n 次元空間の回転と直投影について——高次元代数的図法幾何学 I

On Rotations and Orthogonal Projections in n -Dimensional Euclidean Space

高田 一郎 Ichiro TAKADA

概要

本研究では、 n 次元ユークリッド空間 R^n の立体の、図形的な認識方法の整理と解析を、系統的にしかも実用的に行うことを目標にした。

R^n の立体を図形的に把握する過程の数理的側面は、 R^n の回転（運動）と投影の解析に集約されるが、今回は特に前者の解析と実用的な表現について述べた。

理論的には、直交変換の標準形として、 n 次元空間の回転 σ は $\frac{n}{2}$ 個以下の適当な 2 次元平面上の回転たちの積で表されることが知られている。これは純数学的に有用かつ無駄のない表現だが、そこに現れる 2 次元平面上の各回転の軸は、 σ に依存し一定しないので、特に高次元での図学的な実用性に乏しい。

本論文では、回転と投影を一緒に取扱う図学的な立場を踏まえ、「 R^n 回転は $n-1$ 個を越えない固定された軸を持つ 2 次元平面上の回転たちと投影面（超平面 R^{n-1} ）上の回転との積で表される」という結果と、その具体的な表現を証明付きで得た。

キーワード：高次元図学／ n 次元空間の回転／ n 次元空間の運動／合同変換／直交変換

Abstract

One of our purpose is to arrange and to analyze a method of visual perception of an object in n -dimensional Euclidean space R^n systematically and practically.

When we study the process of visual perception of an object in R^n , we have to extend the process in 3-dimensional case to the general cases. If we try to perceive the unidentified object, usually we move (rotate) the object or we change the position (turn) around it, and we look it or press the shutter. In this paper, we will generalise these "moving" (rotation) and "looking" (projection) to n -dimensional cases, and we will give them, especially for the former, a practical expression.

It is well known the theoretical expression of rotation in R^n , that is to decompose it to a product of at most $n/2$ 2-dimensional rotations, so called the canonical form of the orthogonal transformation. This expression is useful and economical in mathematical sense, but it lacks practical use especially in high dimensional cases, since the axis of the 2-dimensional rotation in each component is change depending on the given rotation. Then this expression is not satisfied our purpose.

On the other hand, from our viewpoint to treat rotation and projection together, we obtain the following expression: any rotation in R^n which fixes the origin is decomposed to a product of at most $n-1$ 2-dimensional rotations with the fixed axis and a rotation in the projection hyperplane ($\simeq R^{n-1}$). Of course our expression has practical value in exchange for a little waste.

Keywords: Higher Dimensional Descriptive Geometry / n -dimensional Rotation / n -dimensional Motion / Congruent Transformation / Orthogonal Transformation.

0. はじめに

立体を図形的に把握する過程の数理的側面を考察する際、言うまでもなく 3 次元の場合がその唯一の現実的なモデルとなる。それは立体を動かし、または観測者が動き、立体を見るということに集約される。例えば我々が未知の物体を把握しようとする際、それを手に取って色々と動かし（回転し）、或いは物体が大きい場合などはそのまわりを動き回り、眺め、スケッチし、またはシャッターを切るという行動をとるであろう。

この「動かす」ことと「見る」ことを数理的視点のものと、 n 次元の立体の観察という立場で拡張し、「動かす」こと「見る」こと自身及びそれらの相互関係を明らかにすることを目標とする。

n 次元の空間図形の表現については、多くの研究がなされており^{1)~4)}、図 1, 2, 3 はそれらの考え方に基いて描いたものである。図 1, 2 では、立体のより多くの図形的情報を得るために、色々な運動で同一物を動かした後の投影図を示している。その際使用する運動は回転で、特に図 4 の形の行列で表される回転 σ_{ij} （これらは本質的に 2 次元の回転（図 5））のいくつかの合成だけである。

しかしここで疑問が生じる。はたして n 次元空間の回転は上記の様なものばかり（つまり 2 次元の回転の組合せだけで十分）なのであろうか？*1もし図 4 の回転 σ_{ij} の合成以外の回転（図 6 の X ）があれば、それにより立体を動かしたものの投影図の中には、まったく新しいものが現れる可能性があり、それを見過ごしてしまえば、偏った見方のみによる誤解を生じることもあろう⁷⁾。

このような問題を解決するためには、まず回転とは、運動とは、2 次元 3 次元を含む一般の次元の場合どの様に定義され、どの様な形で具体的に記述されるのか？を考察する必要がある。

純粋数学の視点では以上のことは解決済みで、「 n 次

*1 解答は 2-3. 節 系 2.5 で述べられる。

図1 4次元超立方体の投影図⁵⁾

図2 4次元正120胞体の投影図

図3 7次元超立方体の投影図⁵⁾⁶⁾

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ i & \text{---} & \cos \theta & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ j & \text{---} & \sin \theta & \text{---} & & & \cos \theta & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

図4 n 次元空間の基礎的な回転 σ_{ij}
(行列の空白部分は全て0. i, j は n 以下の正整数)

図5 回転 σ_{ij} のイメージ

図6 運動・回転たちの集合の包含関係

元ユークリッド空間の任意の回転は、うまく座標系を取れば $\frac{n}{2}$ を越えない個数の図4の形をした回転の合成によって表される」という実直交行列の標準形に関する定理*²がそれに相当する。しかしこれは、いわゆる存在定理であり、回転だけを理論的に捉えるのであればこれで十分だが、構成要素となる図4の形の回転を与える2次元平面を具体的に求めることは一般に困難で、さらに都

合が悪いことに、これらの 2 次元平面は、初めに与えられる回転に依存して変化してしまい、図学的な見地からは全く応用性がないと言わざるを得ない。純粋数学の立場では、2 次元の立体や回転は 2 次元空間内で、3 次元のそれらは 3 次元内で…とその次元の空間内で捉えれば十分であり、より低い次元に投影した図形と共に考察する必要も、実用性を気にする必要もないわけである。まさに「見る」必要がないために、上記の様な定理のみで回転を片付けているのである。

*2 文献8) 第5章 系[6.2] 参照.

