透視投象に関する ODAKA の方程式の 4 次元空間への拡張*

デービット W. ブリソン**

(小高 司郎 訳)***

ABSTRACT

This paper presents an extension of Shiro Odaka's equations for perspective projection to spaces of more than three dimensions. Diagrams are presented to demonstrate the graphics involved.

序文

4 次元またはそれ以上の多次元図形を 2 次元上に表わす場合の基本問題は、4 次元空間が 3 次元の切断面をもつという事実である。これはなにを意味するかというと、もし超立方体のような 4 次元図形が 1 点に投象される場合、ある平面が投射線の全部ではないが、何本かをささげるため、一段階の投象ではその図形の 2 次元投象をつくる方法がないということである。そこで 4 次元図形のいわゆる“透視投象”が 2 次元上に作られるときは、これらはつぎのような 2 段階の投象からなる。すなわち、まず図形は 1 点に投象され、それから 3 次元断面が得られ、その 3 次元断面が一点に投象され、その 2 次元断面が所期の投象となるのである。このようにして超立方体の透視投象による投象が A. Michael Noll, またその後ブラウン大学の Tom. Banchoff と Charles Strauss によってコンピュータ作図で示された。

従って Odaka の方程式は 4 次元図形の 3 次元表示、あるいは 5 次元図形の 4 次元表示等に数学的に拡張して応用できるのである。

4 次元図形を 2 次元上へ透視投象する場合、先に述べたように必ず 2 個の独立したステーションポイントが残る。それゆえに Odaka が述べているように超立方体の 1 個の胞体とその立方体の 1 つの透視投象とみなすこと、またさらに超立方体、すなわち Odaka の方程式に従う各々の胞体に、第 4 番目の任意の消点を導入することが必要である。このようにすべての附加次元には付加的な任意の消点を加えることが必要である。

超立方体の透視図表示への ODAKA の方程式の基礎的応用について

次の方程式は 1978 年国際図学会議の議事録にある透視投象に関する Odaka の方程式である。

$$\frac{a^2 - ca \cdot \cos \beta - ab \cdot \cos \gamma + bc \cdot \cos \alpha}{b^2 - ab \cdot \cos \gamma - bc \cdot \cos \alpha + ca \cdot \cos \beta} = \left(\frac{e}{d} \cdot \frac{a-d}{b-e} \right)^2,$$

$$\frac{b^2 - ab \cdot \cos \gamma - bc \cdot \cos \alpha + ca \cdot \cos \beta}{c^2 - bc \cdot \cos \alpha - ca \cdot \cos \beta + ab \cdot \cos \gamma} = \left(\frac{f}{e} \cdot \frac{b-e}{c-f} \right)^2,$$

$$(\alpha + \beta + \gamma = 4R\angle)$$

* 昭和54年11月26日受付

** David W. Brisson, Rhode Island School of Design
Box 85, Rehoboth, Mass. 02769 / U. S. A.

*** 神戸大学教養部

Fig 1 は彼の論文“透視投象の基礎方程式とその応用”の中にある図の写しである。Fig 2 はその投象を超立方体の4消点“透視投象”に拡張したものである。点 m は Odaka の方程式の中の3つの変数 a, b, c のうちのどれとも置き代えることができることに注意されたい。さらに4つの点 a, b, c, m の相対的位置関係は完全に独立した、すなわち1つは4次元空間に、他の1つは3次元空間にある2つのステーションポイントの特定の位置に依存することにも留意して欲しい。2つのステーションポイントが全く一致するという特別な場合が存在するが、この場合、投象図は3次元においてはただ一つの立方体となり、第4番目の消点は存在しない。

この超立方体の各々の胞体は3消点透視図として描かれたものであり、それらは全部で8個ある。その各々の胞体は別々の3次元空間とみなせるであろう。従ってどの胞体もはっきりした投象図で示すことができる。そのうちいくつかは他のものに比べて極端に違っているが、しかし全体としてはまとまっている。

Odaka の方程式から誘導される残りの式も4つの点を同時に順次に3つづつとるという形で個々の3消点透視図法に応用することができる。

結論

上記の方法は座標軸の2つを任意に想定する場合は特に興味深い、そしてこの場合は3次元における透視投象法では表現できない無限大を含む射影幾何学的概念の多くの図的表現が可能である。

Fig. 1

Fig. 2

David W. Brisson氏の紹介

David W. Brisson 氏は1930年 Mass. 州の Cambridge に生まれました。同じ Mass. 州の Rehoboth に家族3人で住んでいます。現在は Rhode Island 州の首都 Providence の Rhode Island School of Design の Assoc. Prof. です。

彼の研究は視覚技術の分野です。過去25年間はデザインを教え、最近の10年間は数学的概念の視覚化の研究に従事しており、特に多次元図学に関する論文が多く、その図式表示に関しては投象論的に彼独得のやり方が含まれているのが特長です。

彼は The American Society for Engineering Education の Engineering Design Graphics Division に所属しており、アメリカにおける多次元図学の分野での著名な一人です。私は1978年、バンクーパーで開かれた国際図学会議での接触以来、論文を交換したり、著書を貰ったりなどして現在に及んでおります。彼は一昨年の秋に来日したことがあります。

この小論文は昨年6月に彼から私のところに送られてきたもので、日本語に翻訳の上日本図学会誌に掲載の希望が述べられていました。