離散点で傾きが与えられたときの双一次パッチによる曲面形状決定法*

内 山 知 実**
峯 村 吉 泰**

1. まえがき

曲面の構成やモデリングでは、曲面の一部を小曲面すなわち曲面パッチとして表し、これら複数のパッチを接続することにより所望の全曲面を表現する。この方法には、曲面補間法とガイドネットによる方法がある¹⁾。曲面補間法では、パッチの隅や境界における曲面の座標のほか、高次パッチではさらに傾きやねじれを与えることにより、パッチの詳細を定める。一方、ガイドネットの方法では、制御点の座標を与えることにより定める。

一方、物理現象を示すポテンシャル場において離散点でポテンシャルの勾配が与えられこれを基に領域全体のポテンシャル分布を求める²⁾ 場合のように、離散点における曲面の傾きから曲面形状を決めたい場合がある。これには二次元空間の離散点で与えられた1階偏導関数値に対する数値積分法が必要となるが、この種の積分法はこれまで提示されていないのが実際的那样である。

本論では、離散点で傾きが与えられた場合における、曲面パッチ補間法に基づく曲面形状決定法を提案する。具体的応用例として、与えられた屋根の勾配から屋根形状を求める場合をとりあげ、本方法が有効に用いられることを示す。また、本方法を双三次パッチによる方法に拡張した結果についても述べる。

2. 基礎式

2. 1 問題の定式化

直交座標系 (x, y) の領域 D 内の任意の位置に離散点 P_1 が与えられ、その全点で曲面の関数 ϕ の1階偏導関数値、すなわち曲面の傾き $f = (f_x, f_y)$ が与えられ

ているものとする。さらに、離散点 P_1 の一部の点 P_2 では関数 ϕ も既知関数 $g(x, y)$ として与えられているものとする。すなわち、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = f_x(x, y), \frac{\partial \phi}{\partial y} = f_y(x, y) \text{ on } P_1(x, y) \in D \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = f_x(x, y), \frac{\partial \phi}{\partial y} = f_y(x, y), \phi = g(x, y) \text{ on } P_2(x, y) \in D \quad (2)$$

本論では、以上の条件に対し、領域 D 内の任意の点 P における未知関数 ϕ 、すなわち曲面形状 ϕ を求める問題を考える。すなわち、

$$\phi = \phi(x, y) \text{ on } P(x, y) \in D \quad (3)$$

2. 2 曲面 ϕ の助変数表示

図1に示すように、曲面 ϕ が存在する物理空間 (x, y) の領域 D において、任意の位置に γ 個の離散点 $P_1(x, y)$ が与えられている。離散点を頂点とする四角形

図1 物理空間における曲面

* 平成4年11月20日受付

** 名古屋大学教養部

領域の接合により領域 D を表すことができるが、任意形状の領域 D を正確に表そうとする場合には三角形領域の接合が要求される。

離散点を頂点とする β 個の四角形領域 D^e に領域 D を分割すれば、 D^e 内の曲面を四角形パッチで表すことができ、その接合により D 内の全曲面 ϕ を表現できる。本論では、任意形状の領域 D を扱う立場から、離散点を頂点とする β 個の三角形領域 D^e に領域 D を分割し、図 2 に示すように、助変数空間 (u, v) における正規化された直角二等辺三角形領域 Π に領域 D^e を写像し、三角形形状の曲面を表す場合によく用いられる四角形パッチの縮退による三角形パッチ³⁾により、曲面 ϕ を表すことにする。曲面 ϕ の 1 次微係数が 3 頂点 (①, ②, ③) で与えられているので双一次パッチを用いれば、曲面 ϕ は混合わせ関数 $N(u, v)$ と 3 頂点における ϕ の値 $\phi_i (i = 1 \sim 3)$ の一次結合により、次式のように近似される。

$$\phi = \langle N(u, v) \rangle \{ \phi \} \quad (4)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \langle N(u, v) \rangle &= \langle (1-u)(1-v) \\ &\quad u(1-v) \quad uv(1-u)v \rangle \end{aligned}$$

$$\{ \phi \} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

ただし、行ベクトルは $\langle \rangle$ 、列ベクトルは $\{ \}$ で示してある。

図 2 助変数空間における曲面

また、助変数座標 (u, v) と物理座標 (x, y) の関係は、関数 $\langle N \rangle$ と物理空間領域 D^e における 3 頂点 (①, ②, ③) の座標 x_1, x_2, x_3 および y_1, y_2, y_3 を用いた次式で与えられる⁴⁾。

$$\begin{aligned} x &= \langle N(u, v) \rangle \{ x \} \\ y &= \langle N(u, v) \rangle \{ y \} \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、

$$\{ x \} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \quad \{ y \} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

