不可能立体

Impossible Solids

杉原 厚吉 Kokichi SUGIHARA

概要

立体として作ることが不可能のように見えるだまし絵を数理的観点から調べ分類した。まず、投影図が多面体を表わすための必要十分条件について復習し、次にそれを利用してだまし絵を分類した。特に、正しそうに見えて実は間違っている絵と、間違っているように見えて実は正しい絵があることを指摘し、それらの特徴を明らかにした。

キーワード：立体実現問題／だまし絵／変則図形

Abstract

This paper studies mathematical structures of pictures of polyhedra, and classifies anomalous pictures from a mathematical point of view. First, we briefly review a necessary and sufficient condition for a picture to represent a polyhedron correctly, and next classifies the pictures accordingly. Special attention is paid to those pictures that seem impossible but actually represent polyhedra and those pictures that seem possible but actually do not represent any polyhedron.

Keywords : impossible object / anomalous pictures / realization of a polyhedron

1. はじめに

絵には描けるが、実際には作れない立体構造を不可能立体 (impossible object) という。そして、そのような立体を描いた絵は、変則図形 (anomalous picture)、だまし絵などとよばれる。だまし絵の例を図1に示す。だまし絵は芸術作品の素材としても広く使われている^{1), 2), 3)}し、また人の視覚機能を調べるための実験材料としても使われている。⁴⁾

図1 だまし絵の例

本稿では、このだまし絵を数理的な目で眺める。一言で「不可能」と言っても不可能の原因はいろいろあり、その違いによってだまし絵を分類することができる。⁵⁾さらに、立体として作れそうにないが実は作れるもの、作れそうなのに作れないものなどについても紹介する。^{6), 7), 8)}

2. 立体実現問題

図1のように平面上に線分だけを使って描かれた絵を線画という。

一方、立体は多面体に限るものとする。すなわち、曲面は使わず、平面だけで囲まれた立体を考える。立体を平面に投影して線画が得られたとしよう。このとき、立体の稜線のうち“見えるもの”だけを描くとしよう。したがって、線画の中の各線分は、立体の稜線のうちの見えている部分に対応する。

以下では、このような投影ルールのもとで、与えられた線画が立体の投影図であるか否かを判定する問題を考

える。

3. 投影方法に関する不変性

投影方法には、垂直投影、斜投影、中心投影などがある。しかし、与えられた線画が多面体の投影図であるか否かだけを問題にする場合には、どの投影方法で考えても答は同じである。このことをまず見ておこう。

図2に示すように、 (x, y, z) 正規直交座標系の定められた空間に多面体 P が固定されたとする。点 $e = (x_0, y_0, z_0)$ を投影中心とし、 P を (x, y) 平面に投影して得られる線画を D とおく。ただし $z_0 \neq 0$ である。もう一つの固定点 $e' = (x'_0, y'_0, z'_0)$ (ただし $z'_0 \neq 0$) を考える。3次元空間の1点 (x, y, z) の同次座標を $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ とおく。ただし $x = \xi_1/\xi_4, y = \xi_2/\xi_4, z = \xi_3/\xi_4$ である (同次座標については⁹⁾などを参照のこと)。同次座標で表された点 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ を点 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ へ移す次の変換を考えよう。

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{(\delta z_0 + 1)x'_0 - x_0}{z_0} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{(\delta z_0 + 1)y'_0 - y_0}{z_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\delta z_0 + 1)z'_0}{z_0} & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ただし、 δ は任意の定数である。

図2 多面体とその投影図

この変換は射影変換であるから、直線が直線に、平面が平面に移る。⁹⁾したがって、この変換によって多面体 P はやはり多面体に移る。これを P' としよう。また $e = (x_0, y_0, z_0)$ は $e' = (x'_0, y'_0, z'_0)$ に移る。特に $\delta z_0 + 1 = 0$ が成り立つとき、 e' は無限遠点となる。さらに (x, y) 平面上の点 $(x, y, 0)$ は動かない。したがって、線画 D は e を投影中心とする P の投影図であると同時に e' を投影中心とする P' の投影図でもある。

すなわち、ある視点 e に関して D を投影図にもつ多面体 P が存在するなら、 (x, y) 平面上にない任意の視点 e' に関して D を投影図にもつ多面体が存在する。^{6), 7)}

