図学における問題解決の過程*

梶 山 喜一郎**

1. はじめに

図学教育の目的の一つは空間認識力の技能育成にあるといわれている。この能力は図学教育や製造生産に関わる分野で重要である^{1), 2)}。しかし図学で学習した知識と技能がどのように空間認識力に転移するかということは明らかにされていない。また図学を学習することによりどのような技能が得られるかについても明らかにされていない。ここでは、図学がどのような技能を教授しているかを議論する。

図学では空間の問題を解くことが行われている。問題が解けないのは、空間に関する能力が低いからでなく、学習者が問題を解くための知識を、前もって持っていないからである。この知識は、教科書や参考書の中に示されている。しかし学習者が実際に問題を解くには、教科書に述べられている概念や命題を知っているだけではだめで、それらを問題に適用するやり方についての技能、すなわち手続き的知識^{3)~5)}を持たなければならない。

この論文の目的は、図学の問題を正しく解くために、学習者が前もってどのような手続き的知識を必要としているかを明らかにすることである。言い換えれば教師がどのような手続き的知識を教授すべきかを明確にできる。「直線の実長および実角を求める作図問題（以下直線問題）は、図学の伝統的な教材であり倒転法などの解法が教えられている^{6)~8)}。問題解決の前提となる技能を明らかにするために、倒転法による直線問題を事例にして課題分析^{3), 9)}を行った。

2. 直線問題の系譜

直線問題は、1799年モンジュの教科書で使用され、

今も使われている教材である。現在はモンジュが教えた解法だけでなく、幾つかの異なった解法が教えられている。

2. 1 直線問題の定義

空間の線分 AB が与えられると、線分 AB の実際の長さ(実長)と線分 AB と投影面のなす角度(実角)が決まる。直線問題は、複面投影で描いた線分 AB の図面から、空間にある線分 AB の実長と実角の数量情報を求める問題である。図学の問題は、一般に定規とコンパスを用い、図面上で作図により解かなければならない制約がある。

2. 2 モンジュの解法

問題として与えられた平面図と立面図に描かれた図形そのものに、求める長さや角度は図示されていない。モンジュは、まず与えられた問題の投影面と線分を立体図で視覚化する。そしてこの立体図に1本の補助線を引き二辺夾角の定理を使い、実長と実角を作図する方法を教えた^{10), 11)}。

2. 3 解法の系譜

モンジュ以後、幾つかの解法が教科書^{12)~14)}で教えられてきた。その解法は、まず空間の線分 AB とこの平面図の線分 ab で構成する四角形 $ABba$ を考える。図面上で実長と実角を求めるために、この四角形を水平投影面上に倒す方法(倒転法)と、投射線を軸にこの四角形を直立投影面に平行になるまで回転する方法(回転法)が教えられた。その後、この四角形と平行である投影面を新たに設ける方法(副投影法)が教えられた。これらの解法は、コンピュータがない時代に、倒転法で5ステップ、回転法で4ステップ、副投影法で5ステップの少ない作図で図面上に答えを描くことができ

* 平成7年6月27日受付

** 福岡大学工学部

た方法であった¹⁵⁾。

3. 教科書・参考書での倒転法の説明

教科書や参考書で、倒転法の解法をどのように説明しているかを概観する。

3. 1 教科書・参考書の情報量

倒転法の説明は、解答を描くための作図の内容と、この作図を可能にする原理の説明で構成している。説明を記述した情報量は少ない。例えば Church の教科書は、230 単語の文章と 1 枚の解答の図で倒転法を説明している¹³⁾。図形科学ハンドブックでは、これを 240 文字の文章と 2 枚の図を用いて説明している⁷⁾。

3. 2 教材に使用する立体図

直線問題の説明には文章だけでなく、立体図形とそれを図示した立体図が用いられている。授業で使用する図面と立体図を図 1 に示す。問題として図 1a の複面投影の図面が与えられる。倒転法の空間操作は図 1b の立体図で説明される。図 1c はこの空間操作により解答を求める作図の内容である。

図 1 倒転法の説明で使用する図面と立体図

3. 3 作図の説明内容

図 1c の解答の四角形 a_1b_1ba を描く手続きは、図 1a の立面図と平面図の情報をもとに、5 つのステップで一般化し説明している。

- (1) 空間の線分 AB の平面図である線分 ab を与えられた図面上で探す。
- (2) 線分 ab 上の 2 点 a と b から、線分 ab に 2 本の垂線を引く。
- (3) 立面図で線分 aa_1 と線分 bb_1 の長さを探す。
- (4) 2 本の垂線上で点 a_1 と点 b_1 の位置を決める。