2. 3 曲面 ϕ の偏導関数近似式

物理空間領域 D^e における曲面 ϕ の 1 階偏導関数の近似式は、式(4)を用いれば次式で表される。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial x} \{ \phi \} \\ \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial y} \{ \phi \} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial u} \{ \phi \} \\ \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial v} \{ \phi \} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

一方、物理空間と助変数空間における長さの計測に関連する変換の測度の関係⁴⁾は、ヤコビ行列式 J を用いた次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial u} \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、

$$J = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

式(6)に式(7)を代入し、式(5)を用いて整理すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial v} \{ y \} - \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial u} \{ y \} \\ -\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial v} \{ x \} - \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial u} \{ x \} \end{Bmatrix} \\ &\quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial u} \{ \phi \} \\ \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial v} \{ \phi \} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

領域 D^e における 1 つの離散点の 1 階偏導関数 ($\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$) が式(8)により表されたので, 式(1)で与えられる曲面の傾き (f_x , f_y) と等しく置けば, D^e における 3 つの離散点①～③における関数値 ϕ を未知数とする方程式が得られる。すなわち,

$$\frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial\langle N \rangle}{\partial v} \{y\} - \frac{\partial\langle N \rangle}{\partial u} \{y\} \\ -\frac{\partial\langle N \rangle}{\partial v} \{x\} - \frac{\partial\langle N \rangle}{\partial u} \{x\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial\langle N \rangle}{\partial u} \{\phi\} \\ \frac{\partial\langle N \rangle}{\partial v} \{\phi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \quad (9)$$

D^e の全離散①～③に対して式(9)の方程式を求めれば, これら離散点における未知関数値 ϕ からなる 6 つの方程式が得られる。この関係を領域 D 内のすべての曲面 (β 個) に対して求め, 未知関数 ϕ に関して整理したものを行列形式で記述すれば, つぎの偏導関数近似式が得られる。

$$[K]\{\phi\} = \{f\} \quad (10)$$

ただし,

[K]: 混合させ関数の 1 階偏導関数および離散点の物理座標値を成分とする 6β 行 γ 列の行列

$\{\phi\}$: 全離散点の ϕ を成分とする γ 次元のベクトル

$\{f\}$: 全離散点の f_x および f_y を成分とする 6β 次元のベクトル

2. 4 曲面 ϕ の決定法

偏導関数近似式(10)は, 未知数の数 γ よりも大きい式の数 6β をもつ。また, 四角形パッチを用いた場合には式の数 8β である。したがって, いずれの場合も偏導関数近似式が優決定系に属し, 曲面 ϕ を十分な精度で求めることができる。優決定系では解 $\{\phi\}$ は一般的には存在しない⁵⁾ ので, ここでは最小二乗法^{2), 6)} により近似解 $\{\phi\}$ を求めることにする。

式(10)の残差の二乗和を与えるユークリッドノルム R とすれば, 次式を得る。

$$R = \| [K] \{\phi\} - \{f\} \|^2 = \sum_{j=1}^{6\beta} \left(\sum_{i=1}^{\gamma} K_{ji} \phi_i - f_j \right)^2 \quad (11)$$

ただし, K_{ji} は行列 $[K]$ の第 j 行 i 列成分, ϕ_i はベクトル $\{\phi\}$ の第 i 次元成分, f_j はベクトル $\{f\}$ の第 j 次元成分である。