このように、立体実現問題は、視点の選び方によらない。そこで以下では垂直投影図とみなして考察する。

4. 頂点辞書による線画の解釈

線画の中の線分は、投影される前の稜線の幾何的性質によって、次の3種類に分類できる。

- (i) 両側の面が見えていて、それらが尾根をなすように出っ張って交わるときできる稜線；+印で表す。
- (ii) 両側の面が谷をなすように引っ込んで交わるときできる稜線；-印で表す。
- (iii) 片側の面は見えるが、もう一方の面は裏側へまわり込んで見えなくなっている稜線；面が右側になる向きの矢印で表す。

ちょうど3個の面が接続してできる頂点を一般の視点位置から見たとき、頂点のまわりで現れ得るラベルの組合せは図3に示す12種類しかないことがわかっている。¹⁰⁾したがって、与えられた線画に対して、すべての頂点のまわりのラベルの組合せが図3に属するように、線にラベルをつけることによって、その線画が表す立体の構造の候補を限定することができる。

図3 ちょうど3個の面が接続する頂点に対する頂点辞書

たとえば図4(a)の線画では、立体がこの絵からはみ出していない (すなわち最も外側の線が時計回りの矢印である) と仮定すると、この図に示すラベルが、図3と両立する唯一のものである。そしてこのラベルは、図4(a)の線画を見たとき、私達が自然に思い浮かべる立体構造と一致している。

一方、図4(b)の線画には、図3と両立するラベルが存在しない。実際、最も外側の線に時計回りの矢印をつけ、図3と比較しながら内部の線のラベルをつけていくと、最後に残った頂点が図3に属さなくなってしまう。これは、この線画が多面体の投影図ではあり得ないことを意味している。

図4 頂点辞書を利用した線画の解釈

このように、図3は、線画という“言語”を立体として“解釈”するための辞書と考えることができ、頂点辞書とよばれている。^{6), 7), 10)}

しかし頂点辞書を使った線画の解釈は完全ではない。図4(c)に示す線画は多面体を表さないが、この図に示すように図3と両立するラベルをつけることができる。このように、図3と両立するラベルがつくことは、線画が多面体を表すための必要条件ではあるが十分条件ではない。

したがって、ラベルのつかない線画は多面体を表さないと自信を持って言えるが、ラベルのついた線画が本当に多面体を表しているかどうかは、さらに詳しく調べなければならない。ちなみに図1に示した8個のだまし絵のうち、頂点辞書によって誤りが判定できるのは(d)のみである。

5. 線画の代数構造

線画に表される立体の第 i 頂点の座標を (x_i, y_i, z_i) とし、第 j 面の載っている平面の方程式を

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j = 0 \quad (2)$$

とおこう。ラベルから、どの頂点がどの面に載っているかが読み取れる。第 i 頂点が第 j 面に載っているときには、その頂点座標を平面方程式に代入したものが成り立つから

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j = 0 \quad (3)$$

が成り立つ。線画が与えられたとき x_i, y_i は既知だから、この式は未知数 z_i, a_j, b_j, c_j に関して線形である。このような式をすべて集めたものを

$$Aw = 0 \quad (4)$$

とおく。ただし、 A は定数行列、 w は未知数ベクトル

$w = (z_1, \dots, z_n, a_1, b_1, c_1, \dots, a_m, b_m, c_m)$ である(n は頂点数、 m は面数を表す)。

線画の中には、立体のある部分が他の部分より手前にあるとか奥にあるということを表す手がかりもある。たとえば図5に示すように2つの面 f_j と f_k が尾根をなすように交わり、 f_k の上に頂点 v_i が載っているとする。このとき、面 f_j を延長した平面は頂点 v_i と視点の間を通過する。このことは不等式