純粋数学の結果と、それを応用する立場の図学の要請との間にはギャップがあるのは当然であるが、高次元図法幾何学に関しては、そのギャップを正確に埋め、上述のような素朴な疑問等に、証明付きで答えようとする試みはほとんどなされていない。この空隙を埋めるべく、 n 次元空間の回転（運動）と投影について正確で具体的な考察を加え、それらの意味・性質・相互関係を図学的な立場から捉えていくことにする。

1. 序論

1-1. 立体の把握

n 次元空間^{*3} R^n の立体を図形的に把握する数理的過程に関する唯一のモデルは、 $n=3$ 即ち3次元の場合であり、それが立体を「動かす」（形を変えないように運動させる）ことと「見る」（投影する）ことに集約されていることは既に述べた。「動かす」と「見る」ことを n 次元の立体の観察という立場で拡張するわけであるが、ここで注意しておかなければならないことは、図学的見地に立ち立体の正確な把握をするという理由から、次の3つの条件を満たす立体観察方法の確立を目標とし、これらを常に念頭において考察を加えていくということである。

- (i) なるべく多くの方向から立体を眺める。
- (ii) 眺めた姿が同じである様な重複を出来る限り少なくする。
- (iii) 上を満足しつつ秩序がありかつ実用的である。

これらの表現はいささか標語的であるが、補足しておく：(i)は1つの立体を全ての運動によって変換したあらゆる射影像を求めることである。(ii)は1つの立体を異なる運動により変換しそれを投影した2つの図形が合同であれば、「見る」という観点から、それら2つの運動を同一視してしまうことである。(iii)は運動を系統だてて選択し、見る方向や投影図の相互関係（重複遺漏の有無・程度）が明確にとらえられ、単なる理論に走らず、人間や機械が実際に作図してゆける実用性—即ち、計算

や選択方法が煩雑になり過ぎないこと—を要求しているものである。

(i)と(ii)は理論的（数学的）な要請であり、(iii)は実用的（工学的）なそれと言えるが、以上のことを単に n 次元空間の一般論として俯瞰するのではなく、3次元の場合の自然な拡張として眺めていく。

1-2. 運動と回転について（3次元の場合）

まず図形的常識から、動かすこと即ち運動は、少なくとも立体の形を変えない変換でなくてはならない。形を変えないというのは長さや角を不変にするということに他ならない。詳しく言えば、空間の任意のベクトルの長さを不変にし、任意の2つのベクトル間の角度も不変にするということである（図1.1）。

ベクトル v の長さ $|v|$ 、2ベクトル v, w 間の角度 θ は周知のごとく次のように定義される：

$$v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \quad (1.1)$$

に対し、 v, w の（ユークリッドの）内積を

$$v \cdot w := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \quad (1.2)$$

と置くと

$$|v| := \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}, \quad (1.3)$$

$$\theta := \cos^{-1} \frac{v \cdot w}{|v| |w|}. \quad (1.4)$$

(1.3)、(1.4)より長さも角も内積だけによって決められるので、内積を不変にすれば長さも角も不変である。逆に、(1.2)、(1.3)から直ちに

$$v \cdot w = \frac{1}{2}(|v + w|^2 - |v|^2 - |w|^2)$$

を得る。これは長さにより内積が決まることを示してい

図1.1 形を変えない変換

図1.2 合同変換（等長変換）

*3 R を実数全体の集合として、その n 個の直積

$$R^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in R\}$$

の各要素 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を点（または位置ベクトル）とみなして R^n を n 次元空間と言う。ただし、 $x \in R$ とは「 x は R の要素」即ち「 x は実数」ということである。

さらに R^n に(1.2)'式(1-3.節参照、(1.2)式の拡張)の形の内積を入れた（従って、長さや角度を(1.3)'(1.4)'式で定義した）場合、 R^n を n 次元ユークリッド空間とも言う。

るので、長さを不変にすれば内積も不変である。従って、形を変えない変換は、内積を不変にする変換とも言える(図1.2)。これらは合同変換(あるいは等長変換)と呼ばれ、平行移動はその最も簡単な例である。

空間の変換 σ, τ に対し、変換の合成を $\sigma\tau$ ^{*4}、 σ の逆変換 σ^{-1} を σ^{-1} で表すと、 $\sigma\tau$ が合同変換であれば、合成 $\sigma\tau$ も逆変換 σ^{-1} も明らかに合同変換である。従って、合同変換の全体は群を成し^{*6}、合同変換群と呼ばれる。

