斜投影における軸測軸系の変動範囲*

竹 山 和 彦**

まえがき

斜投影において、空間の互いに直交する3直線の像すなわち軸測軸の縮率 e_1, e_2, e_3 及び画面と投射線の交角 ($90^\circ - \phi$) の間に次式が成立する。

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 2 + \tan^2 \phi \quad (1)$$

しかし(1)式は投射線と画面の交角及び軸測軸の縮率の関係を総合して表したものであって、それぞれの軸の縮率及び軸測軸の間の角は如何なるものであるかは明確でない。

著者は前論文¹⁾において、平行投影の軸測軸を、画面に垂直な直線と投射線それぞれの方向余弦により表し、画面上の任意の直線を共有する平面束に投影される軸測軸の計算式を導き、等測投影の例によって軸測軸の一軸を共有する平面束に投影される軸測軸の変化について考察した。以上のように、画面上の直線を軸として画面を回転する方法はある特定の方向に関する投射線の傾角の変化による軸測軸の変化を知るには便利であるが、画面と投射線の交角が一定であるときに軸測軸が変化する状況を明確に示すことは困難である。

本論文は、前論文が空間の直交座標系と投射線の関係を固定して画面と投射線の交角を変化させたのに対し、原点を通る投射線を軸として空間の直交座標系を回転させ、投射線の傾角が一定である場合の斜投影における軸測軸の変動範囲を明確に示すものであり、前論文と相まって平行投影の軸測軸の全貌を明らかにするものである。

投射線となす角が一定な直線の縮率

Fig. 1 は一対の正投影と、立面図が端形図 s' で表される平面 S の実形(副投影, 左上の図)を表したものである。図の如く Y 軸を基線の方に一致させ、 Z 軸を平

Fig.1

* 昭和58年7月9日受付

** 神戸大学

画面に垂直にして直交座標系 $O-XYZ$ を設け、 Z 軸上の一点 $\bar{O}$ を通り Z 軸との交角が α である直線 $\bar{O}P$ を Z 軸 ($\bar{O}O$) を軸として回転させ、 Z 軸すなわち $\bar{O}O$ の方向へ平行投影して平面 S に生ずる直線 $\bar{O}P$ の像の縮率について考える。

点 P が Y 軸上にあるときを $\bar{P}$ とし $\bar{O}P$ と平面 S の交点を $\bar{Q}$ とする。 $O\bar{Q}$ は平面 S の最大勾配を表す直線 (最大勾配線) で $\angle \bar{Q}O\bar{P}$ は平面 S の水平傾角 ϕ (平画面と平面 S の交角, したがって投影線と平面 S の交角は $90^\circ - \phi$ である) を表す。いま $\triangle \bar{O}OP$ の $\bar{O}O$ を軸とする回転角 θ を $\triangle \bar{O}OP$ から反時計回りに測るものとし、 $\bar{O}O$ の長さを h とすれば、 $\bar{O}P$ と平面 S の交点 $\bar{Q}$ の座標 X_q, Y_q, Z_q は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} X_q &= \frac{-h \sin \theta}{\tan \phi \cos \theta + \cot \alpha}, \quad Y_q = \frac{h \cos \theta}{\tan \phi \cos \theta + \cot \alpha} \\ Z_q &= \frac{h \tan \phi \cos \theta}{\tan \phi \cos \theta + \cot \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

したがって直線 $\bar{O}Q$ の像 OQ の縮率 $e (= OQ / \bar{O}Q)$ は次式で表される。

$$e = \sin \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \phi \cos^2 \theta} \quad (3)$$

点 P が平画面上を O を中心とする円運動を行うとき点 Q は図の如く楕円運動を行うが、上式によって明らかな如く縮率 e は回転角 θ にともなって連続的に変化し、中心 O に関して対称である。縮率 e の最大値は像 OQ が平面 S の最大勾配線 ($Q = 0^\circ, 180^\circ$) に一致したときで、

$$e_{\max} = \sin \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \phi} \quad (4)$$

となり、縮率 e の最小値は像 OQ が平面 S に含まれる水平線 ($Q = 90^\circ, 270^\circ$) に一致したときで、次式で表され正軸測投影の縮率に等しい。

$$e_{\min} = \sin \alpha \quad (5)$$

投影線の傾角が一定である斜投影の軸測軸

Fig. 2 は Fig. 1 と同様に、一対の正投影と、立面図が端形図 s' で表される平面 S の実形 (副投影, 左上の図) を表したものである。いま空間の直交座標系 $\bar{O}-XYZ$ の $\bar{X}$ 軸を立面面に平行な位置に設け、 $\bar{O}$ から平画面へ下した垂線の足を O とし、 $\bar{O}O$ を軸として空間の直交座標系を θ だけ回転させた $\bar{O}-XYZ$ の $\bar{O}O$ を投影線とする平面 S への平行投影を考える。このとき平画面の跡三角形 $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ は点 O を中心として回転して $\triangle abc$ へ移動 ($\triangle abc \equiv \triangle \bar{a}\bar{b}\bar{c}$) し、平面 S に生ずる跡三角形 $\bar{d}''\bar{e}''\bar{f}''$ は $\triangle d''e''f''$ へ移動する。