最小二乗法によれば, R を最小化する ϕ が偏導関数近似式の最良近似を与える。この最小化の条件は次式により表される。

$$\partial R / \partial \phi_k = 0 \quad (k = 1 \sim \gamma) \quad (12)$$

式(12)に式(11)を代入して整理すれば, 最小二乗法の正規方程式である, γ 元一次連立方程式が得られる。

すなわち,

$$\sum_{i=1}^{\gamma} \left(\sum_{j=1}^{6\beta} K_{jk} K_{ji} \right) \phi_i = \sum_{j=1}^{6\beta} K_{jk} f_j \quad (k = 1 \sim \gamma) \quad (13)$$

式(13)に式(2)で与えられる $\phi = g$ の関係を代入し, LU 分解法⁷⁾ などにより数値解析すれば, 離散点における ϕ の値が求まり, 助変数空間の領域 Π 内の曲面 ϕ が式(4)より定まる。また, 得られた Π 内の曲面は, 式(5)により物理空間の領域 D^e における曲面に写像される。したがって, 解析対象の領域 D における曲面は, 写像により得られた D^e における曲面を接続することにより求められる。

3. 計算結果

図 3 に示すように領域 D が正方形の場合を例にとり, 本方法の適用結果について述べる。ただし, 25 個の離散点が正方形格子状に与えられ, 図示のように番号付けされているものとする。この場合, パッチ枚数は 32 である。

図 3 物理空間における領域 D

全離散点で曲面 ϕ の傾き (f_x , f_y) が, また境界上の離散点 1～16 および中央部の離散点 25 で ϕ の値 g が与えられた場合を解析する。ただし, 離散点 1～16 の (f_x , f_y) および g の値を零とし, 内部領域にある離散

点17～24の (f_x, f_y) や離散点25の (f_x, f_y) および g の値を種々に変えた場合を扱う。

図4は、図の下段の表のように (f_x, f_y) と g を与えた場合の曲面形状を示す。中央部に極大値をもつ曲面が得られる。三角形パッチの各辺により曲面形状を示してあるが、双一次パッチを用いているため各辺が直線で表現されている。

図4 1つの極大値をもつ曲面

図5は極大値と極小値をもつ曲面を、図6は4つの極大値と1つの極小値からなる曲面を求めた場合の結果である。

つぎに、正八角形の領域において、与えられた屋根の勾配から屋根形状を求めた場合の結果を図7に示す。離散点数は9、パッチ枚数は8である。離散点番号を図7(a)に示してあり、図7の下段の表に示すように、全離散点で勾配が、中心の離散点5ではさらに座標値が与えられている。ただし、求められた三角形パッチに対し、隣接する2枚を接合した四角形パッチを考え、その各辺を10等分して得られる格子により屋根形状を示してある。図7(a), (b), (c)は、それぞれ表中の勾配 k が0.2, 2, 6に対する結果であり、勾配に応じた屋根形状が得られている。なお、求められた屋根形状において、8枚のパッチが頂点(離散点5)でそれぞれ異なる勾配をとる。これらの平均値が頂点で

図5 極大値と極小値をもつ曲面

図6 4つの極大値と1つの極小値をもつ曲面

与えられた勾配に一致するが、これは優決定系に属する偏導関数近似式を最小二乗法により解析した当然の結果である。

以上より、屋根形状を求める場合にも本方法は有効に利用できることが知れる。

(a) $k=0.2$ の場合

(b) $k=2$ の場合

(c) $k=6$ の場合

離散点 番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_x	$-k$	k	$-k$	0	0	0	k	$-k$	k
f_y	$-k$	0	k	k	0	$-k$	$-k$	0	k
g	—	—	—	—	1	—	—	—	—

図7 屋根形状を求めた結果

4. 双三次パッチによる方法への拡張

本節では、双一次パッチの方法に基づく本方法を双三次パッチによる方法に拡張することにより、滑らかな曲面が得られることを示す。

図2に示した、助変数空間 (u, v) における直角二等辺三角形領域 Π 内の曲面 ϕ は、3頂点の座標、傾きおよびねじれが既知の場合には、四角形双三次パッチの縮退による三角形双三次パッチ³⁾により表現できる。すなわち、

$$\phi(u, v) = \langle h_0(u) \ h_1(u) \ h_2(u) \ h_3(u) \rangle \begin{bmatrix} h_0(v) \\ h_1(v) \\ h_2(v) \\ h_3(v) \end{bmatrix} \quad (14)$$