さて、合同変換 σ により原点 O が点 P に移されたとしよう。このとき、点 P を原点 O に移す平行移動を ρ とすると、 $\sigma\rho$ は原点を不動にする合同変換となる(図1.3上)。ここで $\sigma\rho = A$ とおくと、 $\sigma = A\rho^{-1}$ となり、「任意の合同変換(σ)は、原点を不動にする合同変換(A)と平行移動との合成により得られる」ことがわかる(図1.3下)。

原点を不動にする合同変換は、線型変換^{*7}となり^{*8}(図1.4上)、行列により表される。この行列を変換行列と呼ぶ。合同変換は内積を不変にする変換であったので(図1.2)、原点を不動にする合同変換は、即ち、内積を不変にする線型変換と同一で(図1.4下)、直交変換と呼ばれる。その変換行列 A は

$${}^tAA = E_3$$

図1.3 平行移動と原点不動の合同変換

(ここで、 tA は A の転置行列、 E_n は n 次の単位行列)を満たし^{*9}、直交行列と呼ばれる。直交変換の全体(図1.4上の打点部分)は、群を成し直交群と呼ばれ、

$$O_3 := \{A \in M_3(R) \mid {}^tAA = E_3\}$$

と書かれる。ただし、 $M_n(R)$ は各成分が実数の n 次正方行列全体とする。

直交群の要素 A に対し、 $\det {}^tAA = \det E_3 = 1$ と $\det {}^tA = \det A$ より $\det A = \pm 1$ となるので、

$$O_3 = \{A \in O_3 \mid \det A = +1\}$$

$$\cup \{A \in O_3 \mid \det A = -1\}$$

と分かれるが(図1.5)、右辺の前半

$$SO_3 := \{A \in O_3 \mid \det A = +1\}^{*10}$$

が、図形常識的な意味において、3次元空間における原点を不動にする回転(の変換行列)全体に一致している^{*9}、これを回転群(図1.5の打点部分)と呼ぶ。一方

$$\{A \in O_3 \mid \det A = -1\}^{*11}$$

は、原点を不動にする鏡映変換^{*12}全体である。鏡映変換は右手系と左手系が交換されてしまうので(図1.6)、「3次元の」運動とは見えない^{*13}。(もちろん n 次元

図1.4 直交変換(打点部分が直交群)

*4 σ を行った後 τ を施して得られる変換。

*5 σ の逆を施して(σ によって移った後のものを、移る前のものに移して)得られる変換。ただし、 σ が1対1の場合に限る。例えば、点 P を点 O に移す平行移動を ρ とすると、逆変換 ρ^{-1} は O を P に移す平行移動となる(図1.3上)。

*6 一般に、ある種の変換の集合 G について、 G の中の勝手な2つの変換 σ, τ に対し、合成変換 $\sigma\tau$ と逆変換 σ^{-1} が共にまた G の変換になるとき、 G は群を成すと言う。

*7 3次の正方行列 A を用いて、任意のベクトル $v = (v_1, v_2, v_3)$ の変換後のベクトル $v' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ が $v' = vA$ なる積で表される変換。1-3.節 脚注*14参照。

*8 文献8)第2章§7, 文献9)参照。

*9 文献8)第2章§6参照。

*10 $SO_3(R)$, $SO(3)$, O_3 などと書かれることもある。

*11 O_3 などと書かれる。

*12 原点を通る固定した平面に関する鏡映と回転の積。

*13 例えば分子光学異性体(図1.6)は、互いに鏡映変換で移りあうが、その光学的性質(図形的性質の一種!)が異なるので、立体を図形的に捉える観点から「3次元空間内で」一方を他方に運動させたとは考えない。実は、4次元空間内で運動(回転)させている。このことは、2次元平面内の鏡映変換-裏返し-は、その平面内では実行不可能だが、3次元空間(平面外!)で回転させることにより実現できることから容易に推測できよう。

の場合も、鏡映変換は「 n 次元の」運動には含めない。）
 以上まとめると、

運動は「平行移動」と「原点を不動にする回転」によって生成された変換

ということになる（図1.7下）。運動全体も群をなし、運動群（図1.7上の打点部分）と呼ばれる。

因みに、2次元平面 R^2 の場合、原点不動の合同変換全体は

$$O_2 := \{A \in M_2(R) \mid 'AA = E_2\}$$

であり、従って

$$SO_2 := \{A \in O_2 \mid \det A = +1\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in R \right\} \tag{1.5}$$

が、原点を不動にする回転全体に一致していることは、周知の通りである。

1-3. 運動と回転について（ n 次元の場合）

以上のことを踏まえて、任意次元の空間における運動・回転について述べることは容易である。即ち、 n 次元空間 R^n のベクトル

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n), \quad w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \tag{1.1}'$$

に対し、 v, w の内積を

$$v \cdot w := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n \tag{1.2}'$$

図1.5 原点不動の回転（打点部分が回転群）

*14 n 次の正方行列 A を用いて、任意のベクトル v の変換後のベクトル v' が、 $v' = vA$ なる積で表される変換。この線型変換を σ とするとき、 σ と行列 A は同一視され、従って v の σ による変換像 $v' = vA$ を $v\sigma$ と書く。
 v の σ による変換像は $\sigma(v)$ と書かれる場合も多いが、 $v\sigma$