平画面に生ずる正軸測軸系を $O-xyz$, 縮率を e_x, e_y, e_z , 軸測軸の間の角を $\theta_{xy}, \theta_{yz}, \theta_{zx}$, とし、空間の直交座標系

Fig. 2

$\bar{O}-XYZ$ の X, Y, Z 各軸と投射線のなす角を α, β, γ , 投射線の方角余弦を ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z とすれば, 正軸測軸系における諸量は θ に関係なく次式で表される。

$$\ell_x = \cos \alpha, \quad \ell_y = \cos \beta, \quad \ell_z = \cos \gamma \quad (6)$$

$$e_x = \sin \alpha, \quad e_y = \sin \beta, \quad e_z = \sin \gamma \quad (7)$$

$$\cos \theta_{xy} = -\cot \alpha \cot \beta, \quad \cos \theta_{yz} = -\cot \beta \cot \gamma, \quad \cos \theta_{zx} = -\cot \gamma \cot \alpha \quad (8)$$

平面 S に生ずる斜軸測軸系 ($\bar{O}-XYZ$ の $\bar{O}O$ を投射線とする平面 S への投影) を $O-uvw$, 縮率を e_u, e_v, e_w , 軸測軸の間の角を $\theta_{uv}, \theta_{vw}, \theta_{wu}$ とし, 平面 S に垂直な直線と空間の直交座標系 $\bar{O}-XYZ$ の各軸となす角を α', β', γ' , 平面 S に垂直な直線の方角余弦を m_x, m_y, m_z とすれば, 前節と同様にして, 斜軸測軸系における諸量は θ の関数として次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \cos \alpha' = \sin \alpha \cos \phi (\tan \phi \cos \theta + \cot \alpha) \\ m_y &= \cos \beta' = \sin \beta \cos \phi [\tan \phi \cos (\theta + \theta_{xy}) + \cot \beta] \\ m_z &= \cos \gamma' = \sin \gamma \cos \phi [\tan \phi \cos (\theta - \theta_{zx}) + \cot \gamma] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} e_u &= \sin \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \phi \cos^2 \theta} \\ e_v &= \sin \beta \sqrt{1 + \tan^2 \phi \cos^2 (\theta + \theta_{xy})} \\ e_w &= \sin \gamma \sqrt{1 + \tan^2 \phi \cos^2 (\theta - \theta_{zx})} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_{uv} &= \frac{\cos \theta_{xy} + \tan^2 \phi \cos \theta \cos (\theta + \theta_{xy})}{\sqrt{(1 + \tan^2 \phi \cos^2 \theta) [1 + \tan^2 \phi \cos^2 (\theta + \theta_{xy})]}} \\ \cos \theta_{vw} &= \frac{\cos \theta_{yz} + \tan^2 \phi \cos (\theta + \theta_{xy}) \cos (\theta - \theta_{zx})}{\sqrt{[1 + \tan^2 \phi \cos^2 (\theta + \theta_{xy})] [1 + \tan^2 \phi \cos^2 (\theta - \theta_{zx})]}} \\ \cos \theta_{wu} &= \frac{\cos \theta_{zx} + \tan^2 \phi \cos (\theta - \theta_{zx})}{\sqrt{[1 + \tan^2 \phi \cos^2 (\theta - \theta_{zx})] (1 + \tan^2 \phi \cos^2 \theta)}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

投射線と画面の交角が一定な斜軸測投影の縮率の変動は, 前節においてすでに述べた通りである。軸測軸の間の角は(11)式より明らかなように, 回転角 θ に伴って連続的に変化し, 原点 O に関して対象である。その最大値及び最小値を θ_{uv} について示せば

$$\cos (\theta + \theta_{xy} / 2) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \theta = 90^\circ - \theta_{xy} / 2 \quad \text{のとき最大で}$$

$$\theta_{uv \max} = \cos^{-1} \frac{\cos \theta_{xy} (2 + \tan^2 \phi) - \tan^2 \phi}{(2 + \tan^2 \phi) - \cos \theta_{xy} \tan^2 \phi} \quad (12)$$

となり, $\cos (\theta + \theta_{xy} / 2) = 1$ すなわち $\theta = -\theta_{xy} / 2$ のとき最小で

$$\theta_{uv \min} = \cos^{-1} \frac{\cos \theta_{xy} (2 + \tan^2 \phi) + \tan^2 \phi}{(2 + \tan^2 \phi) + \cos \theta_{xy} \tan^2 \phi} \quad (13)$$

となる。

以上を要約すると, 投射線の傾角が一定である斜投影の軸測軸は, 空間の直交座標系の原点を通る投射線を軸とする回転に伴って連続的に変化し, 縮率は軸の方向が投射線の正射影の方向に一致したとき最大となり, 投射線の正射影に直交する方向に一致したとき最小となる。軸測軸の間の角はその角の二等分線の方向が投射線の正射影の方向に一致したとき最小となり, 投射線の正射影に直交する方向に一致したとき最大となる。