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j > 0 \quad (5)$$

で表される。このような不等式をすべて集めたものを

$$Bw > 0 \quad (6)$$

とおこう。

図5 相対的な遠近関係の手がかり

ラベルのついた線画に対して、上の方程式と不等式があるルールに従って列挙すると、次の性質が成り立つ。^{6), 7)}

性質1. 線画が多面体を表すための必要十分条件は、(4)、(6)が解をもつことである。

これによって、少なくとも数学的には、立体復元問題が解決されたことになる。図4(c)の線画では(4)、(6)が解をもたないので正しくないと判定できる。

図6 正しそうに見えるが間違っている線画

図1に示しただまし絵のうち、この方法で誤りと判定できるものは(a)、(b)、(e)、(f)である。

6. 正しそうに見える誤った絵

人の目には正しく立体を表すように見えるのに、前節

の方法で解析すると正しくないという答が得られる線画がある。その一例を図6(a)に示す。この絵は人の目には、三角錐の上部を平面で切断したものを上から見下ろした図のように見える。しかし対応する式(4)、(6)は解をもたない。実際、これが正しく多面体を表すなら、3個の側面を延長すると1点で交わるはずであるが、図6(b)に示すようにそのような点の作図はできない。したがってこの図は多面体の投影図とはなっていない。

このように、人の目には正しく見えるのに実は立体を表さないという意味のだまし絵も存在する。

この種の絵は、連立方程式(4)に含まれる未知数の数と方程式の数からある程度は見分けることができる。描かれている立体の頂点の数を n 、面の数を m とすると、式(4)に現れる未知数は $3m+n$ 個である。式(4)に含まれる方程式の数（すなわち頂点とそれが載っている面との対の数）を r としよう。このとき次の性質が成り立つ。^{6), 7)}

性質 2. $3m+n-r < 4$ を満たす線画は、頂点の位置をいかにげんに描くと多面体を表さない。

この性質は、直観的には次のように理解できよう。式(4)の未知数の数が $3m+n$ 、方程式の数が r であるから、 $3m+n-r$ は式(4)を満たす解がもつ自由度の下限である。一方、線画が多面体を表す場合には、そのような多面体は無数にあり、その一つを指定するための自由度は少なくとも4である（3個の頂点の z 座標を指定すると一つの面を空間に固定でき、もう一つの頂点の z 座標を指定するとその多面体の厚みが決まる）。したがって性質2の中の不等式が満たされる場合は自由度が足りないわけで、これは正しい線画においては式(4)が独立にはなり得ないことを意味している。そのような線画ではある部分を描くと他の部分の位置が強制的に決まってしまうのである。この性質を利用して、ある種の作図問題の解の一意性を論じることでもできる。¹¹⁾

性質2は、いかにげんに描くと多面体を表さない線画を特徴づける一つの十分条件を述べているに過ぎないが、必要十分条件もわかっている。興味のある方は、文献^{6), 7)}などを参照されたい。

7. 誤っているように見える正しい絵

図1(a)は、多面体として作れない不可能立体であるが、これを少し書き換えた図7を考えてみよう。これは、図1(a)の“立体”を4本の角材を組み合わせて作ることをはっきりさせたもので、やはり不可能立体のように見える。しかし、少しずるいトリックを使うと、この

絵を投影図にもつ多面体を作ることができる。

実際にボール紙でつくった立体の写真が図8である。(a)は図7と同じように見える視点から撮影したもので、(b)は別の角度から撮影したものである。この写真からわかるように、図7ではつながっていると感じる部材が実は奥行き方向に離れており、ある視点から見たときだけそれがつながっているように見える。これはよく使われるトリックであるが、ずるいだけであまり数理的興味を引くものではなからう。

図7 4個の角材で作られただまし絵

図8 図7の線画をもたらし立体

一方、このようなずるいトリックを使わなくても作れる不可能立体がある。その例を図9に示す。この図の(a)は普通の絵で、確かに多面体を表す。一方、この図の中の手前と奥を部分的に入れ換えたものが図9(b)で、通常、絵にこの種の変更を加えると多面体は表さなくなると考えられがちである。したがって、図9(b)のような線画もだまし絵に属す。

しかし実は、図9(b)は多面体の正しい投影図となっている。図9(b)を投影図にもつ多面体のボール紙で作った模型を図10に示す。(a)は図9(b)と同じ投影図をもたらし視点から撮影した写真で、(b)は別の視点から撮影したものである。これらの写真からわかるように、絵の中でつながって見える部分は、実際の立体においてもやはりつながったままである。