と置き、 v の長さ $|v|$ 、2ベクトル v, w 間の角度 θ を

$$|v| := \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}, \tag{1.3}'$$

$$\theta := \cos^{-1} \frac{v \cdot w}{|v| |w|}$$

で定め、1-2.節(1.1)~(1.3)式を(1.1)'~(1.3)'式に読みかえ、残りはすべて1.2節と同じ議論・数式・図で、空間の次元だけを(3から n)に取り替えるように一般化するのである。 $n=3$ の場合と全く同様に、原点を不動にする R^n の合同変換は線型変換*14となる。それらの全体が、直交群（図1.4の打点部分）

図1.6 光学異性体（乳酸 $C_3H_6O_3$ ）

図1.7 運動（打点部分が運動群）

と書く主な理由は次の通り：(1) v を横ベクトルで表しているのので σ の変換行列 A との積は vA となり、形をこれに合わせている。(2) 合成 $\sigma\tau \dots$ は左から順に変換を施して行くので、その像を $v\sigma\tau \dots$ と書けば順序に整合性が出る。(3) CG 関連の文献の慣例が $v\sigma$ の方の記法になっている。

$$O_n := \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid 'AA = E_n\}$$

であり、

$$O_n = \{A \in O_n \mid \det A = +1\}$$

$$\cup \{A \in O_n \mid \det A = -1\}$$

と分けた時、右辺の前半

$$SO_n := \{A \in O_n \mid \det A = +1\}$$

を、(原点を不動にする) $\mathbf{R}^n$ の回転 (の変換行列) 全体とし、**回転群** (図1.5の打点部分) と呼ぶ。 n 次元空間 $\mathbf{R}^n$ の運動は、平行移動と原点不動の回転によって生成された変換で、これら全体は $\mathbf{R}^n$ の**運動群** (図1.7の打点部分) と呼ばれる。

1-4. 投影について

次に立体を見るということについて考察してみる。人間の目やカメラ等の3次元の例をモデルに取れば、「見る」ことは「投影(射影)を行って立体の像を平面に映す」という操作に他ならないことがわかる。即ち3次元図形を、1つ次元を落とした2次元平面へ投影することが「見る」ことであって、その拡張として $\mathbf{R}^n$ の立体を $\mathbf{R}^n$ の空間内のある超平面^{*15} Π (空間としては $\mathbf{R}^{n-1}$) へ投影することが自然に得られる^{*16}。ここで、投影面 (スクリーン) Π の法線ベクトルのうち長さが1のものを e_1 としておく。例えば

$n = 2$ のときは $e_1 = (1, 0)$ 即ち Π は y 軸、

図1.8 法線ベクトル e_1 の投影面 Π

^{*15} 1つのベクトル e (法線ベクトル) と直交する空間図形で、 $e \cdot x = 0$ となるベクトル x を位置ベクトルとする点全体。

^{*16} 一般には、投影する面は超平面でなく、局所的に $\mathbf{R}^{n-1}$ と同相な多様体とすべきであろう。例えば、人間の網膜は近似的に球面 (即ち3次元球の表面 $S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$: 局所的に $\mathbf{R}^2$ と同相な多様体) の一部と見なせるので、人間の目が物体を見るのは、物体の S^2 への投影ともみられるが、ここでは投影する面を最も基本的な超平面に限っておく。

^{*17} 実際、直投影は本質的であって、いくつかの直投影図により、もとの立体の基本的な図形的認識が可能であることは、3次元の直投影法の教えるところである。

$n = 3$ のときは $e_1 = (1, 0, 0)$ 即ち Π は yz 平面、等である (図1.8)。

以下簡単のため、斜投影・中心投影については別の機会に譲り、今回はまず直投影^{*17}について論じ、特に断らない限り、投影(射影)は直投影(正射影)のことを意味する。従って、投影の平行光線方向ベクトルは e_1 となり、例えば $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ とすると、点 $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ は Π 上の点 $P'(0, p_2, \dots, p_n)$ に投影されることになる。

1-5. 運動と投影の相互関係について

前節までは運動と投影とを別々に扱ったが、次に両者の関連性を調べてみることにする。運動は、平行移動と回転の合成であったので (図1.7)、それぞれ別個にして考察しよう。

まず平行移動と直投影との関係は明白である。即ち、 $\mathbf{R}^n$ 内の平行移動は、 $\mathbf{R}^n$ 内のベクトル v によって一意的に定まるが、 v を超平面 Π (投影面) に直投影したベクトルを v_0 とすると、立体が v だけ平行移動した時、立体の投影像は、 v_0 だけ Π 上を平行移動することになる (図1.9)。つまり、平行移動だけでは立体の一側面しか見ることが出来ない、ということを意味している。従って、出来るだけ色々な方向から立体を見る という我々の立場からみて、平行移動は考察の対象外として良いであろう。

これに対し、回転の前後では、投影された図形は一般には変化している (合同でない) ので、回転は立体を色々な側面から見る為に必要かつ本質的な運動であると言える。従って以下、回転について考察を加えていくことにする。1-2., 1-3. 節で述べたように、一般の回転は、原点を不動にする回転と平行移動で生成され、前述のように平行移動は考察の対象外としたことより、今後考察する回転は原点を不動にする回転 (即ち SO_n の要素) だけに限る。

