罫線を用いる軸測投影図の軸と罫線の作図*

—— 太田・南の軸測図法 ——

竹 山 和 彦**

まえがき

太田・南両氏の「軸測投影図を罫紙に描く方法」¹⁾は、軸測軸 X , Y , Z の原点 O からそれぞれの距離が ℓ , m , n なる目盛点 L , M , $-N$ が同一直線上にある場合の正軸測投影を罫紙を利用して簡便に描く方法を示されたものであり、すぐれた着想である。

しかし、示された作図法は ℓ , m , n の比を与えて定規を作成し、その定規によって軸測軸と罫線を求める方法であって、予め作成された定規を使用するならば簡便に描けるとしても、定規の作成から始める場合にはそれ程簡便ではない。この方法は、斜投影であれば、与えられた罫紙に任意に軸測軸と L , M , N の目盛りを選ぶことができ、簡便に利用できるため、むしろ斜投影向きの作図法であるが、直投影においても、もっと自由に（定規を作成しないで）軸測軸と罫線が得られるならば広く利用されるものと思われる。本論文では計算によって軸測軸と罫線を作図する方法を示すとともに、その前提となる正軸測投影法の軸測軸の作図法について解説する。このような軸測軸の作図法の解説は、いわゆる計算機図学への橋渡しとして、積極的に教育の場へ採り入れなければならないと考える。

1. 投射線の方向が与えられた場合の正軸測軸の作図

物体に固有な直交座標系 $\bar{O}-\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ において、投射線の方向が方位角 θ と俯角 γ' （天頂角 $\gamma=90^\circ-\gamma'$ ）で与えられた場合の軸測軸の作図は、すでに図形科学ハンドブックに示してある。²⁾ここでは、空間の3次元直交座標系が直投影という手段で、画面上の2次元直交座標系 $O-xyz$ に変換されるという観点から軸測軸の作図法について述べる。

Fig. 1は空間の直交座標系 $\bar{O}-\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ とその原点を通る投射線 R （方位角 θ , 俯角 γ' ）, R に垂直な画面（跡3角形 ABC ）, 軸測軸 $O-XYZ$ 及び画面上の2次元直交座標系 $O-xyz$ （ z 軸は軸測軸の Z 軸に重ねてある）を示したものである。空間の単位点 $\bar{I}$, $\bar{J}$, $\bar{K}$ の直投影である軸測点 I , J , K が求まれば軸測軸は決定される。 I , J , K は画面の座標系で $I(iy, iz)$, $J(jy, jz)$, $K(ky, kz)$ で表されるから iy, iz, jy, jz, ky, kz の6つの量を知れば良い（この場合 $ky=0$ である）ことになる。

Fig. 2(a)は画面を正面から見た図で跡3角形 ABC の垂心 O が軸測軸の原点 O であり、軸測軸 X, Y, Z はそれぞれ OA, OB, OC の方向に一致する。同図には Z 軸を含み画面に垂直な $\triangle C\bar{O}F$ の実形が CF を軸として画面に転倒して示してある。 Z 軸の単位点 $\bar{K}$ から Z 軸に垂線を下ろして Z 軸の軸測点 K が求まる。 K の画面上の座標は $(0, kz)$ である。

Fig. 2(b)は $\bar{O}-\bar{X}\bar{Y}$ 平面の実形（ $\triangle\bar{O}AB$ ）を AB を軸として転倒して描いたものである。ただしFig. 2(a)に重ねないで下方に平行移動して示してある。 $\bar{X}, \bar{Y}$ 軸の単位点 $\bar{I}, \bar{J}$ からFig. 2(a)の Z 軸に平行な直線と X, Y 軸との交点が軸測点 I, J である。 I, J の画面上の座標は図に示したように $(iy, iz), (jy, jz)$ である。さらにFig. 2(b)にはFig. 2(a)に示した $\triangle C\bar{O}F$ を $\bar{O}F$ を重ねて図示してある。この図は $\bar{O}F$ を基線として左から見るならば、空間の直交座標系 $\bar{O}-\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ の平面図と立面図になっていることが理解されるであろう。

* 昭和59年11月11日受付

** 神戸大学

Fig.1

$$\begin{aligned} |iy| &= I_0 \bar{I}, & |iz| &= I_0 I_1, \\ |jy| &= J_0 \bar{J}, & |jz| &= J_0 J_1, \\ |ky| &= 0, & |kz| &= K_1 \bar{K}, \end{aligned}$$

であることが判る。したがって軸測軸を求めるためにはFig. 2 (b) の作図をすれば必要な量はすべて求まり、画面上の直交座標系 $O-xyz$ 上に点 I, J, K をプロットすればよいことになる。