- (5) 求めた点 a_1 と点 b_1 を結ぶ線分を定規で引く。

3. 4 空間操作の説明

なぜこのような作図内容で解答が得られるかという倒転法の原理は、図 1b に示す立体図形を倒す行為で説明される。まず図 1a の与えられた問題の平面図と立面図をもとに、空間にある線分 AB を復元する。次にこの線分 AB と実角を含む立体図形の四角形 $ABba$ を決める。

投影面と平行に置いた立体図形は、これを投影した図面に実形が現れる。この知識を用い四角形 $ABba$ を平面図 ab を軸に水平投影面上に倒し、投影面に平行に置いた新たな四角形 A_1B_1ba を作り出す。倒す前後の四角形の形状と大きさの性質が変わらないので、倒した後の四角形 A_1B_1ba は求める実長と実角を含んでいる。答えの実長と実角を求めるためには、四角形 A_1B_1ba の平面図である四角形 a_1b_1ba を描けばよい。この四角形の辺の長さや角度は与えられた問題の平面図と立面図に記述してある。

4. 倒転法による問題解決の過程

課題分析は、「単に指示を受けただけでこのレベルの課題を上手に実行する方法がわかるためには、各自が何を身につけていなければならないか？」という質問からスタートする。³⁾ 直線問題に関してのこの質問に対する答えは、

- (1) 課題 Ia: 課題である線分 AB の実長と実角を見つけること。
- (2) 課題 Ib: 投影面上に実形が表れる実長と実角を含んだ図形を作り出すこと。
- (3) 課題 Ic: この図形を定規・コンパスを使い作図すること。

これらの 3 つの行為ができれば線分 AB の実長と実角を描くことができる。これらの能力は直線問題を解くための前提となる。この前提技能の関係を図 2 に示す。一番上の箱が与えられた課題である。直線問題を解くための課題は図のように階層構造になっており、その下位の 3 つの箱が、与えられた課題を解くために前もって身につけておかねばならない技能である。この第 2 層の課題を解くためにはどのような技能が必要かをさらに検討する。このように課題とそれを解くための技能を繰り返し検討し、大学生の学習者が獲得している能力に到達するまで分析を続ける。

4. 1 与えられた図面の視覚化

線分 AB が、図 1a に示す平面図 ab と立面図 $a'b'$ の 2 つの平面図形で与えられる。学習者は直接これらの図面から、空間にある線分 AB の 3 次元形状を見ることができない。またこれらの図面から線分 AB の実長と実角を見つけることもできない。

課題 Ia の実長と実角を見つけるためには、次の 2 つの行為ができなければならない。

- (1) 課題 IIa: 与えられた線分 AB を立体図形として復元すること。
- (2) 課題 IIb: この復元した立体図形上で線分 AB の実長と実角を見つけること。

図面から空間にある線分 AB の形状と大きさを立体図形として復元するためには、線分とその図面そして投影面の関係を復元しなければならない。これらは複面投影図の読図の技能である。さらにこの復元した線分 AB の立体図形は、視覚的に確認できるように図面として立体図で表現できなければならない。

実長と実角を正しく見つけるためには、実長と実角の定義を記憶するだけでなく、求める実長と実角が表れている図形を実際の立体図上で正しくパターン認識

できることである。

4. 2 倒転法による空間操作

課題 Ia を解き立体図上で具体的に実長と実角を見つけていることができて、立体図上の実長と実角を用紙に正確に写すことはできない。この実長と実角を描くためには、課題 Ib の実形が表れる図形を作りださなければならない。さらにこの課題を解くためには、立体図形のレベルで次の行為ができることである。

- (1) 課題 IIc: 実長と実角を含んだ立体図形を見つけないこと。
- (2) 課題 IId: 次にこの立体図形を投影面上に倒し目的の実形の図形を作りだすこと。

これらの課題は、図形を投影面に平行にすることにより投影面上に実形が表れるようにする、図学特有な行為である。これら下位の課題を解くには、視覚化した立体図上で次の行為ができることである。