図1.9 平行移動と直投影の関係

2 回転について

2-1. 回転の図形的（視覚的）表示

回転は SO_n の要素，即ち行列で表されるが，このままでは抽象的すぎるので，平行移動の場合の移動ベクトルの様な具体的な図形イメージでその内容を特徴付ける必要がある．また，なるべく偏りなく色々な方向から見た立体の直投影を求め，もとの立体をより正確に把握する為にも，系統だてて回転をとらえる必要がある．

回転 $\sigma \in SO_n$ による Π の像(超平面 $\Pi\sigma^{*18}$) の法線ベクトルは $e_1\sigma$ で，これは R^n の原点から単位超球面^{*19} S^{n-1} へ向かうベクトルであり， S^{n-1} 上の1点を定める．即ち，回転 σ に対し，位置ベクトルが $e_1\sigma$ の S^{n-1} 上の1点が一意的に定まる．この点を P_σ と書く(図2.1)．以下，この点を Key Point にして回転を系統だてて見ていくことにする．

1つの回転に対して S^{n-1} 上の1点が定まったが，逆の対応により S^{n-1} 上の点1つに対し，回転が一意に定まってくれば， S^{n-1} 上の点と回転全体が1対1の対応をして大変都合だが，これはうまく行かない．つまり S^{n-1} 上の点 P に対し $P = P_\sigma$ となる $\sigma \in SO_n$ が2個以上存在するのである．例えば $n = 2$ のとき，円周上の1点 P (位置ベクトル p) を固定しても，ベクトル $e_1 = (1, 0)$ を p に移す回転は， e_1 と p の成す角を θ として

$$\sigma^{[\theta]} := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \sigma^{[2\pi-\theta]} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

図2.1 球面 S^{n-1} 上の点 P_σ [$n = 3$ の例]

^{*18} 線型変換 σ によるベクトル v の変換像を $v\sigma$ と書いたのので(1.3 節脚注*14参照)，それに対応し， σ による物体(図形) K の変換像を $K\sigma$ と書く．

^{*19} n 次元単位球の表面 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ を S^{n-1} と書く．例えば， S^2 は通常の(3次元)単位球の表面， S^1 は単位円周である．

図2.2 円周 S^1 上の点 P_σ

なる異なる2つがある(図2.2)．尤もこの場合は， θ と $2\pi - \theta$ は回転に関し本質的に同一の角と見なすことも出来るので，円周 S^1 の点と回転が1対1の対応をしていると言っても良い．ところが $n = 3$ のときは，球面上の1点 P (位置ベクトル p) を固定しても，ベクトル $e_1 = (1, 0, 0)$ を p に移す回転で，回転角のみならず回転軸さえ異なった本質的に異なる回転が無数にある(図2.1の σ, σ' 等)．

しかし次に示すように， R^3 のベクトル $e_1 = (1, 0, 0)$ を球面 S^2 上の同一点に移す回転たちは， R^2 の回転によって結び付けられているのである． $n > 3$ のときも，事情は同じであるので，任意の n に対し R^n のベクトル $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ を S^{n-1} 上の同一点に移す回転たちが R^{n-1} の回転によって結び付くことを示す．

以下，数学的慣例に従い， R^n の点 P (の座標) と原点を始点とする P の位置ベクトル(の成分)を同一視する．

補題 2.1 $\sigma, \sigma' \in SO_n$ が，

$$e_1\sigma = e_1\sigma'$$

なる関係を満たせば，

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \sigma, \quad \tau \in SO_{n-1}$$

が成り立つ．ただし， $e_1 := (1, 0, \dots, 0)$ ．

(証明) 仮定より，

$$e_1 = e_1\sigma'\sigma^{-1} \quad (2.1)$$

ここで

$$\rho := \sigma'\sigma^{-1} \in SO_n$$

とおくと，(2.1) 式より

$$\rho = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_2 & & & \\ \vdots & & \tau & \\ a_n & & & \end{array} \right),$$

但し， $a_2, \dots, a_n$ は実数， $\tau \in M_{n-1}(R)$ である．

$\rho \in SO_n$ より

$$\left(\frac{1 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{*} \middle| \frac{*}{\tau \tau} \right) = {}^t \rho \rho = E_n$$

$$= \rho {}^t \rho = \left(\frac{1}{*} \middle| \frac{*}{\begin{pmatrix} a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (a_2 \cdots a_n) + \tau {}^t \tau} \right)$$

従って

$$1 = 1 + a_2^2 + \dots + a_n^2,$$

$$\therefore a_2 = \dots = a_n = 0,$$

$$\therefore {}^t \tau \tau = \tau {}^t \tau = E_{n-1}.$$

即ち

$$\tau \in SO_{n-1}$$

を得る.

q.e.d.

【解説】 補題 2.1 について 3 次元の場合を例にとって簡単に触れてみる. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix}$ は $e_1 = (1, 0, 0)$ を法線ベクトルとする平面 Π 上での回転であるから, 補題 2.1 より e_1 を球面 S^2 上の同一点に移す回転 σ と σ' は平面 Π 上での回転の差異しか無く, σ と σ' による運動後の (直) 投影図たちは Π 上で合同であることがわかる (図 2.3). 従って, Π を投影面とする直投影を考察する我々の立場においては, σ と σ' は同一物と見なして良い (1-1. 節(ii)参照). よって次のような 1 対 1 対応が得られる:

球面 S^2 上の一点 $\leftrightarrow$ 合同の投影図を持つ R^3 の回転

もちろん n 次元の場合についても同様に

球面 S^{n-1} 上の一点 $\leftrightarrow$ 合同の投影図を持つ R^n の回転
なる対応が得られる.