Fig. 2 (a) の軸測図が物体の立面図とすれば同図中の $\triangle C \bar{O} F$ は物体の側面図を描くときの軸測軸系である。Fig. 2 (c) に物体の平面図を描くときの軸測軸系を示した。この場合さらに軸測点 I, J, K の x 座標 ix, jx, kx が必要で、Fig. 2 (b) から

$$|ix| = \bar{O}I_1, \quad |jx| = \bar{O}J_1, \quad |kx| = \bar{O}K_1$$

である。またFig. 2 (a), (b) から

$$\begin{aligned} ix &= \cos\theta \cos\gamma', & iy &= -\sin\theta, & iz &= -\cos\theta \sin\gamma' \\ jx &= \sin\theta \cos\gamma', & jy &= \cos\theta, & jz &= -\sin\theta \sin\gamma' \\ kx &= \sin\gamma', & ky &= 0, & kz &= \cos\gamma' \end{aligned}$$

であることがわかる。

これははじめに画面の直交座標系 $O-xyz$ (xy 面が平面図, yz 面が立面図, zx 面が側面図) と物体の直交座標系 $\bar{O}-\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ の x と $\bar{X}$, y と $\bar{Y}$, z と $\bar{Z}$ をそれぞれ一致させておき、次に物体の直交座標系を z 軸の正の方向から見て時計廻りに方位角 θ だけ回転し、さらに y 軸の正の方

Fig.2

向から見て反時計廻りに俯角 γ' だけ回転した場合の次式

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \gamma' & 0 & \sin \gamma' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma' & 0 & \cos \gamma' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \gamma' & \sin \theta \cos \gamma' & \sin \gamma' \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \gamma' & -\sin \theta \sin \gamma' & \cos \gamma' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

にそれぞれ $I : (\bar{X} = 1, \bar{Y} = 0, \bar{Z} = 0)$,

$J : (\bar{X} = 0, \bar{Y} = 1, \bar{Z} = 0)$,

$K : (\bar{X} = 0, \bar{Y} = 0, \bar{Z} = 1)$

を代入して得られる値に一致する。

2. 罫線の計算式

空間の直交座標系 $\bar{O}-\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ の3軸の単位点 $\bar{I}$, $\bar{J}$, $\bar{K}$ の投射線 R の方向 (方位角 θ , 天頂角 γ) への直投影 I , J , K の画面上の2次元直交座標系 $O-yz$ (z 軸は軸測軸 Z に一致させてある) における (y , z) 座標は次式で表される。

$$\begin{aligned} I &: (-\sin\theta, -\cos\theta\cos\gamma) \\ J &: (\cos\theta, -\sin\theta\cos\gamma) \\ K &: (0, \sin\gamma) \end{aligned} \quad (1)$$

$\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ 軸のそれぞれ原点 O からの距離が ℓ , m , n なる点を $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ とし, その直投影をそれぞれ L , M , N とすると, 直線 LM の方程式は

$$\frac{y - (-\ell \sin\theta)}{m \cos\theta - (-\ell \sin\theta)} = \frac{z - (-\ell \cos\theta \cos\gamma)}{-m \sin\theta \cos\gamma - (-\ell \cos\theta \cos\gamma)}$$

から次式で表される。

$$z (\ell \sin\theta + m \cos\theta) = y (\ell \cos\theta - m \sin\theta) \cos\gamma - \ell m \cos\gamma \quad (2)$$

直線 LM 上に Z 軸の $-N$ なる点が存在する場合の条件は (2) 式に

$$y = 0, z = -n \sin\gamma \quad (3)$$

を代入して次式で表わされる。

$$\ell \sin\theta + m \cos\theta = \frac{\ell m}{n} \cot\gamma \quad (4)$$

(4) 式は太田・南両氏の式と一致する。この式を (2) 式に代入して罫線の方程式は

$$\begin{aligned} z \frac{\ell m}{n} \cot\gamma &= y (\ell \cos\theta - m \sin\theta) \cos\gamma - \ell m \cos\gamma \quad \text{から,} \\ z &= y \left(\frac{n}{m} \cos\theta - \frac{n}{\ell} \sin\theta \right) \sin\gamma - n \sin\gamma \end{aligned} \quad (5)$$