- (1) 課題 IIId: 立体図上で実長と実角を含んだ図形、四角形 $ABba$ を決めること。
- (2) 課題 IIe: 次に立体図上でこの図形を線分 ab を軸に水平投影面上に倒し、実形の図形である四角形 A_1B_1ba を作りだすこと。

図 2 課題分析により明らかにした前提技能

(3) 課題Ⅲf: 実形の図形の投影図である平面図, 四角形 a_1b_1ba を作ること。

これらの課題を上手に行うためには, 与えられた平面図と立面図, 四角形 $ABba$, 四角形 A_1B_1ba , 四角形 a_1b_1ba を立体図で描けることである。

4. 3 図形と幾何解析

実形の四角形 a_1b_1ba を描くために課題Ⅳc でこの四角形の各辺の長さや角度を明らかにする。

立体図上で, 四角形 a_1b_1ba の形状に関する情報を得たが, 各辺の長さや角度の大きさの数量に関する情報は入手していない。図形の数量情報を得るために, 次の課題を解かねばならない。

(1) 課題Ⅴa: 四角形 $ABba$ の線分 $Aa \cdot Bb \cdot ab$ の実際の長さや, 角度 $Aab \cdot Bba$ の実際の大きさを, 与えられた平面図と立面図から見つける。

(2) 課題Ⅴb: 四角形 $ABba$ ・ 四角形 A_1B_1ba ・ 四角形 a_1b_1ba の3つの立体図形が合同であることを見つける。

(3) 課題Ⅴc: 四角形 a_1b_1ba の各辺の長さや角度の大きさを, 与えられた平面図と立面図の中に見つける。

四角形 a_1b_1ba の長さや角度の情報を得るためのこれらの課題は, 幾何の知識を利用する内容である。描いた立体図より, 与えられた平面図と立面図, 作りだした四角形 $ABba$ ・ 四角形 A_1B_1ba ・ 四角形 a_1b_1ba のこれら5つの図形の幾何学的関係を問題にしそれを解く能力が必要である。

4. 4 解答の作図

実長と実角を含んだ図形の実形を描く課題Ⅰc は, 次の2つの行為ができることである。

(1) 課題Ⅲg: 四角形 a_1b_1ba を作図すること。

(2) 課題Ⅲh: この作図した図形上で, 実長と実角を正しくパターン認識できること。

四角形 a_1b_1ba を作図するためには, 課題Ⅳc の解にもとづき, 図 1a の平面図と立面図で, 辺の長さや角度の大きさがそれぞれ表れている場所を見つけないといけない。そして, これらの長さや角度を用いて四角形を正確に作図しなければならない。

5. 直線問題の知識構造

問題を解くために必要な手続き的知識に欠陥があれば, 学習者は問題を誤ることになる。教師は学習者が直線問題を上手に解くために, 前もって様々な手続き

的知識を学習者に準備させておかねばならない。この直線問題の持つ知識構造を考察する。

5. 1 倒転法の問題表象

問題を解く過程で, 与えられた問題を3つの異なった形式に表現している。

(1) 平面図形のレベルの問題

問題は平面図・立面図として認知され, 学習した平面図形を作図する課題として理解される。しかしながら2次元の図面から, 3次元の空間にある線分 AB の立体図形やその実長と実角を見ることができない。

(2) 立体図形のレベルの問題

問題として与えられた図面を3次元の立体図形として理解し, これを立体図として視覚化する。この立体図上で作図可能な, 投影面に平行な実長と実角を含む四角形 a_1b_1ba を作りだすことが下位の課題になる。

(3) 幾何図形のレベルの問題

四角形 a_1b_1ba の立体図から, 辺や角度の数量情報を決めることができない。図形の数量情報を採したために描いた立体図を幾何図形の問題として解析することが必要になる。

(4) 再び平面図形のレベルの問題

(2)立体図形と(3)幾何図形の問題を解いた結果は, 解答の四角形 a_1b_1ba の形状と数量の情報を与える。この情報により実形の四角形を正確に描くことが課題になる。

(1)から(3)にいたる過程が, 与えられた問題を理解する過程であり, (4)が作図を実行する過程である。各過程で設けた下位の課題をそれぞれ解決しなければ, 答えを得ることができない構造になっている。

