柱面によってとりかえられる場合にもあてはまり、そのとき回転柱面は一つの大円にそって球 κ に接する。二つの回転錐面の代りに球 κ に一つずつの大円にそって外接する二つの回転柱面をおくならば、それらの曲面の相貫曲線は分解してよく知られているように対称性から二つの楕円になる。

3. 教授法に関連して

図学の授業にも学生の興味をよびおこし、学生を励ましこの学科の内容に没頭させるような動機作用が必要である。それには学生の経験した範囲のことに結びつき、あるいは学生の志向する職業に関係がある種類の例が極めて適当している。ここに提示された初等的証明によって回転錐面および回転柱面の平面による断面の作図——その方法については、ダンデリンの球をつかうよく知られかつ同様に初等的な証明によって説明されている——を技術上重要な形状をつかって練習し、修得させることができる。したがってそのような形状は練習材料の好ましい拡大をもたらすでしょう。さらに幾何学上かつ實際上重要な一つの現象、すなわち相貫曲線の部分的構成要素への分解に対しても、この学科に関しては単に初歩の知識だけしかもたない学生にも知的に把握しうる一つの例が与えられる。授業は全範囲にわたって確実な説明を与えることができないが、応用上重要なことについては授業ですくなくとも例をあげて学生に認識させるよう試みるべきでしょう。なぜなら、そのような例はどれをとっても、必要な予備知識に

Abb. 1

欠けるために学生が完全には理解しえないにちがいない概念や方法の取扱いにおいて彼らの確信を強めるからである。

註 1. 回転錐面 *Drehkegel* は回転面である錐面、したがって直円錐の錐面である。回転柱面 *Drehzylinder* についても同様。2. 記号について：空間の点にはラテン大文字またはアラビア数字を、空間の直線、曲線にはラテン小文字を、空間の平面、曲面にはギリシア小文字が用いられる。平面図には第1投象として上述の文字の肩に' (ワン・ダッシュ) がつけられる。平面の記号に' がついているのは、その平面が投射の位置にあつて投象が直線になっていることを表わす (退化の場合)。それ以外の平面の場合や曲面は平面図でも一般に' をつけることはない。平画面 π_1 上の点、直線、曲線はそれぞれの平面図と一致するから、平面図には空間の対象の記号のみをつける。文字は通常ドイツ語の術語のイニシャルが選ばれる。たとえば二重点 *Doppelpunkt* は、D、頂点 *Spitze* は S、球の中心 *Mittelpunkt* は M となるが、ここでは O；軸 *Achse* は a、円錐曲線 *Kegelschnitt* は k、りんかく円 *Umrisskreis* は u；球 *Kugel* は κ 、錐面 *Kegel* は球との重複をさけて英語の *cone* から c に相当するギリシア語の γ をとったようである。画面 *Bildebene* あるいは *Projektionsebene* は後者から π となり、平画面 *Grundrissebene* は第1画面として π_1 である。投射平面 *Projizierende Ebene* には同義の視平面 *Sehebene* から σ が用いられる。またここには出ていないが、立面図には第2投象として" (ツウ・ダッシュ) がつけられるなどである。以上はドイツ語圏および隣接地域においても用いられるもっとも一般的な記号法である。