となる。したがって, 罫線と y 軸のなす角 ϕ と罫線の間隔 d は次式で表される。

$$\tan\phi = \left(\frac{n}{m} \cos\theta - \frac{n}{\ell} \sin\theta \right) \sin\gamma \quad (6)$$

$$d = n \sin\gamma \cos\phi \quad (7)$$

(4) 式において

$$\ell / \sqrt{\ell^2 + m^2} = \cos\delta, m / \sqrt{\ell^2 + m^2} = \sin\delta \quad \text{とおくと}$$

$$\sin\theta \cos\delta + \cos\theta \sin\delta = \sin(\theta + \delta) = \frac{\ell m}{n \sqrt{\ell^2 + m^2}} \cot\gamma \quad \text{から}$$

$$|\cot\gamma| \leq \frac{n \sqrt{\ell^2 + m^2}}{\ell m} \quad (8)$$

ℓ , m , n , θ を与えれば (4) 式から γ が求まるが, ℓ , m , n , γ を与える場合, それは (8) 式を満足しなければならない。

計算例

$$\ell = 3, m = 2, n = 1 \text{ とする。}$$

(8) 式より, $\gamma \geq 58.997^\circ$ でなければならない。

いま, $\theta = 30^\circ$ とすると

$$\gamma = 61.690^\circ (> 58.997^\circ), \phi = 13.197^\circ, d = 0.857$$

$$iy = -\ell \sin\theta = -1.5, iz = -\ell \cos\theta \cos\gamma = -1.232$$

$$jy = m \cos\theta = 1.732, jz = -m \sin\theta \cos\gamma = -0.474$$

3. 作 図 法

(4) 式を満足する ℓ , m , n , θ , γ による作図を示す。

作図1 自分で罫線を作る場合 (Fig. 3)

- (1) 製図面上に直交座標軸 $O-yz$ を設ける。
- (2) $L(-\ell \sin \theta, -\ell \cos \theta \cos \gamma)$, $M(m \cos \theta, -m \sin \theta \cos \gamma)$ なる点を求める。
- (3) このとき、軸測軸の X , Y , Z 軸はそれぞれ OL , OM , z 軸に一致し、 LM が罫線である。
- (4) LM と z 軸の交点が Z 軸の $-N$ なる点であり、罫線の間隔 d は原点 O から LM へ下した垂線の長さに等しい。

作図2 既存の罫線を利用して、図の大きさを変える場合 (Fig. 4)

- (1) 罫線上の一点を原点 O とし、図の如く罫線と $-\phi$ なる角をなす直線を y 軸として、直交座標 $O-yz$ を設ける。
- (2) 作図1と同様にして、軸測軸の方向を定める。
- (3) このとき、与えられた罫線と X 軸, Y 軸との交点 C , D をそれぞれ L , M とみなして作図する場合、原点 O から罫線 CD までの距離を d' とすると、描かれる図は真の軸測投象図の d' / d 倍である。

最近、モンジュ図学と計算機図学とを対比して述べられることが多い。しかしこのような分類は不適当であり、著者は以前この点に関して不満を述べた。³⁾ 図学では「座標」と「投影」という概念が基礎になっており、もっと「座標」を積極的に取り入れなければならないと考えている。本論文はその積りで書いたものである。しかし、自身は、第1節の説明より図形科学ハンドブックの図6. 10に示した方法²⁾の方が優れていると思う。しかし、そこでは軸測軸と画面上の2次元直交座標系との関係を示していない。それをFig. 5に示す。図中 $\bar{X}'$ $\bar{Y}'$ $\bar{Z}'$ は空間の座標系の側面図である。大きな円は単位円であり、小さな円は $\bar{X}\bar{Y}$ 平面上の単位円が画面に対して傾斜しているために楕円になるが、その楕円作図のための短軸補助円である(ここには楕円は描いていない)。この短軸補助円の半径は $\bar{K}'$ から y 軸に垂線(図中の点線)を下ろして求められる。したがって $\bar{X}'$ $\bar{Y}'$ は不必要であるが理解をたすける意味で記入した。罫線を求めることは「座標」の概念を使用すればすこぶる簡単であり、太田・南両氏の軸測図法が広く利用されることを期待したい。

Fig. 5

- 1) 太田英一, 南和一郎: 軸測投影図を罫紙に描く方法, 図学研究 第34号, 7~10頁
昭和59年3月
- 2) 竹山和彦: 正軸測投影法, 図形科学ハンドブック, 241~255頁, 森北出版
昭和55年6月
- 3) 竹山和彦: 図学に新しい風を, 図学研究 第26号, 27~30頁, 昭和55年3月

Construction of the Axes and Parallel Lines of the Axonometry Using Ruled Papers — Ohta and Minami's Axonometry —

Kazuhiko TAKEYAMA

The drawing method of axonometry devised by Mr. Ohta and Mr. Minami is convenient. However usage of some special scales for the drawing is necessary. The author proposes the more handy method to construct the axes and parallel lines for the axonometry on the basis of certain calculations.