5. 2 直線問題に必要な手続き的知識の領域

直線問題は図学の他の単元で教える技能だけでなく図学以外の領域で教える技能も必要としている。

複面投影の図面を立体図形のレベルの問題に書きかためには, 課題Ⅰaの複面投影図を視覚化する技能が必要である。学習者にとって複面投影の図面を作図することは簡単であるが, この図面からもとの立体図形を復元することは困難である。図面を視覚化していく過程は, 投影の知識と読図の技能が必要である。投影の知識は図学の単元であり, 読図の技能は製図教科で教えられている¹⁶⁾。さらに課題Ⅱaでこれらの立体図形

を立体図として描くには、図学の単位である立体の図表現の知識を使えなければならない。

課題1bでは立体図形をイメージする技能にもとづき、具体的に四角形 a_1b_1ba を作りだすまでの倒転法の操作ができる技能が必要である。ここで用いる立体図形の知識は図学や数学の領域である。空間操作のアイデアの内容を立体図上で確認するには、課題1bの立体の図表現の技能に負うところが大きい。立体図上で、倒した立体図形を創造できること、そして図形を創造するために立体図上で図形を編集できる技能が必要である。

課題1cで問題解決の過程で得られた図形から作図に必要な長さや角度の数量情報を見つけることを行った。数学の幾何学の領域で、平行・垂直・合同の概念を使い、立体図を通して求める図形の性質を解析することを学習している。学習者は、直線問題を解くときこれらの知識を呼び起こし、正しく使えねばならない。

現在の学習者は、定規・コンパスを用いて正確に作図する経験が少なく、課題1dで用いる製図道具を使用した作図の技能も課題となる場合がある。

5. 3 教材としての直線問題の特徴

モンジュや、回転法・副投影法の解法は、倒転法と同じように、与えられた問題を視覚的な立体図形レベルの問題、さらに幾何図形レベルの問題そして平面図形レベルの問題へと書きかえていく手続きを必要としている。

モンジュは、直線問題を幾何の応用問題として捉えることを教えた。彼の解法は、立体図形を投影面に平行になるように動かす空間操作を必要としない。復元した線分 AB の立体図上で1本の補助線を引き、二辺夾角の定理を使い図面上で描ける実長と実角を含む合同な三角形を見つけることを説明した。

倒転法・回転法・副投影法の解法は、空間操作が強調されている。これらは、幾何学知識の応用だけでなく立体図形を操作により創造することが教材の内容に含められている。

6. 問題解決と視覚イメージ

図学の授業は立体図の視覚イメージを用いて説明を行っている。また作図問題も立体図を用いて解いている。図学教育における視覚イメージの意義と問題点を考察する。

6. 1 視覚イメージの利用

初めて図学を学ぶものは、図1bの説明図である立体図を見ただけでその図学的意味を理解できない。この直線問題を学習する過程で、学習者は描かれた立体図の持つ図学的内容を理解する。学習した後で、学習者はこの立体図を通して問題解決に必要な知識を確認することができる。学習した直線問題を再生する実験では、手続きを立体図で記憶している学習者を確認できた。また誤った立体図で誤った手続きを記憶している事例も確認できた¹⁷⁾。

教師は、視覚イメージを利用して学習者に教科内容を理解させる過程と、学習者が理解した知識を視覚イメージにより統合させる過程を区別しなければならない。

6. 2 手続き・結果の記憶と視覚イメージ

一般に問題は、幾つもの手続きが使用され、解いた答えを利用してさらに次の課題を明らかにしていく。学習者の問題解決は、手続きを記憶することや、得られた結果を記憶することが要求される。学習者は問題を失敗しないために、記憶の負担を軽減できる形式を選択した方がよい。

学習者にとって、問題を解く過程で行う図形の記述や課題の答えを命題形式の文字による文章で記憶することは負担が大きい。手続きや立体図形を視覚イメージで記憶する形式は、命題に比べ記憶容量をさほど増やすことなしに記憶できる。また立体図として記録することにより、心の中で行う手続きの知識を視覚的に確認できる利点がある。

6. 3 直線問題は直感的に解決できる問題か

図学の問題の内容は図形を対象としその解法も視覚イメージを提示して説明している。このことから図学の問題は視覚に依存した直感的な問題であるとの理解がある。

検討してきたように問題は、図面の視覚によるパターン認識だけで答えを得るように作られていない。直線問題は伝統的な教科書の最初の部分で教えられる入門の単位である。しかしその内容は問題を3つの異なったレベルで表象するように組み立てられた複雑な構造を持つ教材である。