計算例

空間の直交座標系 $\bar{O}-\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ の $\bar{O}$ を頂点とする直角三面角の軸を投射線とする平行投象の場合について軸測軸の変動する様相を示す。

このとき、直投象は等測投象を与える。前節と同様に投射線と $\bar{X}$ 軸で決定される平面を画面の最大勾配線の方角にとり、その位置からの投射線を軸とする回転角 θ と、 X 軸の像 u 軸の縮率 e_u 及び X 軸と Y 軸の像すなわち u 軸と v 軸の間の角 θ_{uv} の関係を、画面に垂直な直線と、投射線のなす角 ϕ （直投象の場合の画面と斜投象の場合の画面との交角）をパラメータとして Fig. 3 及び Fig. 4 に図示した。

前論文では、等測投象の一軸（ Z 軸）を軸として画面を回転した場合（回転角 ϕ 、前論文では θ ）について図示したが、本計算例では画面と投射線の交角が一定（ $90^\circ - \phi$ ）の場合の軸測軸の全貌を示したものであって、縮率及び軸測軸の間の角の最大値から最小値まで図示されている。前論文の θ は本論文の ϕ に対応し、前論文の e_{x3} 、 e_{y3} は本論文の e_u の $\theta = 30^\circ$ の場合に、前論文の θ_{yz3} 、 θ_{zx3} は本論文の θ_{uv} の $\theta = 90^\circ$ の場合にそれぞれ相当する。

この計算例から、画面の垂線が投射線となす角が小さい間は、軸測軸の直投象からの偏倚は小さいことがわかる。

参考文献

- 1) 竹山和彦：平行投象の軸測軸に関する研究，図学研究，第32号，1983. 3

補遺

Fig. 2 の平面 S に生ずる軸測軸 u , v , w の水平傾角 (平画面との交角) をそれぞれ ϕ_u , ϕ_v , ϕ_w とおくと

$$\left. \begin{aligned} \tan \phi_u &= \tan \phi \cos \theta \\ \tan \phi_v &= \tan \phi \cos (\theta + \theta_{xy}) \\ \tan \phi_w &= \tan \phi \cos (\theta - \theta_{zx}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

なる関係があるので, (10), (11) 式は次式の如く簡単に表現できる。

$$e_u = e_x / \cos \phi_u, \quad e_v = e_y / \cos \phi_v, \quad e_w = e_z / \cos \phi_w \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_{uv} &= -\frac{\cos \alpha \cos \beta}{e_u e_v} + \sin \phi_u \sin \phi_v \\ \cos \theta_{vw} &= -\frac{\cos \beta \cos \gamma}{e_v e_w} + \sin \phi_v \sin \phi_w \\ \cos \theta_{wu} &= -\frac{\cos \gamma \cos \alpha}{e_w e_u} + \sin \phi_w \sin \phi_u \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

以上の式は, 斜軸測軸が正軸測軸の平行投象であることを表すものである。

また(6), (7), (9)式から

$$\left. \begin{aligned} e_x \tan \phi \cos \theta &= m_x / \cos \phi - \ell_x \\ e_y \tan \phi \cos (\theta + \theta_{xy}) &= m_y / \cos \phi - \ell_y \\ e_z \tan \phi \cos (\theta - \theta_{zx}) &= m_z / \cos \phi - \ell_z \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

なる関係があつて(10), (11)式は前論文の式と一致する。

その他

$$e_u^2 + e_v^2 + e_w^2 = 2 + \tan^2 \phi$$

$$\ell_x m_x + \ell_y m_y + \ell_z m_z = \cos \phi$$

から, 以下の式が成立する。

$$e_x^2 \tan^2 \phi_u + e_y^2 \tan^2 \phi_v + e_z^2 \tan^2 \phi_w = \tan^2 \phi$$

$$e_x^2 \cos^2 \theta + e_y^2 \cos^2 (\theta + \theta_{xy}) + e_z^2 \cos^2 (\theta - \theta_{zx}) = 1$$

$$\sin 2 \alpha \tan \phi_u + \sin 2 \beta \tan \phi_v + \sin 2 \gamma \tan \phi_w = 0$$

$$\sin 2 \alpha \cos \theta + \sin 2 \beta \cos (\theta + \theta_{xy}) + \sin 2 \gamma \cos (\theta - \theta_{zx}) = 0$$

Variation-Range of Axonometric Co-ordinate System in Oblique Projection

Kazuhiko TAKEYAMA

In the parallel projection, the distortions of the oblique ones to the orthogonal projection can be described by the angle made when projecting lines and image plane cross. This paper shows the variation-range of the axonometric co-ordinate system, consisting of the image unit and the angle of adjacent image axes, in the case of the oblique projection in which the angle made by the projecting line and the image plane is constant.