図9 立体として実現可能なだまし絵

図10 図9(b)の線画をもたす立体

このように図9(b)は多面体の正しい投影図なのであるが、それにもかかわらず、人がこの絵を見たときだまし絵だと感じるのはなぜであろうか。それは、人がこの絵を見たとき、「面と面が直角に接続された立体」を勝手に思い浮かべてしまうからだと思われる。図9(b)の線画には、互いに平行な3方向の線しか使われていない。このような絵を人が見たとき、面は互いに直角に交わっていると無意識のうちに思い込んでしまうらしい。そして、そのような立体は作れるはずがないと感じて、図9(b)をだまし絵に分類するのであろう。

一方、本稿の最初で仮定したように、対象世界は平面で囲まれた立体なら何でもよく、面と面はどのような角度で交わっていてもかまわないという前提では、図9(b)は正しい絵なのである。図1の(c), (g), (h)も、同様の意味で正しい絵である。

これらの立体は、実際に計算機で作ることができ、その展開図を描いて工作材料にすることもできる。その方法と実例については文献^{7), 8)}を参照されたい。

おわりに

不可能立体について数理的視点から眺めてきた。絵が多面体の正しい投影図か否かは、性質1によって判定できるから、立体実現問題は数学的にはこれで決着がついている。だまし絵として“遊び的”側面から絵を論じる場合にはこれで十分であろう。

一方、本稿で紹介したことは、人と同じような視覚機能をロボットにもたせたいというコンピュータビジョンの“まじめ”な研究の副産物である。そして、このまじめな研究においては、もう一つ深刻な課題が残っている。なぜなら図6のような線画が、カメラで撮った画像を処理して得られたものなら、必然的に頂点の位置に誤差が入り、したがって性質1を利用した計算機構では立体を抽出することができないからである。連立方程式のこの過剰な厳密さは、工学においては実用を阻む大きな障害である。

しかし幸いなことに、この障害も既に克服されていて、誤差を含む線画からも人間と同じように柔軟に立体構造を抽出できるようになっている。その計算機構の詳細については、文献^{6), 7)}を参照されたい。

参考文献

- 1) エルンスト, B. (坂根巖夫訳): エッシャーの宇宙. 朝日新聞社, 東京, 1983.
- 2) 安野光雅: ABCの本へそまがりのアルファベット. 福音館書店, 東京, 1974.
- 3) B. Ernst: The Eye Beguiled-Optical Illusions. Benedikt Taschen Verlag, Köln, 1992.
- 4) グレゴリー, R. L. (金子隆芳訳): インテリジェント・アイ. みすず書房, 東京, 1972.
- 5) K. Sugihara: Classification of impossible objects. Perception, vol. 11 (1982), pp. 65-74.
- 6) K. Sugihara: Machine Interpretation of Line Drawings. MIT Press, Cambridge, 1986.
- 7) 杉原厚吉: 不可能物体の数理. 森北出版, 東京, 1993.
- 8) 杉原厚吉: だまし絵で遊ぼう. 岩波書店, 東京, 1997.

- 9) 杉原厚吉：グラフィックスの数理。共立出版，東京，1996.
- 10) D. A. Huffman：Impossible objects as nonsense sentences. B. Meltzer and D. Mice (eds.), Machine Intelligence 6, Edinburgh University Press, Edinburgh, pp. 295–323.
- 11) 杉原厚吉：作図問題の解の一意性判定について。図学研究，30号（1982），pp. 1 – 6.

●1998年11月10日受付

すぎはら こうきち

1948年生。東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻教授。計算幾何学，コンピュータグラフィックス，コンピュータビジョン，計算工学などの教育研究に従事。

著書：「不可能物体の数理」（森北出版），「計算幾何工学」（培風館），「FORTRAN 計算幾何プログラミング」（岩波書店），「だまし絵で遊ぼう」（岩波書店），「グラフィックスの数理」（共立出版），「計算代数と計算幾何」（共著，岩波書店），「理科系のための英文作法」（中央公論社），“Machine Interpretation of Line Drawings” (MIT Press), “Spatial Tessellations-Concepts and Applications of Voronoi Diagrams” (共著，John Wiley & Sons) など。