ただし、混合させ関数 h_0, h_1, h_2, h_3 および係数行列 $[B]$ は、それぞれ次式で表される。

$$h_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \ h_1(t) = -2t^3 + 3t^2 \\ h_2(t) = t^3 - 2t^2 + t, \ h_3(t) = t^3 - t^2$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \phi(0, 0) & \phi(0, 1) & \phi_v(0, 0) & \phi_v(0, 1) \\ \phi(1, 0) & \phi(1, 1) & \phi_v(1, 0) & \phi_v(1, 1) \\ \phi_u(0, 0) & \phi_u(0, 1) & \phi_{uv}(0, 0) & \phi_{uv}(0, 1) \\ \phi_u(1, 0) & \phi_u(1, 1) & \phi_{uv}(1, 0) & \phi_{uv}(1, 1) \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここで、 ϕ_u および ϕ_v は曲面 ϕ の傾き、 ϕ_{uv} はねじれであり、それぞれ次式で与えられる。

$$\phi_u = \frac{\partial \phi}{\partial u}, \ \phi_v = \frac{\partial \phi}{\partial v}, \ \phi_{uv} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} \quad (16)$$

式(15)の係数行列 $[B]$ の成分のうち、 ϕ の値は上述した双一次パッチを用いた本方法により定めることができる。 ϕ の傾き ϕ_u および ϕ_v の値は、式(5)の係数を用いれば、式(1)で与えられた物理空間 (x, y) における傾き f_x および f_y から計算できる。さらに、ねじれ ϕ_{uv} の値は傾きの空間差分から求まる。よって、以上の計算より行列 $[B]$ が定まり、曲面 ϕ を双三次パッチ [式(14)] により表すことが可能となる。

図8は、図6の計算例に上述の双三次パッチによる方法を適用した場合の結果である。滑らかな曲面形状が得られている。

図8 図6に双三次パッチを用いた結果

5. 結論

離散点で曲面の傾きが与えられた場合に対する、双一次パッチの方法を用いた曲面形状の決定法を提案し、その適用例を示した。その結果、本方法によれば任意形状をもつ領域において種々の曲面形状を得ることができ、一例として与えられた屋根の勾配から屋根形状を求めることが可能であることが知れた。

また、本方法を双三次パッチによる方法に拡張することにより、滑らかな曲面形状が得られることも示した。

参考文献

- 1) Rogers, D. F. and Adams, J. A., (山口訳), “コンピュータグラフィックス”, 日刊工業新聞社 (1979).
- 2) 内山・峯村, “離散点で与えられた1階偏導関数値に対する数値積分法 (FEM 形状関数または差分近似式を用いた最小二乗解法)”, 日本機械学会論文集, **58**—550, B (1992), 1747—1752.
- 3) 山口, “形状処理工学 [I]”, 日刊工業新聞社 (1982).
- 4) Thompson, J. F., “Numerical Grid Generation”, Elsevier (1982).
- 5) 小柳, “最小二乗法の新しいアルゴリズム”, 情報処理, **23**—2 (1982), 99—108.
- 6) 森, “数値解析法”, 朝倉書店 (1989).
- 7) Bunch, J. R. and Kaufman, L., “Some Stable

Methods for Calculating Inertia and Solving Symmetric Linear Systems”, Mathematics of Computation, **31**—137 (1977), 163—179.

A Method to Determine a Curved Surface with its Gradients Specified on Discrete Points by Use of a Bilinear Patch

Tomomi UCHIYAMA and Kiyoshi MINEMURA

This paper is concerned with a determination of a curved surface by use of a Bilinear patch when the gradients of the surface are given on discrete points. Equations expressing the gradients are derived with use of a Bilinear patch and solved by a least squares method. As the discrete points have no necessity to form a regular grid, this method can be applied to domains with arbitrary geometry. Applicability of this method is also confirmed in several cases.