補題 2.1 数学的に約言すれば, 3 次元の場合, 空間の回転全体と球面 S^2 上の点は 1 対 1 に対応しなかったが, 3 次元空間の回転全体 SO_3 を 2 次元平面の回転倍の差異だけがあるものを一まとめにした同値類集合

$$SO_3/SO_2$$

図 2.3 立体を補題 2.1 の σ, σ' で動かした後の Π への直投影像は合同

と S^2 が 1 対 1 に対応することを言っている. 一般に SO_n と S^{n-1} は 1 対 1 に対応しないが, SO_n を SO_{n-1} で割った同値類集合が 1 対 1 に対応している. 即ち

$$SO_n/SO_{n-1} \simeq S^{n-1}.$$

次に, 補題 2.1 を用いて回転を系統だてて捉えてみることにする.

2-2. 回転の系統的な表示 (2 次元, 3 次元の場合)

まず, 2 次元平面の場合の回転が基本的なモデルとなる. この場合は $\sigma \in SO_2$ に対し,

$$\sigma = \sigma^{[\theta]} := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる実数 θ が取れる. つまり, 2 次元の回転は, 1 つのパラメータ θ で生成されていることがわかる.

3 次元の場合,

$$R_1 := \left\{ \sigma_1^{[\theta]} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbf{R} \right\},$$

$$R_2 := \left\{ \sigma_2^{[\theta]} := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbf{R} \right\},$$

$$R_3 := \left\{ \sigma_3^{[\theta]} := \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbf{R} \right\},$$

と置くとこれらはそれぞれ SO_3 の部分群を成し, 順に x 軸回りの (本質的には y_2 平面上の) 回転全体, z 軸回りの回転全体, y 軸回りの回転全体 となっている.

このとき次の命題が成り立つ.

命題 2.2 任意の $\sigma \in SO_3$ は,

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (\sigma_i \in R_i, i=1, 2, 3)$$

と分解される. 即ち, 3 次元空間の任意の回転 σ に対して, 適当な実数 θ_2, θ_3 が存在して

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2^{[\theta_2]} \cdot \sigma_3^{[\theta_3]}$$

となる. ただし, σ_1 は $e_1 = (1, 0, 0)$ を法線ベクトルとする平面 Π (投影面) 上での回転である.

(証明) $p := e_1 \sigma$ とおく. p は球面 S^2 上の 1 点を定めるので, $\sigma_2 \in R_2, \sigma_3 \in R_3$ が存在して,

$$e_1 \sigma_2 \sigma_3 = p$$

となる (図 2.4). 故に

$$e_1 \sigma_2 \sigma_3 = e_1 \sigma.$$

従って補題 2.1 より

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \sigma_2 \sigma_3, \quad \tau \in SO_2$$

よって

図 2.4 σ_2, σ_3 はそれぞれ z 軸, y 軸まわりの回転

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \in R_1$$

と置けば, 命題を得る.

q.e.d.

[解説] 命題 2.2 の σ_1 は投影後の図形の回転を引き起こすだけであるので, 我々の立場 (1-1. 節(ii) 参照) においては不要となる. 従って, σ_2 と σ_3 の 2 種類の回転を元の立体に施すことによって, 欲しい (直) 投影図が全て得られることになる. 換言すれば:

$e_1 = (1, 0, 0)$ を法線ベクトルとする平面に立体を直投影する場合, そのすべての投影図は同様なものを除き軸の固定された 2 つの回転の積 $\sigma_2^{[\theta_2]} \cdot \sigma_3^{[\theta_3]}$ のパラメータ θ_2, θ_3 を動かすことによりすべて得られる.

[補足] 命題 2.2 により, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を 0 と 2π の間を動かせば,

$$\sigma_1^{[\theta_1]} \cdot \sigma_2^{[\theta_2]} \cdot \sigma_3^{[\theta_3]}$$

によって, 全ての 3 次元回転が得られる事がわかる. しかし, 1 つの回転を実数の組 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ で表す方法は一意的ではない. 命題 2.2 と同様の証明により, 任意の回転 σ は, 例えば

$$\sigma = \sigma_1^{[\theta_1]} \cdot \sigma_3^{[\theta_3]} \cdot \sigma_2^{[\theta_2]} \quad (\sigma_i \in R_i, i=1, 2, 3)$$

とも分解されることもわかる. もちろん, これら $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ は一般には命題 2.2 のものと (回転角が) 異なるであろう. より一般に σ は, i_1, i_2, i_3 を 1, 2, 3 の並べ替えとして

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{i \text{ 番目}}{1}, 0, \dots, 0)$$

図 2.5 R_i の要素 $\sigma_i^{[\theta]}$ のイメージ

$$\sigma = \sigma_1^{[\theta_1]} \cdot \sigma_2^{[\theta_2]} \cdot \sigma_3^{[\theta_3]}$$

と分解される.