教師などの専門家は、視覚に依存し図1bから作図に必要な図形の長さや角度の情報を直感的に見つけることができる。しかし学習者が直感的に問題を解くた

めには、手続きの知識を持ち、この一連の手続きの知識が自動化されるまで熟達しなければならない。このように直感的な手続きの知識の自動化と理解するならば、図学教育の目的は手続きの知識の学習であり、手続きの自動化はその先の学習課題であろう。

7. 結論

直線問題を解くために必要な手続きの知識を明らかにする課題分析を行った。分析の結果、直線問題は図学の他の単元に加え、図学以外の技能など多くの知識や技能を必要とすることが明らかになった。直線問題を誤る学習者は、これら必要な技能の何れかが欠けていると考えられる。教師はこのような視点で問題を誤る学習者を診断し、欠如した技能や知識を指摘し、指導することが必要であろう。

課題分析で得られたこれらの知識は授業の設計に必要なものである。教材の知識構造を同定することにより、教師は教授しなければならない課題とその構成を明細にできると考える。

この理論的課題分析は理想的な手続きの知識を明らかにしたものである。初心者や熟練者がこの手続きの知識をすべて適用するとは限らない。学習者が実際に使う知識を明らかにするために、今後経験的な課題分析が必要である^{9), 17)}。

参考文献

- 1) 鈴木賢次郎, 脇田早紀子, 永野三郎. “図学教育による直感的 2-3 次元図形処理能力の育成効果”, 図学研究, **49**, (1990), 21-28.
- 2) C. G. Miller, S. E. Wiley and G. R. Bertline. “工学生の空間認識力育成のためのカリキュラム”, 図学研究, **53**, (1991), 39-45.
- 3) E. D. ガニエ. “学習指導と認知心理学”, 赤堀・岸監訳, パーソナルメディア社, (1989).
- 4) H. Kahney. “*Problem Solving: A Cognitive Approach*”, Open University Press, (1986).
- 5) J. G. グリーノ. “問題解決の過程: 幾何の課題による研究”, サイエンス社, (1985).
- 6) 田中正夫. “詳解図学演習”, 共立出版, (1980).
- 7) 南日朗. “垂直投象および複面投象法”, 図形科学ハンドブック, 日本図学会編, 森北出版, (1980).

- 8) 大連理工大学工程画教研室. “高等学校教材画法幾何学”, 第5版, 高等教育出版社, (1992).
- 9) 吉田甫. “課題分析から教授の処方へ”, 認知心理学講座第4巻学習と発達, 東京大学出版会, (1982), 203-218.
- 10) モンジュ. “モンジュ図法幾何学”, 山内一次翻訳, 山内一次遺稿刊行会, (1990).
- 11) P. J. ブッカ. “製図の歴史”, 原正敏翻訳, みすず書房, (1967).
- 12) 原正敏. “明治期の図学教育”, 第3回図学教育シンポジウム報告書, 日本図学会九州支部, (1991).
- 13) A. E. Church, and G. M. Bartlett. “*Elements of Descriptive Geometry*”, 4th ed., American Book Company, (1911).
- 14) A. V. Miller, E. S. Maclin, and L. J. Markwardt. “*Descriptive Geometry*”, Tracy & Kilgore Printers, (1922).
- 15) G. R. Bertoline et als. “*Engineering Graphics Communication*”, Richard D. Irwin Inc., (1995).
- 16) 梶山喜一郎, 入江邦夫, 長友謙二, 江崎丈巳. “読図における誤りの生成モデル: 1. 読図のための基礎知識と単純な学習モデル”, 福岡大学工学集報, **41**, (1988), 161-170.
- 17) 梶山喜一郎. “図学における理解と手続きの知識”, 日本図学会九州支部1993年度研究発表講演論文集, (1993), 1-10.

Problem Solving of Descriptive Geometry

Kiichiro KAJIYAMA

Drawing problems are solved to learn a subject in the Descriptive Geometry. Gaspard Monge was the first person to arrange the problems of Descriptive Geometry. Given the top and front views of a line, a learner finds the length of the line and the angle in space. The problem is a typical teaching material in the Descriptive Geometry. This paper analyzed procedure knowledge to solve the problem. A learner needs many kinds of knowledge and skill to solve the problem.