2-3 回転の系統的な表示 (n 次元の場合)

n 次元空間 R^n の正規直交基底^{*20}を $e_1, e_2, \dots, e_n$ とし, e_i, e_i 以外の全ての e_j を不変にする R^n の回転全体を

$$R_i := \{ \sigma \in SO_n \mid e_j \sigma = e_j, j \neq i \},$$

($i=2, 3, \dots, n$) とする. R_i の要素は, 本質的には e_1 と e_i で張られた 2 次元平面上の角 θ の回転である (図 2.5). 特に

i 番目

$$e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \quad (2.2)$$

($i=1, 2, \dots, n$) とすると, R_i の各要素は次の形の行列で表される:

$$\sigma_i^{[\theta]} := \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \cdots & 0 & -\sin \theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \sin \theta & 0 & \cdots & 0 & \cos \theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

従って, この場合は $R_i = \{ \sigma_i^{[\theta]} \mid \theta \in \mathbb{R} \}$ となる.

($n=3$ の場合は 2.2 節の R_2, R_3 と一致している.)

補題 2.3 p を R^n の単位 (超) 球面上の 1 点とすると, 適当な $\sigma_i \in R_i$ ($i=2, 3, \dots, n$) があって,

$$p = e_1 \sigma_n \sigma_{n-1} \cdots \sigma_3 \sigma_2$$

となる.

(証明) n に関する数学的帰納法による.

$n=2$ のとき, p と e_1 の成す角を θ として,

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

*20 長さが 1 で, すべて互いに直交するベクトルたち. 直交座標系の基準となる単位ベクトルたちである. 例えば (2.2) 式の $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$.

ととれば $p = e_1 \sigma_2$ を得る.

$n > 2$ のとき,

$$p = p_1 e_1 + \cdots + p_{n-1} e_{n-1} + p_n e_n$$

として

$$\bar{p} := p_1 e_1 + \cdots + p_{n-1} e_{n-1}, \quad k := |\bar{p}|$$

とおく. ここでもし $k = 0$ なら $\bar{p}$ は零ベクトルより

$$p_1 = \cdots = p_{n-1} = 0.$$

$|\bar{p}| = 1$ より $p = e_n$, よって

$$\sigma_i = \sigma_i^{[0]} = E_n, \quad \sigma_n = \sigma_n^{[-\frac{\pi}{2}]}$$

($i = 2, 3, \cdots, n-1$) とおけば

$$P = e_1 \sigma_n^{[-\frac{\pi}{2}]} = e_1 \sigma_n \sigma_{n-1} \cdots \sigma_3 \sigma_2$$

より結論を得る. 従って以下 $k \neq 0$ とする.

$|\frac{1}{k}\bar{p}| = 1$ より, $\frac{1}{k}\bar{p}$ は, $e_1, \cdots, e_{n-1}$ たちで張られる

$n-1$ 次元空間 R^{n-1} の単位球面上の 1 点である. 故に, 帰納法の仮定から

$$\frac{1}{k}\bar{p} = e_1 \sigma_{n-1} \cdots \sigma_3 \sigma_2, \quad \sigma_i \in R_i$$

とできる. 従って,

$$p = \bar{p} + p_n e_n = (k e_1) \sigma_{n-1} \cdots \sigma_3 \sigma_2 + p_n e_n,$$

e_n は $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_{n-1}$ の作用では不変より,

$$p = (k e_1 + p_n e_n) \sigma_{n-1} \cdots \sigma_3 \sigma_2. \quad (2.3)$$

ここで $k^2 + p_n^2 = |\bar{p}|^2 = 1$ であるから, $k e_1 + p_n e_n$ は e_1 と e_n で張られる 2 次元空間(平面)内の単位円周上の点となる. 従って $n = 2$ の場合の結論より, 適当な $\sigma_n \in R_n$ が存在して

$$k e_1 + p_n e_n = e_1 \sigma_n.$$

これと (2.3) 式と合わせて結論を得る. q.e.d.

さてここで

$$R_1 := \{ \sigma \in SO_n \mid e_1 \sigma = e_1 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \mid \tau \in SO_{n-1} \right\}$$

とおく. これは, e_1 を不変にする R^n の回転—即ち e_1 を法線ベクトルとする超平面 Π (投影面) 内の回転 (図 2.3)—全体の集合である. このとき命題 2.2 の拡張として次の定理を得る.

定理 2.4 R^n の全ての回転 $\sigma \in SO_n$ に対し, 適当な回転 $\sigma_i \in R_i$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) が存在して

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_n$$

となる. 特に e_i を (2.2) 式の様にとった場合, n 次元空間の任意の回転 σ に対して, 適当な実数 $\theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_n$ が存在して

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2^{[\theta_2]} \cdot \sigma_3^{[\theta_3]} \cdots \sigma_n^{[\theta_n]}$$

となる. ただし, σ_1 は e_1 を法線ベクトルとする (超)

平面 Π 内での回転である.

(証明) $e_1 \sigma$ は R^n の単位球面上の点なので補題 2.3 より

$$e_1 \sigma = e_1 \sigma_n \sigma_{n-1} \cdots \sigma_3 \sigma_2, \quad \sigma_i \in R_i \quad (i = 2, 3, \cdots, n).$$

故に 補題 2.1 より

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \sigma_n \sigma_{n-1} \cdots \sigma_3 \sigma_2, \quad \tau \in SO_{n-1}$$

を得るので, $\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \in R_1$ とおけば

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_n \sigma_{n-1} \cdots \sigma_3 \sigma_2. \quad (2.4)$$

R^n の正規直交基底は並べる順序に無関係なので, その一部である $e_2, e_3, \cdots, e_n$ を逆順に並べて考える (即ち $e_n, \cdots, e_3, e_2$ の順にみる) と (2.4) 式より結論を得る.

q.e.d.

この定理より, 0 節の疑問に対する会頭として次の系を得る.

系 2.5 R^n の全ての回転は, 図 4 (0 節) の形の回転の合成で表される.

(証明) n に関する数学的帰納法による.

$n = 2$ のとき, (1.5) 式より SO_2 の要素は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

の形で書けるので良い. SO_{n-1} の要素に対して成り立つと仮定する. $\sigma \in SO_n$ に対し, 定理 2.4 より σ は

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \in R_1 \text{ と図 4 の形の回転 } \sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_n$$

たちの合成. ところが $\tau \in R_{n-1}$ であったので, 帰納法の仮定より τ は図 4 の形の回転の合成, 従って σ_1 も図 4 の形の回転の合成. 以上より σ も図 4 の形の回転の合成となる. q.e.d.

回転の後に投影を行う我々の立場においては, 定理 2.4 から導かれる次の系が本質的である. これは 1-1. 節の(ii)iii)の要請に対する回答である.

系 2.6 K を R^n の部分集合(立体), Π を e_1 を法線ベクトルとする超平面 ($n-1$ 次元空間) とする. このとき, R^n の任意の回転 σ に対し, 適当な $\sigma_i \in R_i$ ($i = 2, 3, \cdots, n$) が存在して

K に σ を施した立体: $K\sigma$,

K に $\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_n$ を施した立体: $K\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_n$

を, それぞれ Π に直投影してできる図形は, Π 上の図形として合同 (Π 上の運動で移り合う) のである.

ただし, e_1, R_i 等は, 本節冒頭で定義したものである.

(証明) 定理 2.4 より

$$K\sigma = K\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_n = (K\sigma_1) \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_n.$$

故に、 $K\sigma$ と $K\sigma_2\sigma_3\cdots\sigma_n$ との違いは、 $K\sigma_1$ と K との差異、
即ち K に σ_1 を施しているか否かだけであり、従って、
この系の2つの立体の Π への投影像は、 σ_1 を施している
か否の差異のみである。 $\sigma_1 \in R_1$ は e_1 を法線ベクトルとす
る超平面 Π 上の運動であるので、系を得る。

q.e.d.

まとめ

系 2.6 により、 n 次元空間の立体を直投影して「見る」という我々の立場においては、立体の運動として $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ なる $n-1$ 個の「固定された」2次元平面上の回転だけを取れば十分であることがわかった。

実直交行列の標準形⁹⁾、或いはより一般に Cartan-Dieudonné の定理¹⁰⁾、から、 n 次元空間 R^n の任意の回転は $\frac{n}{2}$ 個以下の「適当な」2次元平面上の回転たちの合成で表されることがわかるので、単に回転だけを理論的に捉えるだけであればこれで十分であるとも言えよう。しかしこれは所謂存在定理であり、構成要素となる回転を与える2次元平面を具体的に求めることは一般に困難であり、都合が悪いことにこれらの2次元平面は、初めに与えられる回転に依存して変化してしまう。従ってこれらのことは、1-1.節で述べた(i)と(ii)(特に(ii))を満足する数学的な内容のものであるが、残念ながら(iii)が満たされておらず、図学的な立場から実用的であるとは言えない。よって我々は、(ii)を少々犠牲にしても(2-2.節[補足]参照)(iii)を取り、系 2.6 のような形式を得たのである。

参考文献

- 1) H. S. M. Coxeter, "Introduction to Geometry (2nd. ed.)", John Wiley and Sons Inc. (1989), §22.
- 2) H. S. M. Coxeter, "Regular Polytopes (3 rd. ed.)", Dover Publications (1973).
- 3) L. F. Tóth, "Regular Figures", Pergamon Press (1964), §V.
- 4) 宮崎興二, "正120胞体の神秘", 数学セミナー, 第20巻 第8号 (1981), 70-75.
- 5) 日本図学会編, "美の図学", (1998), 161-168.
- 6) 前川道郎・宮崎興二, "図形と投象", 朝倉書店 (1979).
- 7) 高田一郎, "高次元図法幾何学への道", 図学研究記念号 (1997).
- 8) 齊藤正彦, "線型代数入門", 東京大学出版会 (1966).
- 9) 山内恭彦・杉浦光男, "連続群論入門", 培風館 (1960), 第II章 §1, 2.
- 10) O. T. O'Meara, "Introduction to Quadratic Forms", Springer-Verlag (1973), Chap.IV Theorem 43:3.

●1999年2月9日受付

たかだ いちろう

生年: 1958年

現職: 徳島大学 総合科学部 助教授

著書: 『KATACHI U SYMMETRY』Springer-Verlag (共著, 1996),
『美の図学』日本図学会編 森北出版 (共著, 1998).

学術論文: On the genera and the class number of unimodular lattices over the ring of integers in real quadratic fields, Journal of Number Theory, Vol.36 No.3 (1990).

On the class number of certain real quadratic fields, Mathematica Gottingensis, Vol.34 (1991).

高次元格子の Voronoi cell について - 超立方格子・超立方体の図形的性質と円分体の整数論との関係 -, 準結晶の理論的研究, 科学技術庁未踏科学技術協会 (1995).

The submanifold of self-dual codes in a Grassmann manifold, Osaka Journal of Mathematics, Vol.32 No.4 (1995).